

Міністерство освіти та науки України
Національний університет “Кієво-Могилянська академія”
Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Кваліфікаційна робота
освітній ступень - бакалавр

на тему: «**Числове дослідження зв'язку між перенесенням енергії
альфвеновими власними модами та радіальною залежністю їх фаз**»
»

Виконав студент 4 року навчання
спеціальності
104 Фізика та астрономія
Саламон Валентин Іванович

Керівник Яковенко Ю.В.
Провідний науковий співробітник,
відділ теорії ядерного синтезу,
Інститут ядерних досліджень НАН
України
Рецензент Мельник Р.М.

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою

Секретар ЕК _____
« ____ » _____ 20 ____ р.

Зміст

Анотація	2
Вступ	3
Введення в основні рівняння та поняття	8
Аналіз числового алгоритму	17
Аналітичний опис математичної моделі	17
Реалізація програми step-by-step	21
Аналіз отриманих результатів	28
Проведення аналізу отриманих результатів експерименту №1	28
Проведення аналізу отриманих результатів експерименту №2.....	36
Висновок	44
Список використаної літератури	44

Анотація

Якщо проаналізувати всесвіт, що оточує нас, то ми побачимо, що термоядерна реакція злиття відіграє надзвичайно важливу роль у життєвому циклі та еволюції зір, є джерелом енергії, яку вони випромінюють, і саме завдяки ній відбувається синтез важких елементів у їх надрах. З метою дослідження ядерного синтезу у ролі джерела енергії використовуються токамаки, у яких створюються умови для проходження таких реакцій.

У найбільшому діючому токамаку Північної Америки DIII-D було експериментально відкрито, що альвенові власні моди у плазмі зазнають радіальних змін своїх фаз.

У даній роботі досліджується радіальна зміна фаз альвенової моди при присутності явища перенесення енергії. Перетворюючи задачу на власні значення для диференціального оператора на задачу на власні значення для матриці, таким чином ми дискретизуємо математичну модель альвенових власних мод для подальшого застосування у проектуванні комп'ютерної симуляції з використанням мов програмування C++, Python та парадигм: об'єктно-орієнтовного програмування та обробка паралельних обчислень. Таким чином, виконано моделювання GAE(Global Alfen Eigenmodes), у яких при збудженні та гамуванні виникає потік енергії, і як наслідок - радіальна зміна їх фаз.

У подальшому, набуті результати та досвід під час виконання даної роботи можна буде використати у створенні програмного забезпечення для діагностики перенесення енергії альвеновими власними модами між різними областями плазми токамака.

Вступ

Альвенові хвилі - це поперечні магнітно-гідродинамічні хвилі, які рухаються вздовж ліній магнітного поля та збуджуються в будь-якій електропровідній рідині, що пронизана цим магнітним полем.

У неоднорідному магнітному полі ці хвилі можуть поширюватися також поперек магнітного поля. Через це можуть утворюватися **альвенові власні моди (АВМ)** – стоячі альвенові хвилі, захоплені між областями непрозорості. Вони є власними модами системи, тобто мають специфічні частоти і просторові розподіли, які відповідають природним резонансним умовам в плазмі. АВМ можуть переносити енергію поперек поля, хоча їх групова швидкість поперек поля є значно меншою альвенової.[4]

У 1942 році Ганнес Альвен припустив можливість існування альвенових хвиль з рівнянь електромагнетизму та гідродинаміки та запропонував їх теоретичну модель. Він розглядав їх у контексті магнітосфери Землі та інших планет. Пізніше, у 1949 році, науковці Ерик Аксель Бергвалль і Гуннар Скоглунд презентували експериментальне підтвердження його припущень-вони виявили альвенові хвилі під час дослідження хвиль, що спостерігалися при збудженні за допомогою акустичного трансдюсера, у рідкій ртуті, яка була поміщена в магнітне поле.

Дослідження показали, що механічні коливання ртуті певною мірою залежать від магнітного поля. Ці експерименти фактично підтвердили теорію, запропоновану Гансом Альфвенем, щодо існування цих хвиль. Це дослідження відіграло ключову роль у подальшому розвитку нашого розуміння альфвенових хвиль та їх впливу. Сьогодні відомо, що вони мають важливе значення у ролі механізму транспортування та

перерозподілу енергії та імпульсу в різних геофізичних, астрофізичних та термоядерних плазмових системах.

Перші спостереження альфвенових хвиль у магнітосфері Землі були здійснені в 1970-х роках за допомогою космічних апаратів, зокрема, за допомогою супутників програми IMP (Interplanetary Monitoring Platform), запущених Національним аерокосмічним агентством США (NASA). Тоді, було висунуто припущення, що саме транспортування енергії альфвеновими хвилями є механізмом генерації ауроральних явищ у магнітосфері землі.[13]

Ауроральні явища у магнітосфері Землі - це світлові ефекти, що виникають у верхній атмосфері під впливом заряджених частинок сонячного вітру, які взаємодіють з магнітосферою та атмосферою Землі.

Коли сонячний вітер, який складається з заряджених часток, взаємодіє з магнітосферою Землі, відбувається збудження альфвенових хвиль. Таким чином, вони переносять енергію від зовнішніх шарів магнітосфери до атмосфери у районі полюсів.

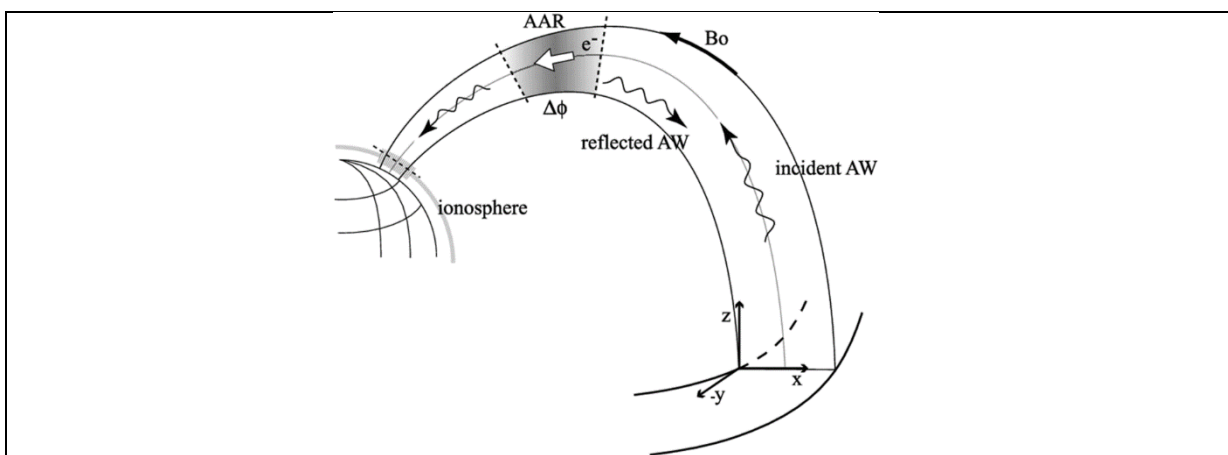


Рис. 1 Фізичний сценарій припливу та відтоку хвиль Альфвена (AW) у магнітосфері[13]

При зіткненні часток сонячного вітру з атмосферою у районі полюсів відбувається випромінювання енергії у вигляді світла, що відоме як аурори.

Також, у 2007 році, у Національній сонячній обсерваторії, що розташована у штаті Нью-Мексико, було зафіксовано хвилі у спектрі корональної емісійної лінії Fe XIII 1074,7 нанометрів, що поширюються зі швидкістю 4 мегаметри за секунду вздовж магнітного поля Сонця.

Тому, було висунуто припущення, що саме перенесення енергії альвеновими хвилями є найбільш ймовірною причиною нагрівання корональної маси Сонця до аномально високих температур.

GAE (Global Alfvén Eigenmodes) - найпростіший різновид альвенових власних мод.

Слід додати, що, ймовірно, саме GAE спостерігалися в експериментах на американському сферичному токамаку NSTX під час значного збільшення втрат енергії.[3]

Токамак (тороїдальна камера з магнітними котушками) - це тип ядерних реакторів, робота яких ґрунтується на процесі термоядерного синтезу. Основна ідея полягає в тому, щоб створити умови, аналогічні умовам, що існують у зірках, де відбувається природне ядерне злиття: легкі ядра, такі як дейтерій і тритій, зливаються, утворюючи важкі ядра, а в цьому процесі вивільнюється значна кількість енергії.

В токамаках плазма, що складається з заряджених частинок, таких як іони, утримується і контролюється за допомогою магнітного поля. Вона нагрівається до дуже високих температур за допомогою інжекції струменя (або пучка) швидких нейтральних атомів. Висока температура забезпечує

достатню швидкість іонів, яка необхідна для подолання електричного відштовхування між ними ,щоб здійснити процес злиття двох легких ядер. Саме тому цей процес зветься термоядерним синтезом. Під час цього процесу велика кількість енергії вивільнюється у формі тепла та рентгенівського випромінювання, нейтронів та гамма-квантів. Ця енергія може бути використана для утворення пари, яка потім приводить у рух ротор турбогенератора, який, безпосередньо, генерує електричну енергію. Однак, на даний момент, технологія контрольованого термоядерного синтезу ще не досягла етапу комерційної експлуатації. Дослідження та розробки в цій галузі продовжуються з метою знаходження шляхів для ефективного та стабільного використання для виробництва енергії.

За ймовірною інтерпретацією, підсилені втрати відбувалися через те, що GAЕ відбирали енергію швидких йонів, що утворюються під час ядерної реакції злиття, і переносили її на периферію плазми.[4]

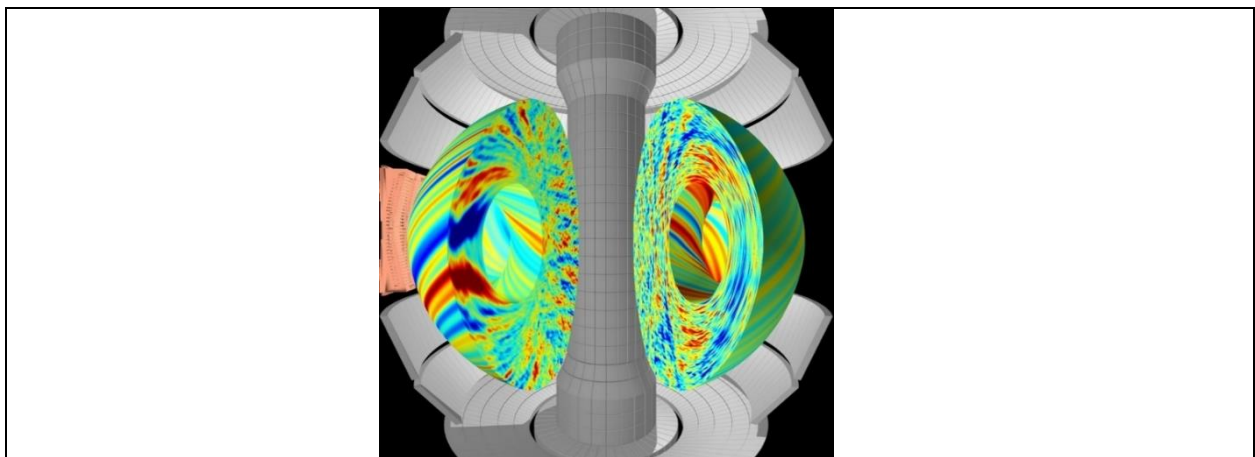


Рис. 2 National Spherical Torus Experiment(render)[7]

Варто додати,що у американському токамаку DIII-D під час проведення експериментальних досліджень спостерігалось водночас викривлення хвильового фронту глобальних альфвенівських власних коливань (GAЕ) та втрата енергії. Варто зазначити, у роботі Крамера [6] було зроблено

висновок, що це явище є пов'язаним з тим, що в моді існує потік енергії через те, що області збудження та гамування моді рознесені в просторі. Таке перенесення енергії альфвенівими модами може бути небезпечним для стабільності та ефективності процесу термоядерного синтезу.

Таким чином, можна проводити діагностику розподілу енергії у потоці плазми при резонансній енергетичній взаємодії частинок з модами, (які існують при певних рівноважних амплітудах, які у свою чергу, впливають на розподіл частинок у плазмі. Це відбуватиметься доти, доки амплітуда не стане сталою.) (можливо, не варто переносити).

Головною метою цієї роботи є більш детально дослідити зв'язок перенесення енергії альфвенівими власними модами та радіальною зміною фаз за допомогою просунутої запрограмованої моделі на мовах C++ та Python з використанням прийомів об'єктно-орієнтовного програмування та паралельних обчислень.

Частина 1

Введення в основні рівняння та поняття

Щоб розкрити сутність фізико-математичної основи теми, яку ми плануємо дослідити в цій роботі, необхідно детальніше розглянути такий розділ фізики, як фізика плазми.

Фізика плазми — це галузь фізики, що вивчає властивості та поведінку плазми. Плазма складається з заряджених частинок: іонів, електронів і нейтральних атомів, які взаємодіють через електромагнітні сили.

Дослідження в цій галузі охоплюють широкий спектр явищ, від термоядерного синтезу в лабораторних умовах до природних плазмових утворень у космосі, таких як зорі та іоносфера Землі.

Фізика плазми широко застосовується в багатьох галузях, зокрема в виробництві напівпровідників (плазмове осадження, плазмове травлення, іонна імплантація, плазмова очистка, активація поверхонь напівпровідників), ядерній фізиці (власне розробка технологій керованого термоядерного синтезу), космічних технологіях (плазмові двигуни), астрофізиці та інших.

Спершу, ознайомимось з **геометрією токамака**. Токамак являє собою тороїдальну систему утримання плазми за допомогою комбінації полоїдального магнітного поля, яке створюється струмами (Рис. 3 (а)), що проходять у тороїдальному напрямку у плазмі, та тороїдального, яке утворюється струмами в зовнішніх котушках, що з'єднують плазму.

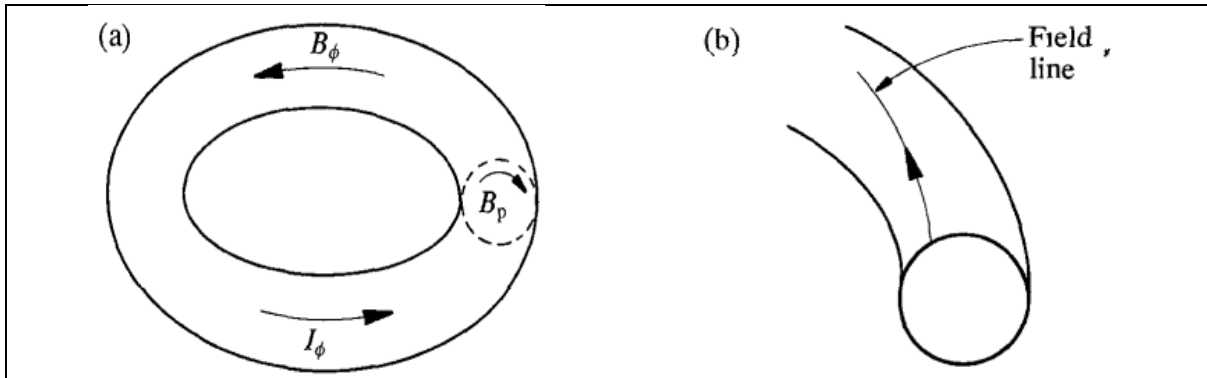


Рис. 3 Тороїдальне B_ϕ та полоїдальне B_θ магнітні поля у плазмі токамаку

Тобто, магнітні силові лінії токамака намотуються на магнітні поверхні, які мають форму вкладених торів. Таким чином, тороїдальне поле B_ϕ і полоїдальне B_θ утворюють лінії магнітного поля з гвинтовою траєкторією навколо тору (Рис. 3 (b)).

Варто зазначити, що магнітне поле значною мірою визначає фізичні властивості плазми; зокрема, ці властивості є дуже різними вздовж та поперек поля. Тому, у такому випадку варто використовувати координати, які прив'язані до магнітних поверхонь- (r, θ, ϕ) , де r - радіальна координата, яка виконує роль магнітної поверхні; ϕ - тороїдний кут, що вимірюється вздовж тора відносно його осі симетрії; θ - так званий полоїдний кут, тобто кут у перерізі тора (Рис. 4). На цій ілюстрації ми також бачимо: R_0 - це магнітна вісь, яка водночас є великим радіусом тора; a - малий радіус тора. Відношення $A = \frac{R_0}{a}$ називається аспектом.

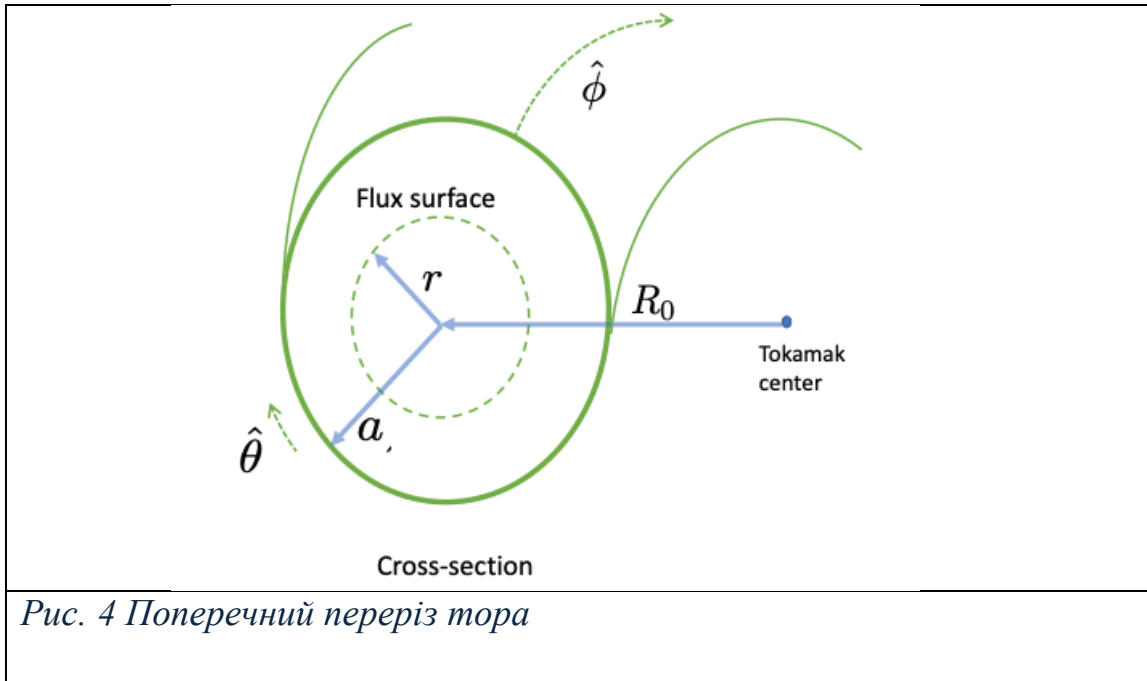


Рис. 4 Поперечний переріз тора

Очевидно, через те, що конфігурація не є симетричною відносно поворотів за кутом θ , ускладнюються обчислення. Тому, для спрощення, розглядаємо тор у циліндричному наближенні. Цей прийом варто застосовувати тільки тоді, коли параметр A є великим, тобто стінки тора є тонкими. Таким чином, досліджуємо переріз магнітних поверхонь як систему концентричних кіл, а отже тоді рівняння силових ліній матиме наступний вигляд:

$$\frac{rd\theta}{R_0d\phi} = \frac{B_\theta}{B_\phi} \quad (1)$$

Звідси, виведемо магнітне число обертів (magnetic winding number):

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta} \quad (2)$$

Іншими словами, це число обертів силової лінії в полоїдному напрямку за час одного оберту в тороїдному. З рівності (2) отримаємо:

$$q(r) = \frac{rB_\phi}{R_0B_\theta} \quad (3)$$

Варто зазначити, що ця величина виконує роль параметра магнітної поверхні. У загальному випадку, коли форма магнітних поверхностей є не такою простою, вираз для q має дещо складнішу форму. Надалі у роботі буде використовуватись наступне представлення магнітного числа обертів: $\iota(r) = \frac{1}{q}$ – обертальне перетворення.

Тож, розглядатимемо глобальні альвенові власні моди у плазмі з магнітним полем. Як вже було згадано, їх групова швидкість сильно поступається альвеновій-тобто груповій швидкості поширення альвенових хвиль у плазмі вздовж магнітного поля. Тобто, на відміну від моєї попередньої роботи[1], де у ролі математичної моделі альвенових власних мод використовувалась їхнє спрощене представлення, тут проводиться їх безпосереднє емпіричне дослідження.

Тож, завдяки використанню циліндричного наближення, ми отримаємо трансляційну симетрію за обома кутами, тому збурення запишемо як хвильову функцію альвенових власних мод:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \tilde{\Phi}(r) \exp(im\theta - in\phi - i\omega t) \quad (4)$$

$\tilde{\Phi}$ - скалярний потенціал хвилі; m, n - хвильові числа; ω - частота;

Отже, використовуючи вже отримане рівняння альвенових власних мод у роботі [4] та знехтувавши впливом тиску плазми на її коливання, ми отримаємо наступну рівність:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} \right) = B \nabla_{\parallel} \left\{ \frac{1}{B^2} \nabla \cdot \left[B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{\nabla_{\parallel} \tilde{\Phi}}{B} \right) \right] \right\} - \frac{2\pi}{c} \left\{ \nabla \cdot \left[\left(\vec{b} \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right) \nabla_{\parallel} \tilde{\Phi} \right] + B \nabla_{\parallel} \left[\frac{1}{B} \left(\vec{b} \times \nabla \frac{j_{\parallel}}{B} \right) \cdot \nabla \tilde{\Phi} \right] \right\} \quad (5)$$

Де

$$j_{\parallel} \sim \frac{c\epsilon B}{4\pi a} \quad (6)$$

$$\nabla_{\parallel} = \vec{b} \cdot \nabla \quad (7)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} \quad (8)$$

$$\nabla_{\perp} \sim \frac{1}{a} \quad (9)$$

B - модуль рівноважного магнітного поля, яке є комбінацією тороїдального та полоїдального магнітних полів; $v_A = v_A(r)$ - альвенова швидкість, яка надалі буде функцією від r , через зміну густини плазми. Тоді, застосовуючи розкриття операторів у циліндричних координатах та відкидаючи доданки $r/R \ll 1$, отримаємо наступну узагальнену задачу на власні значення:

$$\bar{\omega}^2 \hat{B} \tilde{\Phi} = \hat{A} \tilde{\Phi} \quad (10)$$

Де

$$\hat{B} \tilde{\Phi} = \frac{m^2 \bar{\rho}(r)}{r} \tilde{\Phi} - \frac{d}{dr} \left(r \bar{\rho}(r) \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} \right), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{A} \tilde{\Phi} &= \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + r \bar{k}_{\parallel} m Y(r) \right] \tilde{\Phi} - \bar{k}_{\parallel} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\bar{k}_{\parallel} \tilde{\Phi}) \right] = \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + \right. \\ & \left. r \bar{k}_{\parallel} m Y(r) + r m^2 \iota'^2 \right] \tilde{\Phi} + r m \iota' \bar{k}_{\parallel} \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} - \frac{d}{dr} (r m \iota' \bar{k}_{\parallel} \tilde{\Phi}) - \frac{d}{dr} \left(r \bar{k}_{\parallel}^2 \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} \right) = \\ & \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + r \bar{k}_{\parallel} m Y(r) - \bar{k}_{\parallel} (r \bar{k}_{\parallel}')' \right] \tilde{\Phi} - \frac{d}{dr} \left(r \bar{k}_{\parallel}^2 \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} \right) = \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + 2 \bar{k}_{\parallel} m \iota'(r) \right] \tilde{\Phi} - \\ & \frac{d}{dr} \left(r \bar{k}_{\parallel}^2 \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$v_{A0} = v_A(r=0); \quad (13)$$

$$\bar{\rho}(r) = \rho(r)/\rho(r=0); \quad (14)$$

$$\bar{k}_{\parallel} = \bar{k}_{\parallel}(r) = R_0 k_{\parallel}(r) = m \iota(r) - n; \quad (15)$$

$$Y(r) = 3l'/r + \iota; \quad (16)$$

$$\bar{\omega} = \omega R_0/v_{A0} - \text{безрозмірна частота}; \quad (17)$$

$$k_{\parallel} = k_{\parallel}(r) = [m\iota(r) - n]/R_0 - \text{поздовжнє хвильове число}; \quad (18)$$

$$\bar{\rho}(r) = (1 - \alpha r^2)^{\gamma} \quad (19)$$

Тепер, доповнимо задачу крайовими умовами. У нашому випадку це буде значення скалярного потенціалу хвилі на зовнішній границі, де є ідеально провідна стінка.

$$\tilde{\Phi}(r = 0) = \tilde{\Phi}(r = a) = 0 \quad (19)$$

Тож, роглянемо членів рівняння (10) з похідною другого порядку по змінній r :

$$\frac{d^2}{dr^2} (\hat{B}\tilde{\Phi}) = \frac{2m^2\bar{\rho}(r)}{r^3} \quad (20)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (\hat{A}\tilde{\Phi}) = \frac{2m^2\bar{k}_{\parallel}^2}{r^3} \quad (21)$$

$$\bar{\omega}^2 \frac{2m^2\bar{\rho}(r)}{r^3} = \frac{2m^2\bar{k}_{\parallel}^2}{r^3} \quad (22)$$

Скоротивши, переписуємо:

$$\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(r) = \bar{k}_{\parallel}^2 \quad (23)$$

Підставляючи рівності (15) та (17), отримаємо частоту ω :

$$\omega = |k_{\parallel}|v_A \quad (24)$$

Це є рівнянням локального альвенового резонансу, або іншими словами- альвенового континууму. Таким чином, отримана множина значень частоти, для яких виконується умова (24) у певній точці, утворює неперервний спектр задачі. Якщо проаналізувати розв'язок у такій точці,

то ми побачимо, що він має логарифмічну особливість. Тобто, з фізичної точки зору електронне поле поблизу точки $r = r_*$ поводить як $E = -d\Phi/dr \propto 1/(r - r_*)$, а густина енергії як $\bar{\rho}(r) \propto 1/(r - r_*)^2$. Виходить, що розв'язок є нефізичним, адже при ньому енергія хвилі буде нескінченною.

Розглянемо континуум, який не є монотонним, тобто має мінімум поблизу точки r_0 . Він утворює моду дискретного спектру, частота якої лежить під континуумом:

$$\omega \approx \omega_0 = |k_{\parallel}(r_0)|v_A(r_0), \quad \omega < \omega_0 \quad (25)$$

Таку моду було відкрито числовим шляхом ще у роботі [14] і її було названо Global Alfvén Eigenmode (GAE) - глобальна альвенова власна мода. Детальне аналітичне її дослідження було проведено у роботі [15] за допомогою зведення рівняння (24) до рівняння Шредингера для частинки в потенціальній ямі особливої форми. Було доведено, що GAE існує лише при виконанні певного критерія:

$$g > 1/4 \quad (26)$$

де g - це параметр, що описує форму цієї ями. Його можна виразити через форму профілів плазми поблизу точки r_0 , ось приклад з роботи [8]:

$$g = \frac{2}{r_0} \left(\frac{\rho''}{\rho'} - \frac{\rho'}{2\rho} - \frac{l''}{l'} \right)^{-1} \Big|_{r=r_0} \quad (27)$$

Тепер, аналітично підберемо таку комбінацію параметрів, при яких GAE моди точно існують. Нехай, профіль q задамо параболічним:

$$q = \iota^{-1} = q_0 + q_1 r^2, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad a = 1 \quad (28)$$

а профіль густини (19) наступний:

$$\gamma = 2; \quad (29)$$

необхідно знайти значення параметра α :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{\bar{\rho}(r)}}{r^2} \quad (30)$$

при $\bar{\rho}(1) = 0.1$ та (29) отримаємо:

$$\alpha = 0.6837722340 \quad (31)$$

Додамо збудження та гамування використовуючи доданок $\hat{\Gamma}$ до рівняння (10), отримаємо:

$$\bar{\omega}^2 \hat{B} \tilde{\Phi} = \hat{A} \tilde{\Phi} - \hat{\Gamma} \tilde{\Phi} \quad (32)$$

Тут

$$\hat{\Gamma} \tilde{\Phi} = -G(r) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = i\omega G(r) \tilde{\Phi}(r) \quad (33)$$

де $G(r) = G(x = r)$:

$$G(x) = \varepsilon * \exp\left(-\frac{(x-x_+)^2}{\Delta^2}\right) - \mu * \exp\left(-\frac{(x-x_-)^2}{\Delta^2}\right) \quad (34)$$

x_+ - точка центру зони збудження; x_- - точка центру зони поглинання;

ε - коефіцієнт драйвінгу(збудження);

μ - коефіцієнт демпінгу(поглинання);

Δ - просторовий діапазон збудження хвилі;

Функція $G(x)$ є гаусіаном, який відповідає за механізм “накачування” енергією моди в точці x_+ та втрата енергії в точці x_- у певній області шириною Δ .

Проведемо аналіз балансу енергії у моді. Важливо пам'ятати, як необхідно працювати з комплексним представленням хвильового рівняння, тому потенціал хвилі має наступний вигляд:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \text{Re}[\tilde{\Phi}(r) \exp(im\theta - in\phi - i\omega t)] = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(r) \exp(im\theta - in\phi - i\omega t) + c.c.] \quad (35)$$

Розрахуємо рівняння балансу енергії хвилі. Спершу, опираючись на (11) та (12), перепишемо рівняння (32) у наступному вигляді:

$$\bar{\omega}^2 \left[\frac{m^2 \bar{\rho}(r)}{r} \Phi - \frac{d}{dr} \left(r \bar{\rho}(r) \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] = \left[\left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + 2\bar{k}_{\parallel} m u'(r) \right] \tilde{\Phi} - \frac{d}{dr} \left(r \bar{k}_{\parallel}^2 \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} \right) \right] - \hat{r} \tilde{\Phi} \quad (36)$$

Звідси, виводимо:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S(r) - \frac{\partial F}{\partial r} \quad (37)$$

Тут W – усереднена за часом погонна енергія хвилі;

$$S(r) = G(r) |\Phi|(r)^2 \quad (38)$$

- середнє за часом погонне джерело енергії;

$$F(r) = \text{Im} \left[\frac{1}{\omega} r (\bar{k}_{\parallel}^2 - \omega^2 \rho) \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \quad (39)$$

- середній за часом потік енергії через магнітну поверхню.

Тепер, припустимо, що хвиля знаходиться в стані насичення завдяки певним нелінійним процесам (перерозподілу частинок плазми в фазовому просторі через хвилю). Тоді W не змінюється. Візьмімо тепер три точки (магнітні поверхні), $r_1 < r_2 < r_3$. Якщо тепер дві крайні точки близькі до границь, так що потік через них дорівнює нулю, то з (37) отримаємо:

$$\int_{r_1}^{r_2} dr S(r) = F(r_2) = - \int_{r_2}^{r_3} dr S(r) \quad (40)$$

Частина 2

Аналіз числового алгоритму

Аналітичний опис математичної моделі

Для дискретизації задачі використовуємо метод скінченних різниць: замість невідомої функції ми вивчатимемо її значення на певній сітці з N кількістю точок $r = (r_0, \dots, r_{N+1})$ де $r_j = jh$, а диференціальні оператори заміняємо на різниці. Таким чином, узагальнена задача на власні значення для диференціального оператора перетворюється на задачу на власні значення для матриці.

Отже:

$$\bar{\omega}^2 \hat{B} \tilde{\Phi} = \hat{A} \tilde{\Phi} - \hat{\Gamma} \tilde{\Phi} \quad (41)$$

Використовуючи схему скінченно-різницевого методу апроксимації, виражаємо апроксимоване значення оператора другої похідної у вузлах сітки $\tilde{\Phi}_j = \tilde{\Phi}(r_j)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} = \frac{1}{h^2} (\tilde{\Phi}_{j-1} - 2\tilde{\Phi}_j + \tilde{\Phi}_{j+1}) \quad (42)$$

$h = \frac{1}{N}$ – крок сітки; r_j – точка сітки.

Тепер дискретизуємо $\hat{B} \tilde{\Phi}$ (11) та записуємо у матричному вигляді:

$$\hat{B} \tilde{\Phi} = B \tilde{\Phi} \quad (43)$$

$$(\hat{B} \tilde{\Phi})_i \approx \sum_j B_{ij} \tilde{\Phi}_j = \frac{m^2 \bar{\rho}_i(r)}{r_i} \tilde{\Phi}_i - \frac{1}{h} \left(r_{i+1/2} \bar{\rho}(r_{i+1/2}) \frac{\tilde{\Phi}_{i+1} - \tilde{\Phi}_i}{h} - r_{i-1/2} \bar{\rho}(r_{i-1/2}) \frac{\tilde{\Phi}_i - \tilde{\Phi}_{i-1}}{h} \right)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{m^2 \bar{\rho}_i(r)}{r_i} + \frac{1}{h^2} (r_{i+1/2} \bar{\rho}(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2} \bar{\rho}(r_{i-1/2})), & j = i \\ -\frac{1}{h^2} r_{i-\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i-\frac{1}{2}}), & j = i - 1 \\ -\frac{1}{h^2} r_{i+\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i+\frac{1}{2}}), & j = i + 1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Відповідно, матриця B матиме наступний схематичний вигляд:

$B =$

$$\begin{bmatrix} \frac{m^2 \bar{\rho}_i(r)}{r_i} + \frac{1}{h^2} (r_{i+1/2} \bar{\rho}(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2} \bar{\rho}(r_{i-1/2})) & -\frac{1}{h^2} r_{i+\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i+\frac{1}{2}}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} r_{i-\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i-\frac{1}{2}}) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} r_{i+\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i+\frac{1}{2}}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} r_{i-\frac{1}{2}} \bar{\rho}(r_{i-\frac{1}{2}}) & \frac{m^2 \bar{\rho}_i(r)}{r_i} + \frac{1}{h^2} (r_{i+1/2} \bar{\rho}(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2} \bar{\rho}(r_{i-1/2})) \end{bmatrix}$$

Використовуючи (41), дискретизуємо $\hat{A}\tilde{\Phi}$ (12) та записуємо у матричному вигляді:

$$\hat{A}\tilde{\Phi} = A\tilde{\Phi} \quad (44)$$

$$(\hat{A}\tilde{\Phi})_i \approx \sum_j A_{ij} \tilde{\Phi}_j = \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + 2\bar{k}_{\parallel} m'(r) \right] \tilde{\Phi}_i - \frac{1}{h} \left(r_{i+1/2} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) \frac{\tilde{\Phi}_{i+1} - \tilde{\Phi}_i}{h} - r_{i-1/2} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2}) \frac{\tilde{\Phi}_i - \tilde{\Phi}_{i-1}}{h} \right)$$

$$A_{ij} = \begin{cases} \left[m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + 2\bar{k}_{\parallel} m'(r) \right] + \frac{1}{h^2} (r_{i+1/2} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2})), & j = i \\ -\frac{1}{h^2} r_{i-\frac{1}{2}} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-\frac{1}{2}}), & j = i - 1 \\ -\frac{1}{h^2} r_{i+\frac{1}{2}} \bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+\frac{1}{2}}), & j = i + 1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Для зменшення громісткого виразу, введемо заміну:

$$T(r) = m^2 \frac{\bar{k}_{\parallel}^2}{r} + 2\bar{k}_{\parallel} m'(r) \quad (45)$$

Таким чином, отримаємо таку матрицю A :

$$A = \begin{bmatrix} T(r) + \frac{1}{h^2}(r_{i+1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2})) & -\frac{1}{h^2}r_{i+1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2}r_{i-1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2}) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2}r_{i+1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^2}r_{i-1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2}) & T(r) + \frac{1}{h^2}(r_{i+1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i+1/2}) + r_{i-1/2}\bar{k}_{\parallel}^2(r_{i-1/2})) \end{bmatrix}$$

Варто зауважити, що матриці B та A за типом є тридіагональними(смуговими) матрицями, також відомими як матриці комплексної повздовжньої стрічки (англ. stripe matrix), які є підвидом квадратної комплексної матриці, де кожний елемент розташований вздовж смуги, яка складається з трьох діагоналей: основної та двох бічних, а інші елементи матриці за межами смуги дорівнюють нулю.

Знову, використовуючи (41), дискретизуємо $\hat{\Gamma}\tilde{\Phi}$:

$$\hat{\Gamma}\tilde{\Phi} = \Gamma\tilde{\Phi} \quad (46)$$

$$G_j = G(r_j)$$

$$(\hat{\Gamma}\Phi)_j \approx \sum_j \Gamma_{ij}\tilde{\Phi}_j = i\omega G_j\Phi_j$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} i\omega G_j, & j = i \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Матриця Γ буде мати наступний схематичний вигляд:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} i\omega G_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega G_j \end{bmatrix}$$

Вона є просто діагональною комплексною матрицею.

Що стосується ω , то це найменше власне значення з множини, яка отримана як розв'язок нашої задачі без врахування $\hat{\Gamma}\tilde{\Phi}$. Тобто, спершу ми створюємо спрощену симуляцію, а потім користуємось її результатами,

проводимо вже серію повноцінних експериментів, в кожному з яких збільшуємо коефіцієнти збудження та гамування. Таким чином, ми отримуємо представлення еволюції зміни фаз глобальних альвенових власних мод у радіальному напрямку при присутності явища збільшення перенесення енергії, яке, у свою чергу, є наслідком резонансної взаємодії частинок з цими модами.

Отже, використовуючи отримані рівності (43),(44) та (46), запишемо дискретизовану задачу (41) наступним чином:

$$\bar{\omega}^2 B \tilde{\Phi} = A \tilde{\Phi} - \Gamma \tilde{\Phi} \quad (47)$$

Тепер, покроково розберемо методику знаходження власних значень, а пізніше- і векторів.

Спершу, спростимо (47) так, щоб отримати звичний вигляд задачі на власні значення:

$$\bar{\omega}^2 \tilde{\Phi} = (A - \Gamma) B^{-1} \tilde{\Phi} \quad (48)$$

Далі, для зручності введемо наступне позначення $C = (A - \Gamma) B^{-1}$ (49) та запишемо наступну рівність:

$$\det(\bar{\omega}^2 I - C) = 0 \quad (50)$$

$$\det \left(\bar{\omega}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - C \right) = 0 \quad (51)$$

Розв'язуємо та отримуємо набір власних значень: $\bar{\omega}^2 = (\bar{\omega}^2_0, \dots, \bar{\omega}^2_{N-1})$

Знаходимо власний вектор для кожного власного значення:

$$(\bar{\omega}^2_j I - C) \tilde{\Phi}_j = 0; j = (0, 1, \dots, N - 1) \quad (52)$$

формуємо $\tilde{\Phi}_{N \times N}$, розставляючи отримані вектори по колонках:

$$\tilde{\Phi}_{N \times N} = \text{col}(\tilde{\Phi}_0, \dots, \tilde{\Phi}_{N-1}) \quad (53)$$

Використовуючи (4), обчислюємо дійсні значення потенціалу GAE у кожній точці сітки та записуємо їх у матрицю $\Phi_{N \times N}$ наступним чином:

$$\Phi_{i,j} = \Phi(r_{i,j}, \theta_{i,j}); \quad (54)$$

$$\Phi_{i,j} = \tilde{\Phi}_{i,j} \exp(im\theta) \quad (55)$$

Реалізація програми step-by-step

Розберемо імплементацію, що виконана на мовах C++ та Python з використанням бібліотек, таких як: **EigenC++** (для проведення обчислень власних векторів) та **MatPlotPlusPlus** (для відображення моделі) та парадигми проведення обчислень у багатопоточному режимі.

C++ частина нашої програми складається з файлу: main.cpp, де знаходиться функція, що запускає нашу симуляцію з еволюцією викривлення фаз GAE у радіальному напрямку нашої програми; заголовного файлу Utils.h з деклараціями сигнатур класів та функцій та Utils.cpp з їх реалізаціями, зокрема функція `CreateAdvancedModel` – створює моделювання поперечного перерізу тороїда з заданими параметрами та іншими допоміжними інструментами, що будуть розглянуті трохи згодом.

Python частина – це виконуваний файл `ContourExec.py` з функцією `show_contour`, яка відповідальна за графічне відображення отриманої моделі.

А зараз, детально покроково розберемо імплементацію `CreateAdvancedModel`:

```
void CreateAdvancedModel(double n, double nmod, double m, double gamma, double
alpha, double eps, double mu, double q0, double q1, double xp, double xm, double
delta){
    //Setup singleton
    Data::alpha=alpha;
    Data::gamma=gamma;
    Data::m=m;
    Data::nmod=nmod;
    Data::q0=q0;
    Data::q1=q1;
```

```

vector_1d rValues= linspace(0, 1, n + 1);
vector_2d Modes;
vector_1d rhoValues;
vector_1d kValues;
vector_1d GValues= G(rValues, delta, xp, xm,eps,mu);
double h=1./(n-1);
MatrixXcd B= GenerateB(n, rValues, rhoValues, h);
MatrixXcd A= GenerateA(n, rValues, kValues, h);
for(int j=0; j < A.diagonalSize(); ++j){
    A(j, j)-=dcomplex(0, Data::omega * GValues[j]);
}
MatrixXcd C=B.lu().solve(A);
ComplexEigenSolver<MatrixXcd> CESolver(C, true);
VectorXcd ComputedEigenValues=CESolver.eigenvalues();
MatrixXcd ComputedEigenVectors=CESolver.eigenvectors();
Data::omega=ComputedEigenValues[0].real();
NormalizeMatrix(ComputedEigenVectors);
assert(ComputedEigenValues.size()==ComputedEigenVectors.diagonalSize());
for(int i=0;i<ComputedEigenVectors.cols();++i){
    vector_1d Mode;
    VectorXcd EigenVector = ComputedEigenVectors(all, i);
    for (int j = 0; j < EigenVector.size(); ++j) {
        Mode.push_back(EigenVector[j].real());
    }
    Modes.push_back(Mode);
}
vector_1d SrFirst;
vector_1d SrSecond;
vector_1d rFirst;
vector_1d rSecond;
for(int i=0.5*ComputedEigenVectors.rows();i<
0.75*ComputedEigenVectors.rows();++i){
    SrFirst.push_back(std::pow(ComputedEigenVectors(i,0).real(),2)*GValues[i]);
    rFirst.push_back(rValues[i]);
}
for(int i=0.75*ComputedEigenVectors.rows();i<ComputedEigenVectors.rows();++i){
SrSecond.push_back(std::pow(ComputedEigenVectors(i,0).real(),2)*GValues[i]);
    rSecond.push_back(rValues[i]);
}
double IntegralSrFirst= IntegrateSimpson(rFirst,SrFirst);
double IntegralSrSecond= IntegrateSimpson(rSecond,SrSecond);
double BalanceCoefficient=std::abs(IntegralSrFirst)/std::abs(IntegralSrSecond);

std::string Output;
for(int i=0;i<ComputedEigenVectors.diagonalSize();++i){
Output+=std::to_string(ComputedEigenVectors(i,0).real())+', '+std::to_string(Comput
edEigenVectors(i,0).imag())+' ';
}
ofstream File("output.txt");
File<<Output;
File.close();

matplotlib::figure();
matplotlib::plot(rValues, Modes);
}

```

1. Спершу, потрібно задати сітку на заданому інтервалі $[a,b]$, тобто-набір точок $r = (r_0, \dots, r_{N+1})$, які ітераційно обчислюються наступним чином:

$$r_0 = a; r_{N+1} = b; h = \frac{(b - a)}{N}$$

$$r_j = jh; j = (1, \dots, N)$$

з використанням функції, яка приймає у якості аргументів інтервал та бажану кількість точок, а повертає об'єкт типу `std::vector<double>`, що являє собою множину числових значень:

```
const std::vector<double> linspace(double a, double b, size_t n) {
    std::vector<double> x(n);
    for (size_t i = 0; i < x.size(); ++i) {
        x[i] = a + static_cast<double>(i) * (b - a) /
                static_cast<double>(n - 1);
    }
    return x;
}
```

2. Застосовуючи рівності (43) та (44), за допомогою функцій `GenerateA` та `GenerateB`, генеруємо наші матриці тридіагональні матриці A та B . Вони приймають необхідні для створення параметри та повертають об'єкти типу `MatrixXcd`:

```
const MatrixXcd GenerateB(unsigned int n, const vector_1d& r, vector_1d& rho,
double h){
    MatrixXcd B(n - 1, n - 1);
    B.fill(0);
    for (int j = 0; j < B.diagonalSize(); ++j) {
        double rj=r[j+1];
        double rhoj= rho_func(rj);
        rho.push_back(rhoj);
        double prev_rj_half=0.5*(r[j]+rj);
        double next_rj_half=0.5*(r[j+2]+rj);
        if (j)B(j, j - 1) = -((1. / (h * h)) * prev_rj_half *
rho_func(prev_rj_half));
        B(j, j) = (Data::m * Data::m * rhoj) / (rj) + (1. / (h * h)) *
(next_rj_half * rho_func(next_rj_half) + prev_rj_half * rho_func(prev_rj_half));
        if (j < B.rows() - 1)B(j, j + 1) = -((1. / (h * h)) * next_rj_half *
rho_func(next_rj_half));
    }
    return B;
}
```

```

const MatrixXcd GenerateA(unsigned int n, const vector_1d& r, vector_1d& k,
double h){
    MatrixXcd A(n - 1, n - 1);
    A.fill(0);
    for(int j=0; j < A.diagonalSize(); ++j){
        double rj=r[j+1];
        double kj= k_func(rj);
        k.push_back(kj);
        double element=1./(h*h);
        double Sj= S_func(rj, kj);
        double prev_r_half=0.5*(r[j]+rj);
        double next_r_half=0.5*(r[j+2]+rj);
        double next_k_half=k_func(next_r_half);
        double prev_k_half=k_func(prev_r_half);
        double
Cj=prev_r_half*prev_k_half*prev_k_half+next_r_half*next_k_half*next_k_half;
        if (j) A(j, j - 1)= -element * prev_r_half * prev_k_half * prev_k_half;
        A(j, j)= Sj + (element * Cj);
        if (j < A.rows() - 1) A(j, j + 1)= -element * next_r_half * next_k_half *
next_k_half;
    }
    return A;
}

MatrixXcd B= GenerateB(n, r rValues, & rhoValues, h);
MatrixXcd A= GenerateA(n, r rValues, & kValues, h);

```

3. Знаходимо значення функції $G(x)$ в кожній точці сітки використовуючи (34):

```

template <class T>
const std::vector<T> G(const std::vector<T>& vector, double delta, double xp,
double xm,double eps,double mu) {
    const unsigned int size = vector.size();
    std::vector<T> temp(size);
    for (int i = 0; i < size; ++i) {
        temp[i] = ( (eps*exp(-1 * (((vector[i] - xp) * (vector[i] - xp)) / (delta
* delta))))
- (mu* exp(-1 * (((vector[i] - xm) * (vector[i] - xm)) / (delta *
delta))))));
    }
    return temp;
}

vector_1d GValues= G( vector: rValues, delta, xp, xm,eps,mu);

```

4. Опираючись на формулу (47), виконуємо віднімання від матриці A матриці Γ :

```

for(int j=0; j < A.diagonalSize(); ++j){
    A( row: j, col: j)-=dcomplex( r: 0, i: Data::omega * GValues[j]);
}

```

5. Далі, переходимо до розв'язку задачі та знаходження власних значень та векторів. Обчислюємо матрицю C за формулою (49):

```
MatrixXcd C=B.lu().solve( b: A);
```

6. Тоді, щоб виконати обрахунки (50) - (53) використаємо об'єкт класу `ComplexEigenSolver`, у конструктор якого необхідно передати матрицю, яку ми обчислили у попередньому кроці:

```
ComplexEigenSolver<MatrixXcd> CESolver( matrix: C, computeEigenvectors: true);
```

Та за допомогою методів-селекторів `eigenvalues()` та `eigenvectors()`, отримаємо обчислені власні значення та вектори:

```
VectorXcd ComputedEigenValues=CESolver.eigenvalues();  
MatrixXcd ComputedEigenVectors=CESolver.eigenvectors();
```

і проведемо їх нормування, застосувавши функцію `NormalizeMatrix`, яка як аргумент приймає відсилку на матрицю з ними:

```
void NormalizeMatrix(MatrixXcd& matrix){  
    for(int i=0;i<matrix.cols();++i){  
        std::complex<double> max = ::max(matrix, i);  
        std::complex<double> factor = std::conj(max) / std::abs(max);  
        for(int j=0;j<matrix.rows();++j){  
            matrix(j,i)*=factor;  
        }  
    }  
}  
  
NormalizeMatrix( &: ComputedEigenVectors);
```

7. Отже, `ComputedEigenVectors` – це отримана матриця комплексних скалярних потенціалів альєнових власних мод. Створюємо матрицю дійсних значень, та заповнюємо її їх дійсними частинами. Вона нам потрібна для подальшого застосуванні у відображенні графіків $\tilde{\Phi}(r)$ з ціллю проведення аналізу:

```

for(int i=0;i<ComputedEigenVectors.cols();++i){
    vector_1d Mode;
    VectorXcd EigenVector = ComputedEigenVectors( rowIndices: all, colIndices: i);
    for (int j = 0; j < EigenVector.size(); ++j) {
        Mode.push_back(EigenVector[j].real());
    }
    Modes.push_back(Mode);
}

```

8. Для проведення аналізу балансу енергії, обчислюємо середнє за часом погонне джерело енергії $S(r)$ за формулою (38):

```

vector_1d SrFirst;
vector_1d SrSecond;
vector_1d rFirst;
vector_1d rSecond;
for(int i=0.5*ComputedEigenVectors.rows();i< 0.75*ComputedEigenVectors.rows();++i){
    SrFirst.push_back(ComputedEigenVectors( row: i, col: 0).real()*GValues[i]);
    rFirst.push_back(rValues[i]);
}
for(int i=0.75*ComputedEigenVectors.rows();i<ComputedEigenVectors.rows();++i){
    SrSecond.push_back(ComputedEigenVectors( row: i, col: 0).real()*GValues[i]);
    rSecond.push_back(rValues[i]);
}

```

Розраховуємо інтеграли (40), де $r_1 = 0.5$; $r_2 = 0.75$; $r_3 = 1$, використовуючи числовий метод інтегрування Сімпсона, який імплементований у функції `IntegrateSimpson`:

```

double IntegrateSimpson(const std::vector<double>& x, const std::vector<double>&
y) {
    double integral = 0.;
    for (int i = 0; i < x.size() - 1; ++i) {
        integral += (x[i + 1] - x[i]) / 6.0 * (y[i] + 4 * (y[i] + y[i + 1]) / 2.0
+ y[i + 1]);
    }
    return integral;
}

double IntegralSrFirst= IntegrateSimpson( x: rFirst, y: SrFirst);
double IntegralSrSecond= IntegrateSimpson( x: rSecond, y: SrSecond);

```

Отримавши їх числові значення, обчислюємо коефіцієнт балансу:

```

double BalanceCoefficient=std::abs( x: IntegralSrFirst)/std::abs( x: IntegralSrSecond);

```

9. На завершення C++ частини програми, виконуємо запис отриманої у кроці 6 матриці комплексних скалярних потенціалів у файл для

подальшого використання у кроці, де реалізовується механізм відображення поперечного перерізу тороїда за допомогою контура.

10.Зрештою, розглянемо тіло функції main, яка є вхідною точкою нашої програми. Саме в ній розкривається використання багатопоточності для проведення обчислення декількох моделей водночас з ціллю зменшення часу опрацювання всього експерименту з певною еволюцією параметрів збудження та гамування:

```
int main() {
    double eps = 2;
    double mu = 2;
    CreateAdvancedModel(500, 1, 12, 2, 0.6837722340,eps,mu, 1,
2,0.7,0.82,0.02);
    DispatchQueue<void> TaskManager;
    for(int i=0;i<5;++i){
        auto Task=std::async(CreateAdvancedModel,500, 1, 12, 2,
0.6837722340,eps+eps/100*8*i,mu+mu/100*8*i, 1, 2,0.1,0.7,0.02);
        TaskManager.push(Task);
    }
    TaskManager.wait();
    matplotlib::show();
    return 0;
}
```

Тобто, наші коефіцієнти драйвінгу та демпінгу для кожного наступного проведення обчислень збільшуються на 4%. На мою думку, цього більш ніж достатньо, для отримання плавного викривлення фаз глобальних власних альвенових мод у радіальному напрямку.

11.Тепер розберемо Python частину з функцією show_contour:

```
f=open("output.txt", "r")
def show_contour():
    values =f.readline().split(" ")
    values.pop()
    complex_values=[pair.split(",") for pair in values]
    F_scalar=[complex(float(complex_value[0]),float(complex_value[1]))
for complex_value in complex_values]
    n_radii = len(values)
    rad = np.linspace(0, 1, n_radii)
    angles = np.linspace(0, 2 * np.pi, n_radii, endpoint=False)
    angles = np.repeat(angles[...], np.newaxis, n_radii, axis=1)
    angles[:, 1::2] += np.pi / n_radii
```

```

X = (rad * np.cos(angles)).flatten()
Y = (rad * np.sin(angles)).flatten()
F=(F_scalar*np.exp(complex(0,1)*m*angles))
F=F.real
F = F.flatten()
triangulated = tri.Triangulation(X, Y)
plt.tricontourf(triangulated, F)
plt.show()

```

show_contour()

Тут ми зчитуємо раніше отриману матрицю $\tilde{\Phi}$ з файлу, обчислюємо Φ застосовуючи рівність (55) та виконуємо перехід з сферичних в декартові координати для сіток: з r та θ в x та y :

$$\begin{aligned}
 x &= r * \cos(\theta) \\
 y &= r * \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Потім виконуємо триангуляцію для отримання сітки трикутників, та використовуємо її для побудови контурного представлення.

Частина 3

Аналіз отриманих результатів

Проведення аналізу отриманих результатів експерименту №1 Було проведено експеримент з заданою сіткою розмірності $N=500$, а отже крок її дорівнював $h = \frac{1}{500} = 0.002$. Також, були задані наступні значення параметрів: $\alpha = 0.6838$, профілі плазми $q_0 = 1$ та $q_1 = 2$, $\gamma = 2$, точки центру зон збудження і поглинання, відповідно $x_+ = 0.7$ і $x_- = 0.82$, ширина збудження моди $\Delta = 0.02$, $m=12$, $n=1$. Таким чином, у рамках нього було виконано серію моделювань, де коефіцієнти ε та μ змінюються за такими законами:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + 8 \times i \times \frac{\varepsilon_0}{100} \quad (56)$$

$$\mu_i = \mu_0 + 8 \times i \times \frac{\mu_0}{100} \quad (57)$$

$$i = (0, 1, \dots, 4)$$

де i – це номер дослідження у серії; $\mu_0 = 2.29$ та $\varepsilon_0 = 1.97$ – початкові значення драйвінгу та демпінгу.

Перейдемо до обробки результатів. Спершу, проаналізуємо баланс енергії у першій моді використовуючи раніше виведені рівності (37)-(40) та розглянемо отриманий графік (Рис. 5):

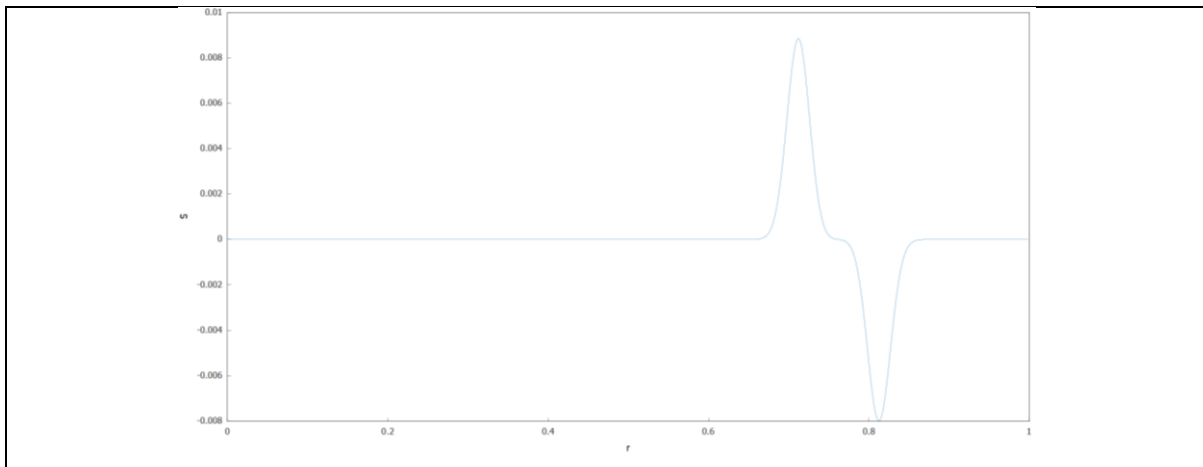


Рис. 5 Графік залежності середнього за часом погонного джерела енергії від координати $S(r)$

Обчисливши інтеграли (40), ми довели, що площі під цими двома кривими рівні, а отже баланс енергії не порушено і закон збереження енергії справджується.

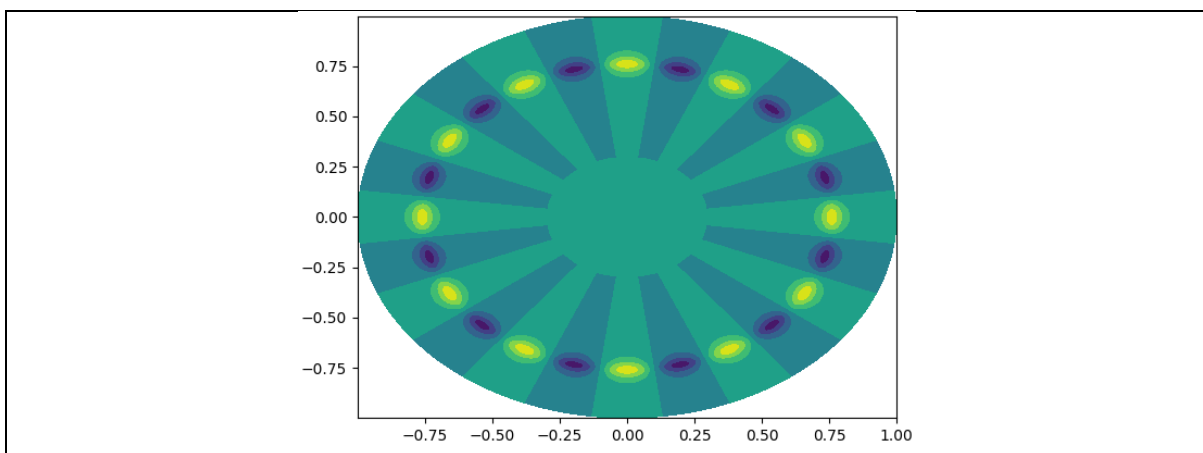


Рис. 6 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда без їх викривлення фаз

Як раніше згадувалось, використовуючи формулу (55), ми розраховуємо числові значення потенціалу альвенових мод у кожній точці сітки та отримуємо контурне представлення поперечного перерізу тороїда. Варто зазначити, як ми бачимо на (Рис. 6) у цій моделі, яка не входить в основну серію досліджень, немає викривлення через відсутність збудження, адже її головне призначення – це обчислити частоту мод, яка, у свою чергу, застосовується у додаванні збудження (46) для наступної моделі у головній серії.

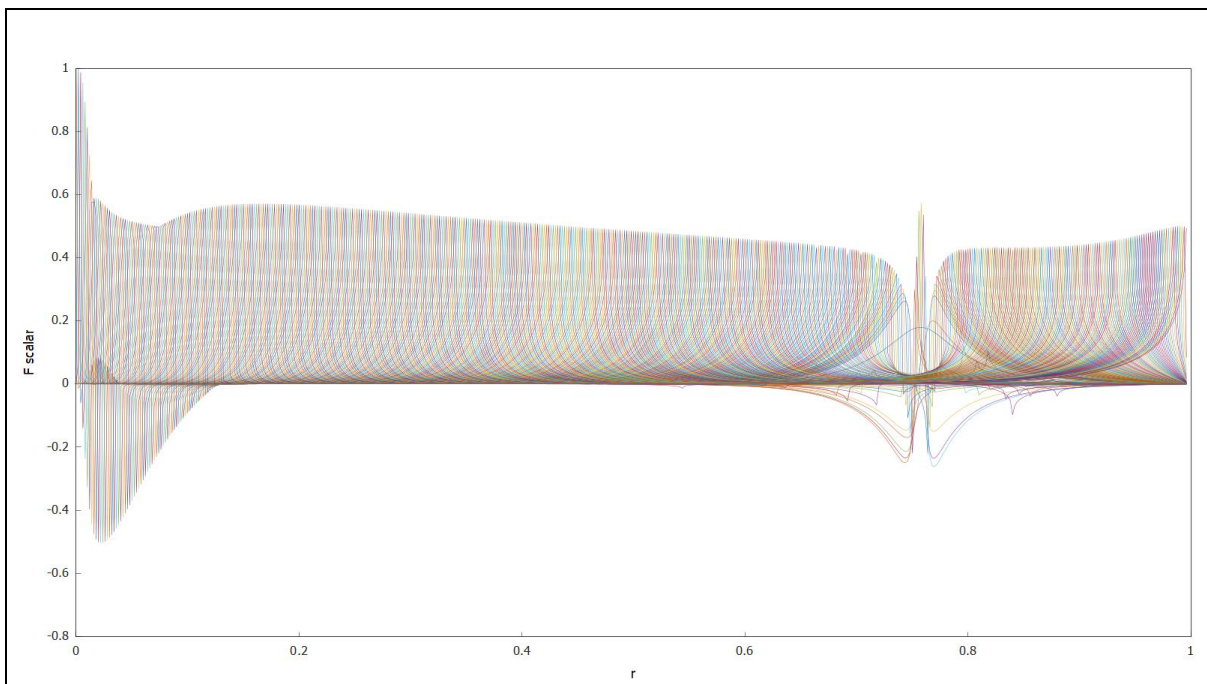
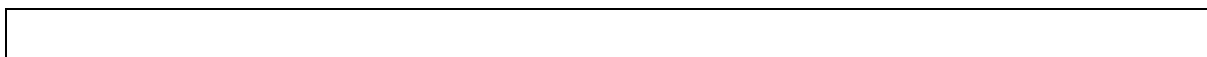


Рис. 7 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод без драйвину та демпінгу

У дослідженні $i=0$, результатом якого є отримана модель (Рис. 8), вже враховується фактор збудження і поглинання, і як наслідок, ми спостерігаємо виникнення викривлення фаз глобальних власних альвенових мод у радіальному напрямку.



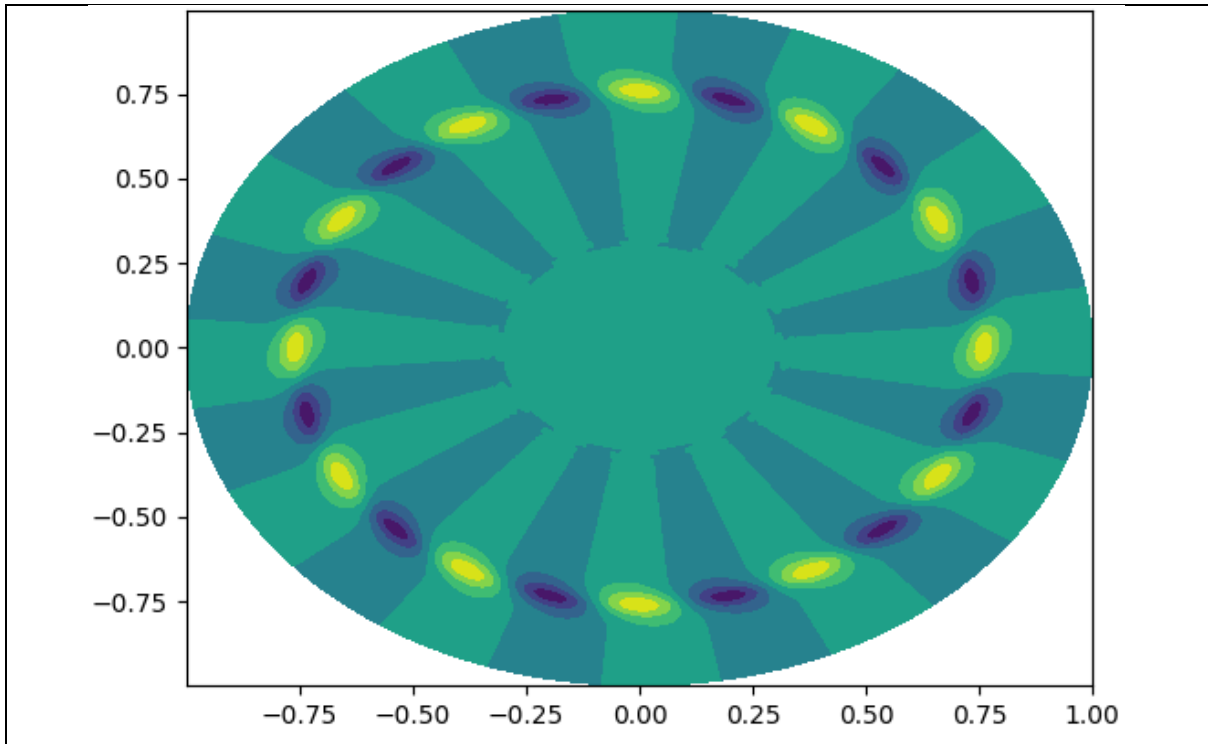


Рис. 8 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при ϵ_0 та μ_0 з викривленням фаз у радіальному напрямку

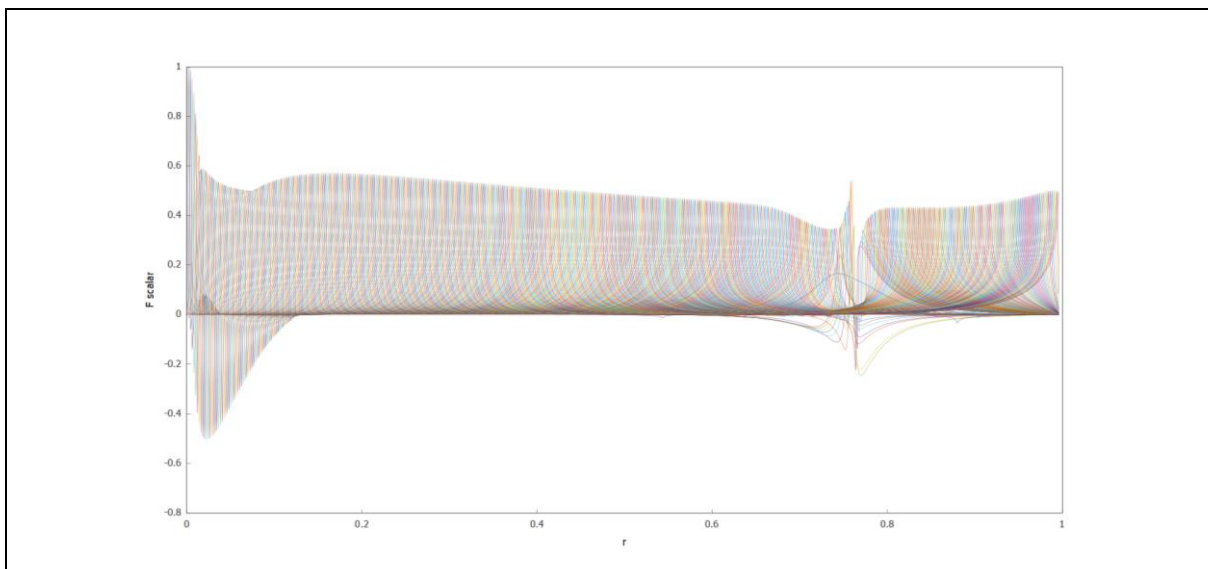


Рис. 9 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод при ϵ_0 та μ_0

Тепер, поглянемо на результати моделювання $i=1$:

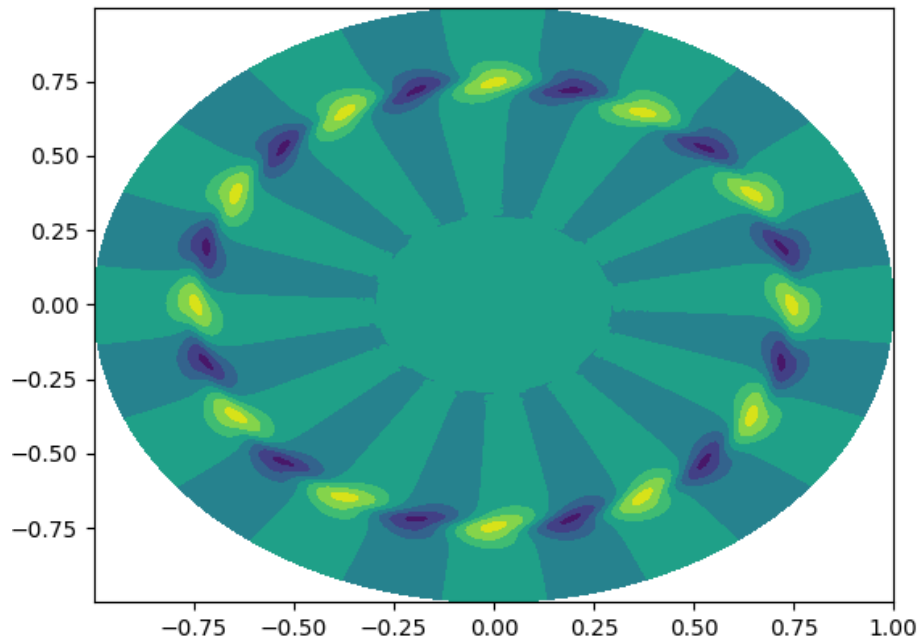


Рис. 10 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ε та μ на 8% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

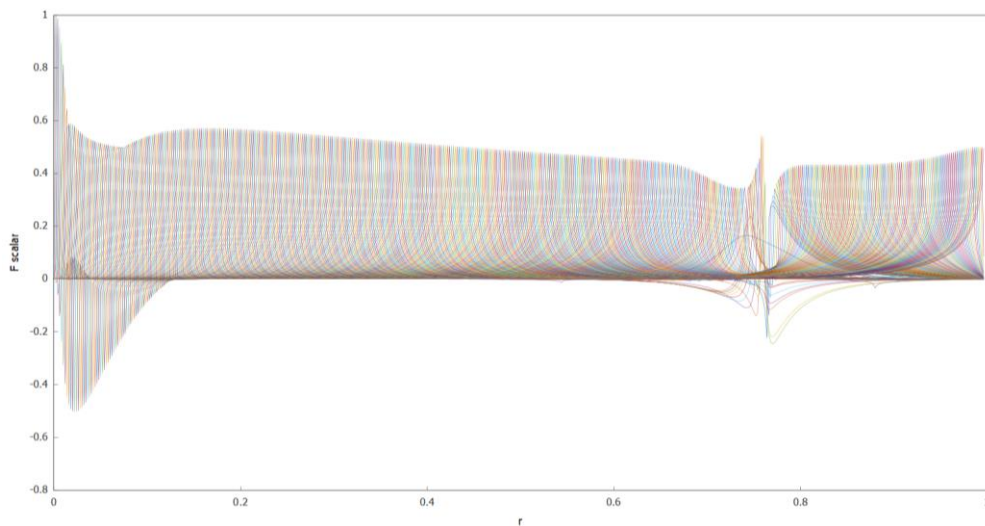


Рис. 11 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ε та μ на 8% від початкових значень

$i=2$:

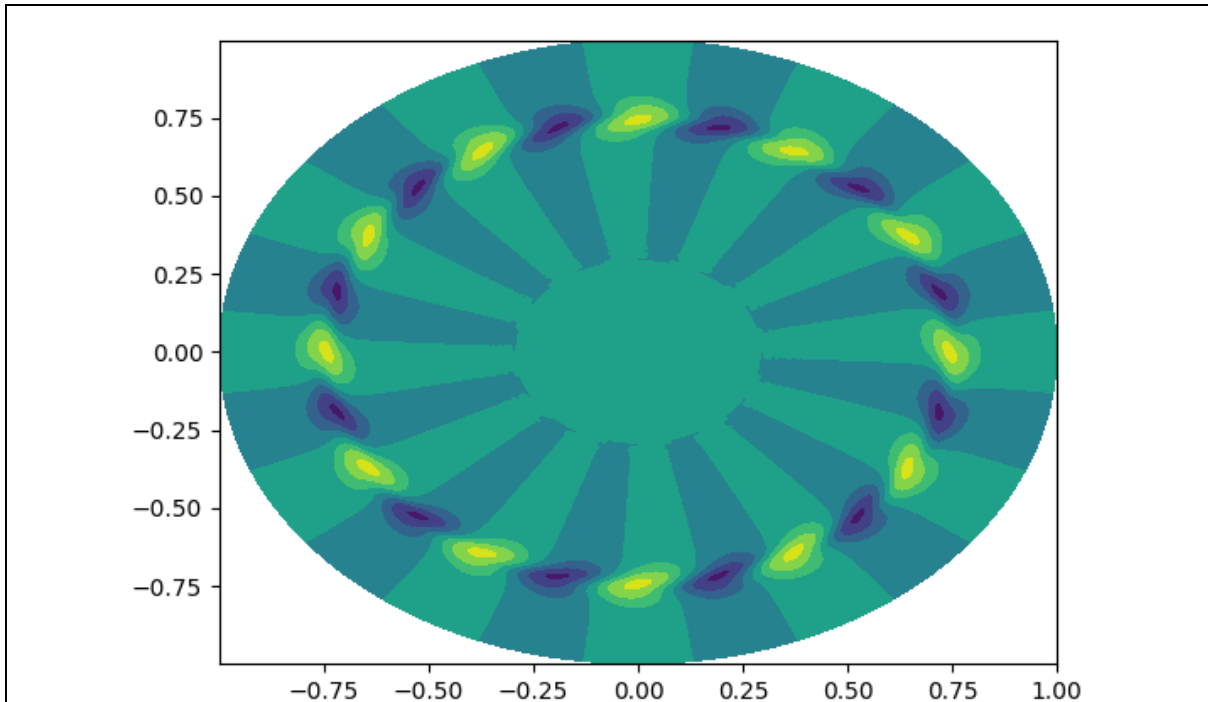


Рис. 12 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 16% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

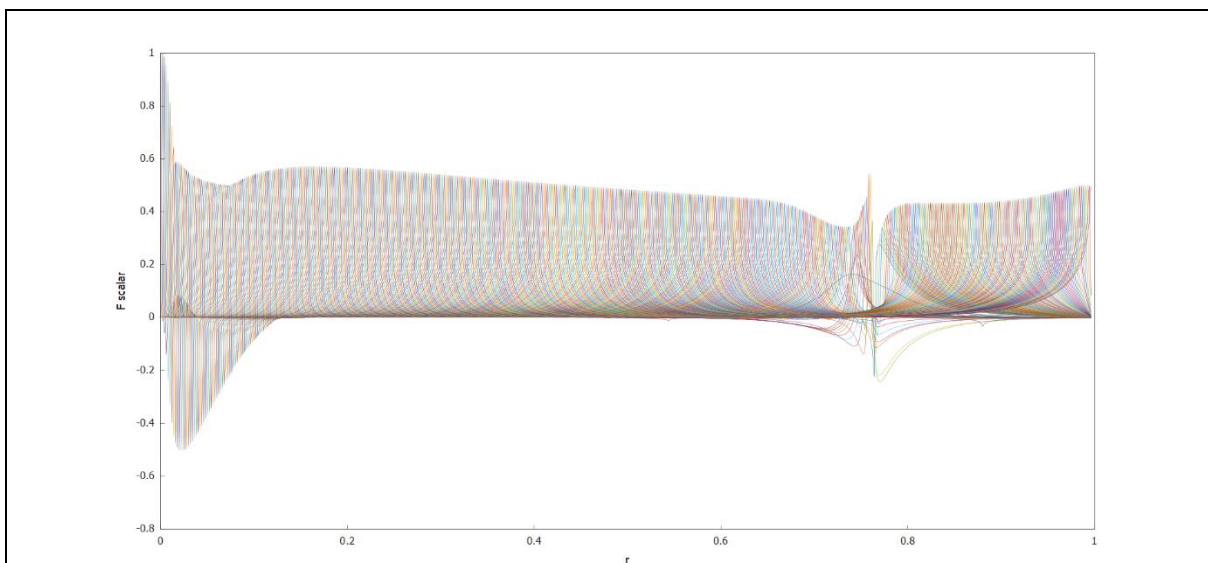


Рис. 13 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 16% від початкових значень

$i=3$:

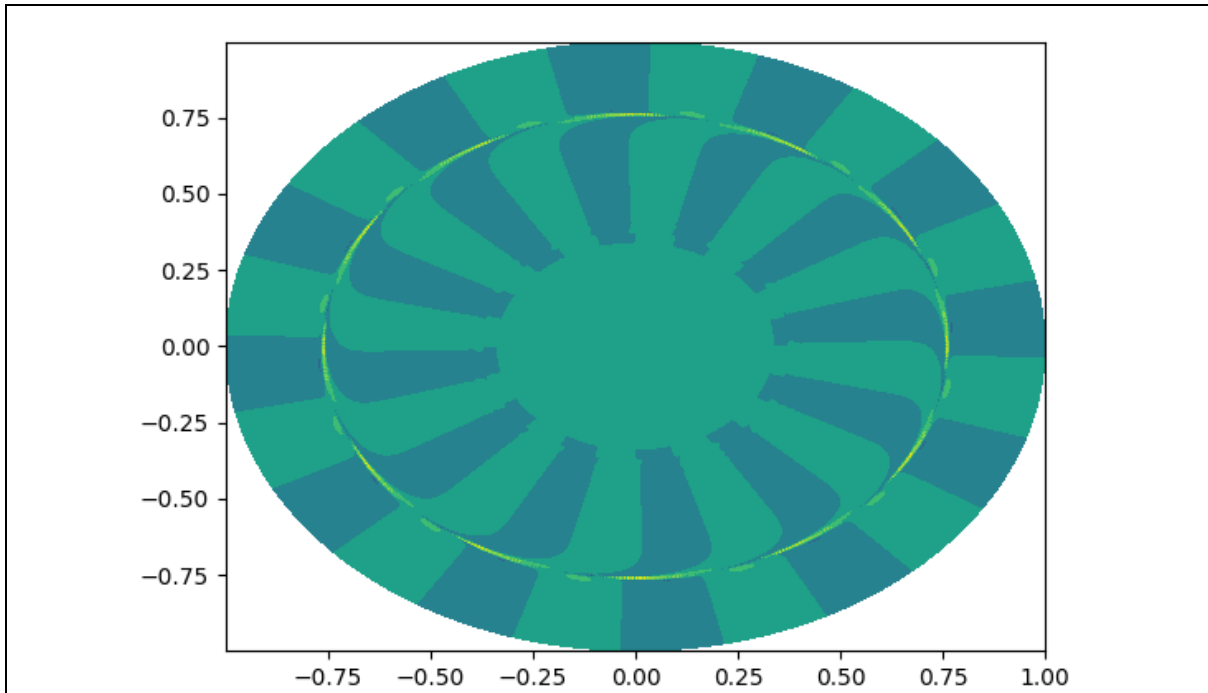


Рис. 14 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі торіа при збільшенні параметрів ϵ та μ на 24% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

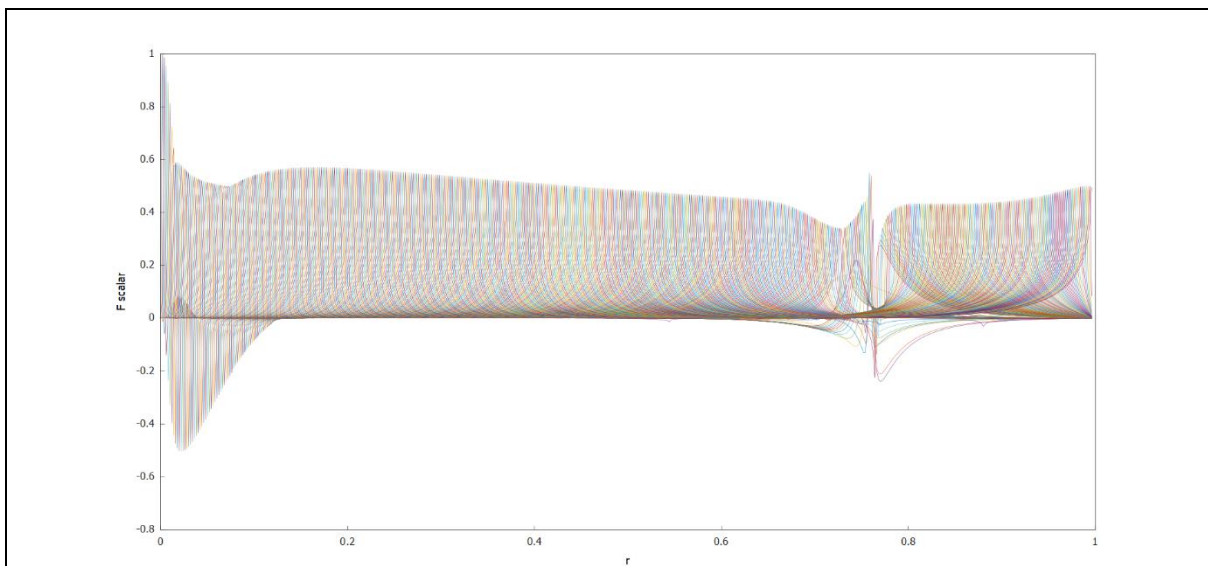
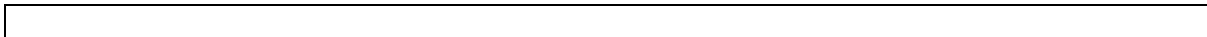


Рис. 15 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 24% від початкових значень

$i=4$:



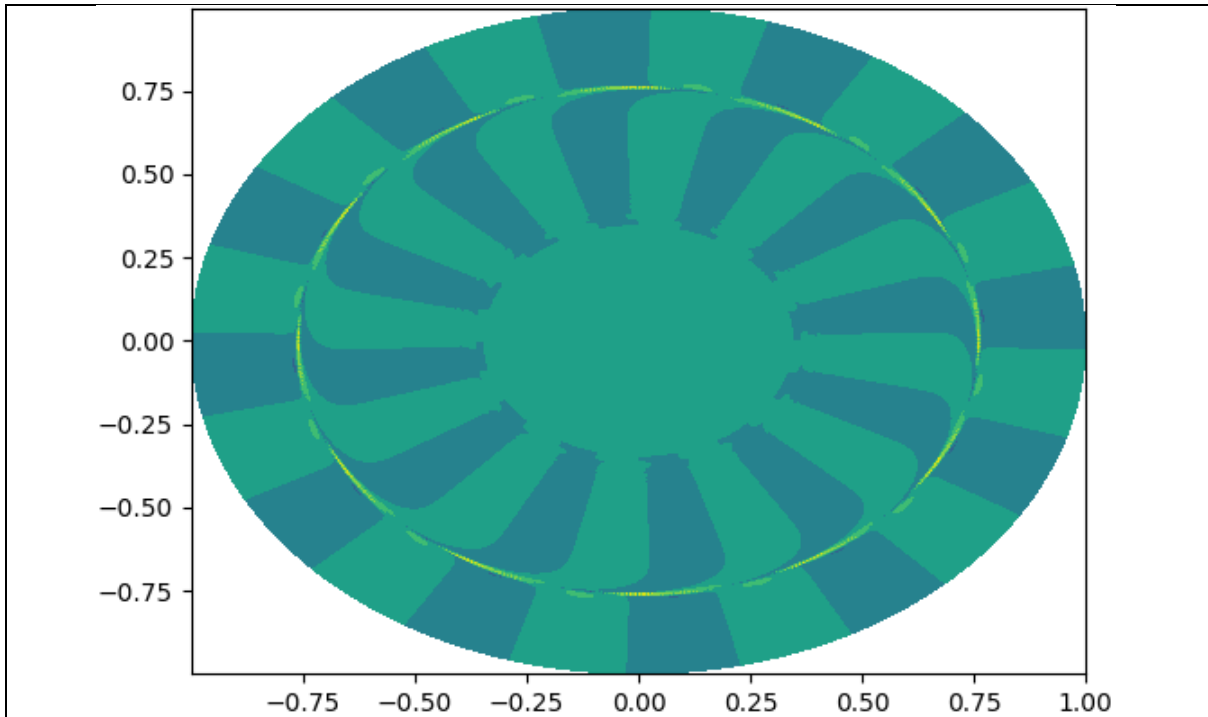


Рис. 16 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 32% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

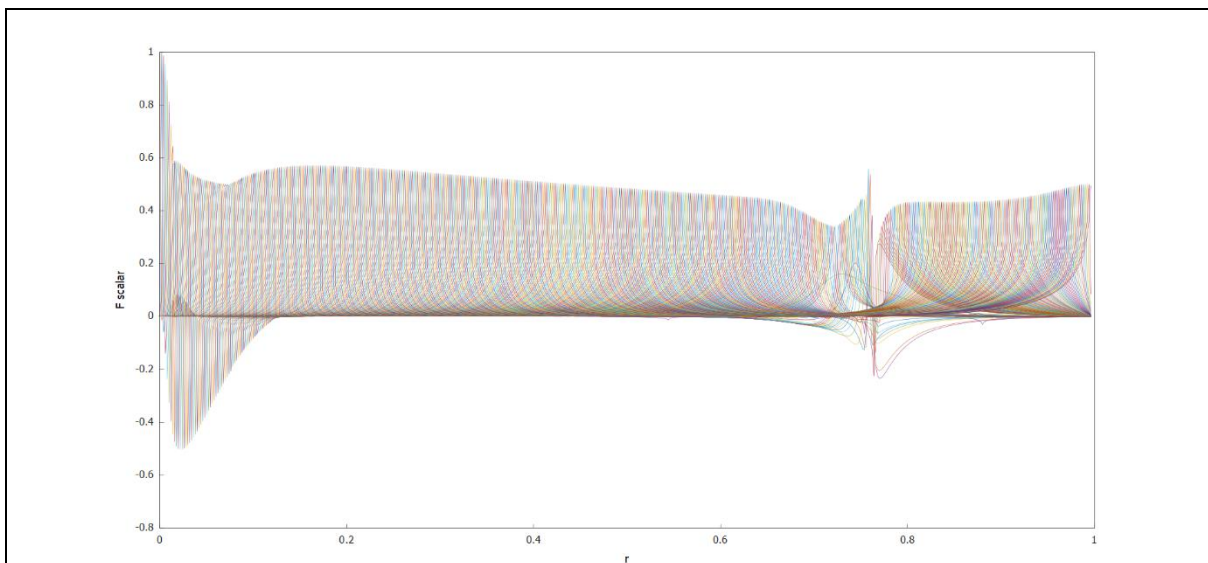


Рис. 17 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 24% від початкових значень

Перейдемо до аналізу отриманих результатів. На (Рис. 8) порівняно з (Рис. 6) з'явилося деформація фаз у радіальному напрямку. Зміни також помітні

на графіках $\tilde{\Phi}(r)$, наприклад на (Рис. 9) у точці $r \approx 0.78$, де знаходиться континуум, виникає дизбаланс значень скалярних потенціалів, який, у свою чергу, є наслідком збільшення перенесення енергії модами.

На (Рис. 10) ми бачимо, що зі збільшенням драйвінгу та демпінгу на 8%, викривлення теж посилюється та зростає дизбаланс (Рис. 11). А от на (Рис. 12) та (Рис. 13), де параметри ε та μ були більші на 16% від початкових, зміни незначні порівняно з попереднім дослідом. Надалі, якщо поглянемо на дослід під номером $i=3$, на (Рис. 14) деформація стала надзвичайно сильною, а на (Рис. 15) у зоні континуума спостерігається поява мод з дивною поведінкою і дизбаланс теж збільшується. Далі, у наступному моделюванні, знову зміни не спостерігаються: викривлення фаз залишається таким же (Рис. 16), моди не зазнають змін (Рис. 17).

Натомість, варто зазначити, що якщо продовжувати збільшення збудження та поглинання, то у всіх наступних отриманих моделях ніяких змін порівняно з (Рис. 16) не відбувається. Таким чином, ми змогли довести, що при збільшенні драйвінгу та демпінгу, а як наслідок, збільшенні перенесення енергії з'являється викривлення фаз глобальних альвенових власних мод у їх радіальному напрямку.

Проведення аналізу отриманих результатів експерименту №2

Тепер, проведемо експеримент з заданою сіткою $N=250$, відповідно крок $h = \frac{1}{250} = 0.004$ та з наступними значеннями параметрів: $\alpha = 0.6838$, профілі плазми $q_0 = 4$ та $q_1 = 3$, $\gamma = 2$, точки центру зон збудження і поглинання, відповідно $x_+ = 0.7$ і $x_- = 0.82$, ширина збудження моди $\Delta = 0.06$, $m=5$, $n=2$, $\mu_0 = 2.35$ та $\varepsilon_0 = 1.67$, які змінюються в досліді за наступним законом:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + 6 \times i \times \frac{\varepsilon_0}{100} \quad (58)$$

$$\mu_i = \mu_0 + 6 \times i \times \frac{\mu_0}{100} \quad (59)$$

$$i = (0, 1, \dots, 4)$$

Аналогічно попередньому експерименту, спершу, створюється модель без врахування збудження та поглинання, за допомогою якої обчислюється частота, що застосовується у наступних моделях.

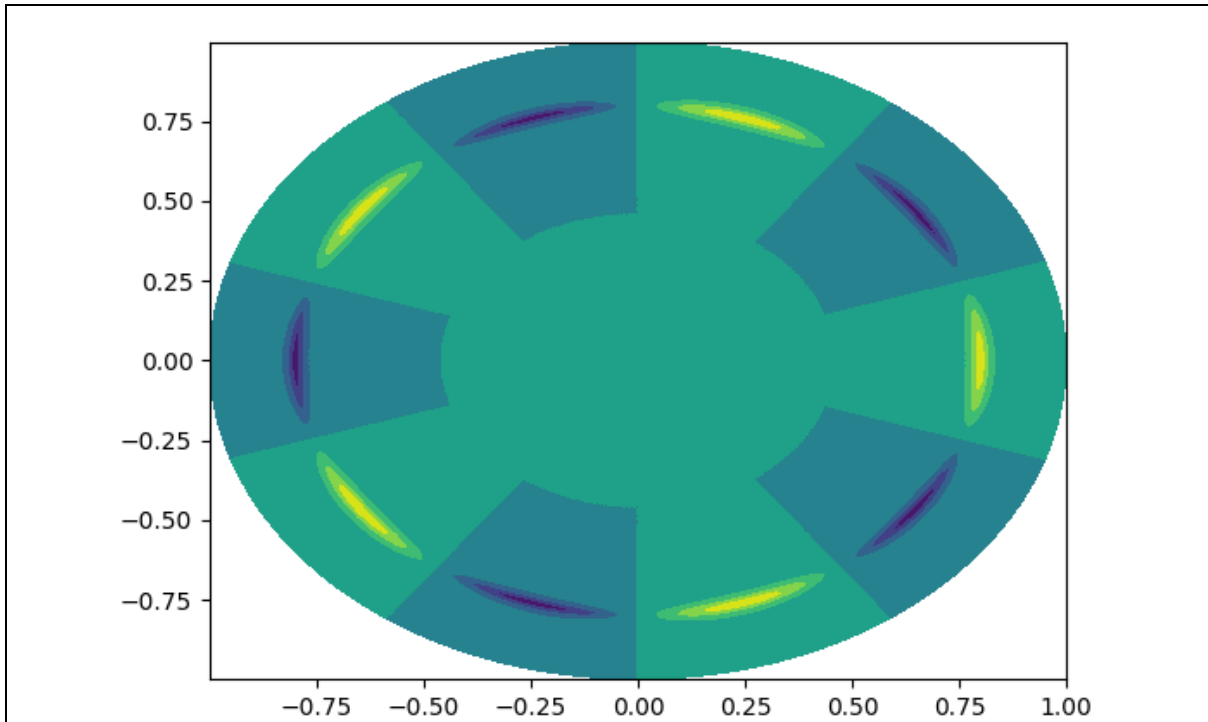


Рис. 18 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда без їх викривлення фаз

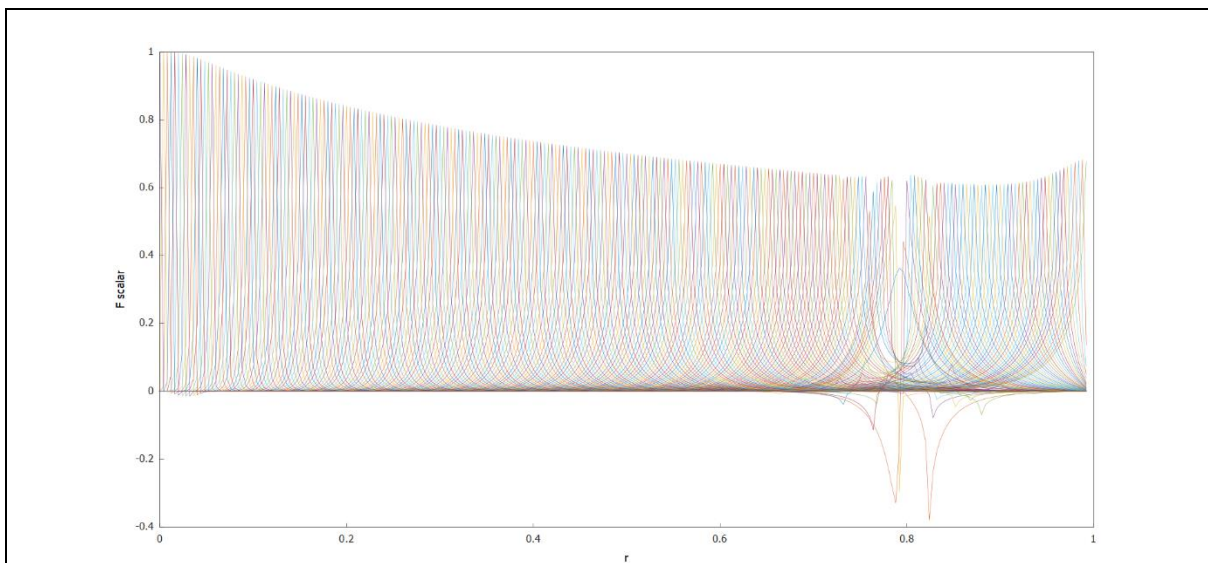
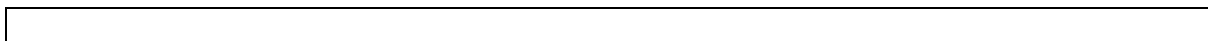


Рис. 19 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод без драйвину та демпінгу

Поглянемо на результати досліді $i=0$, де починається враховуватись фактор драйвину та демпінгу:



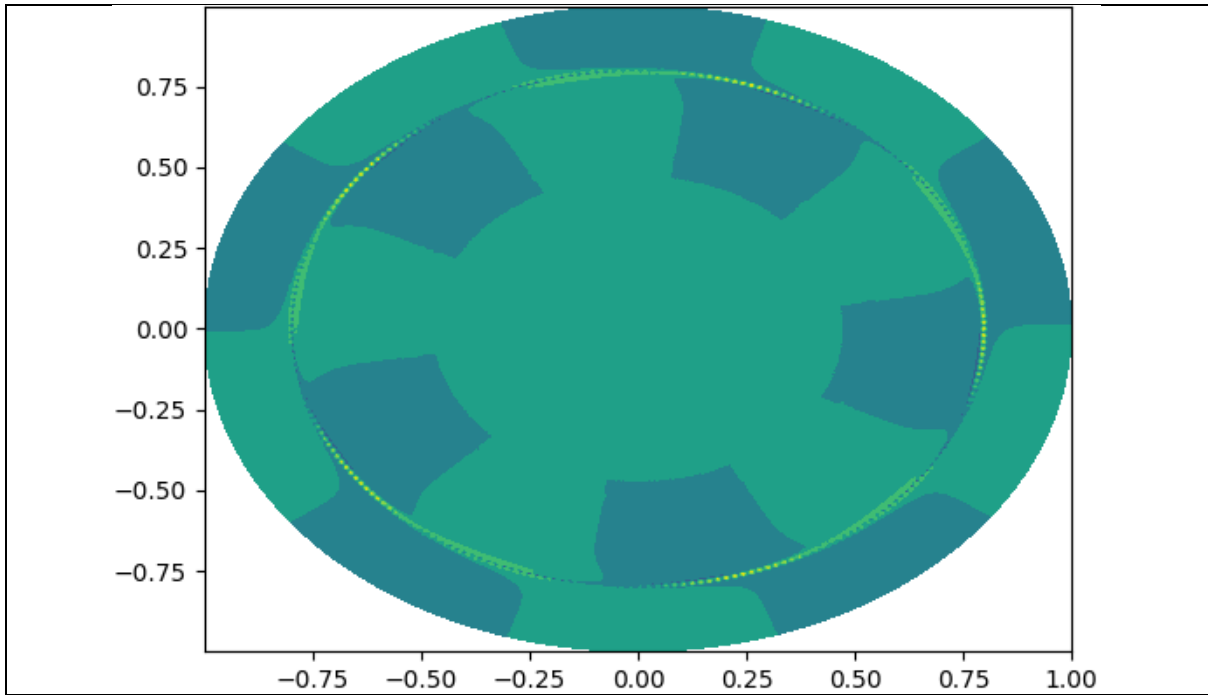


Рис. 20 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при ϵ_0 та μ_0 з викривленням фаз у радіальному напрямку

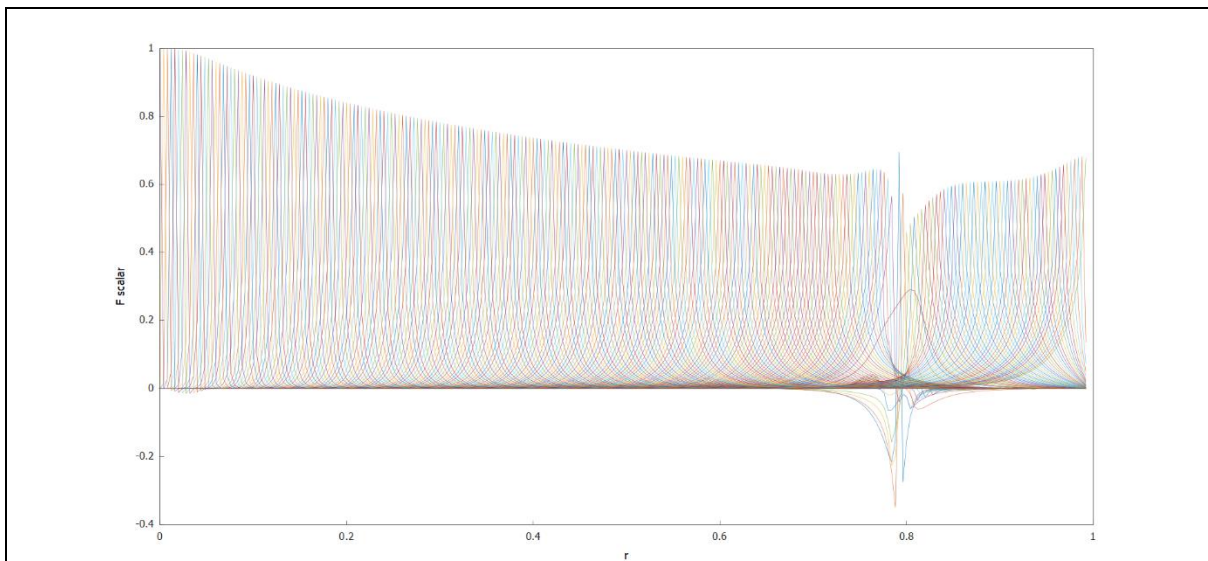
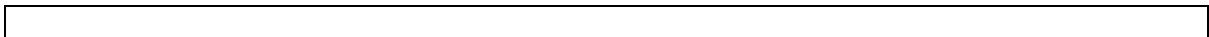


Рис. 21 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод при ϵ_0 та μ_0

$i=1$:



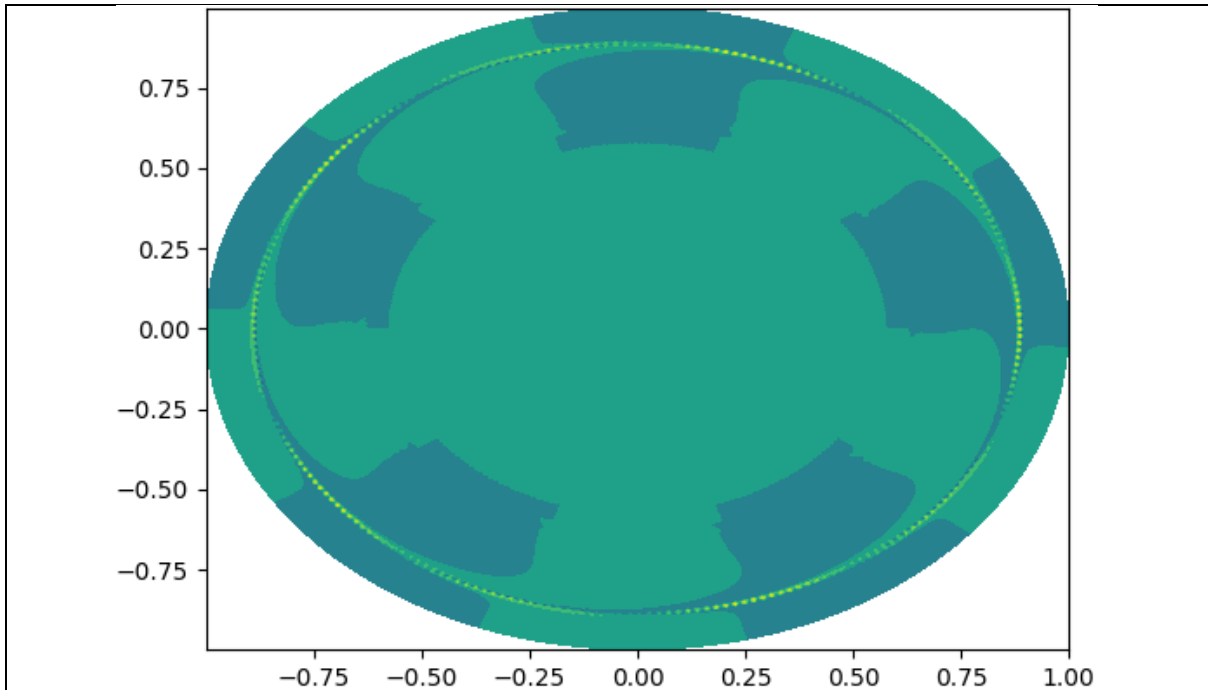


Рис. 22 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 6% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

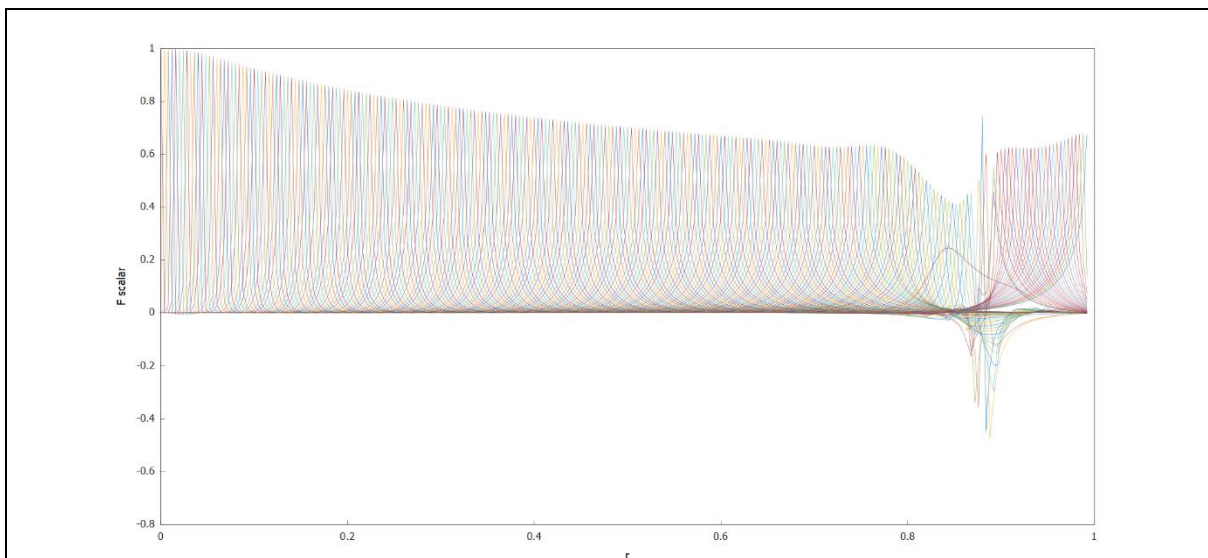
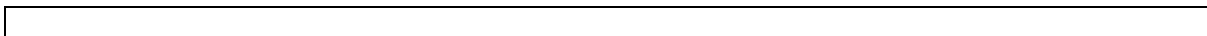


Рис. 23 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 6% від початкових значень

$i=2$:



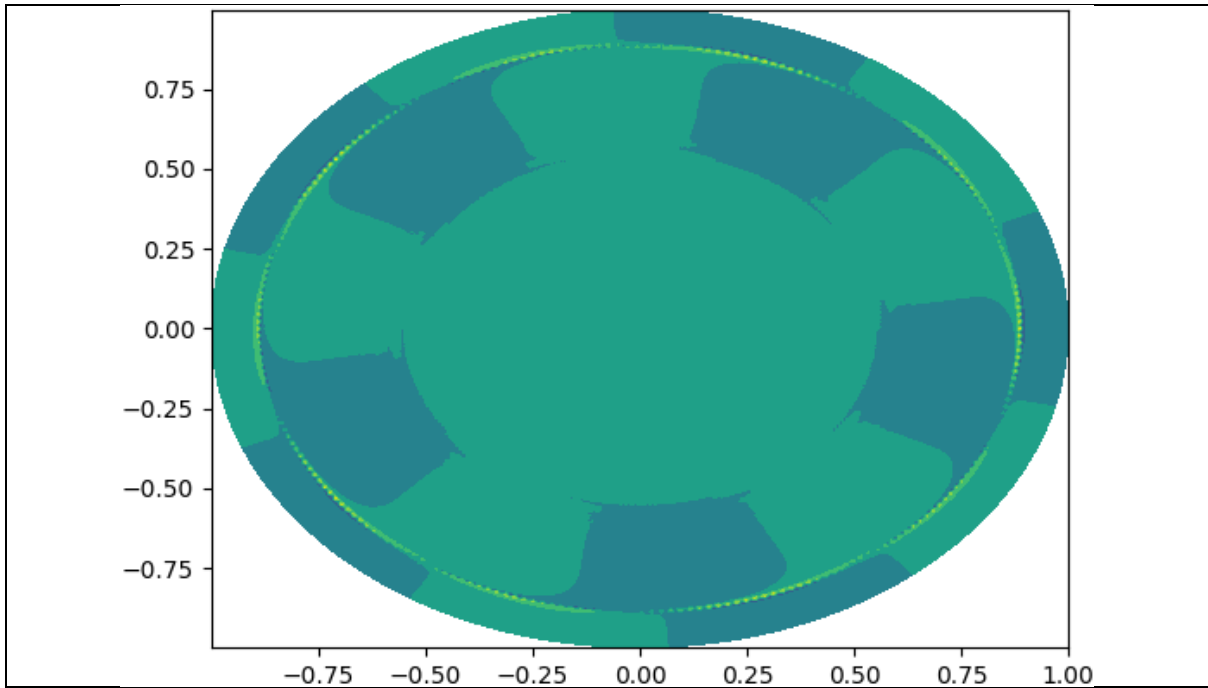


Рис. 24 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 12% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

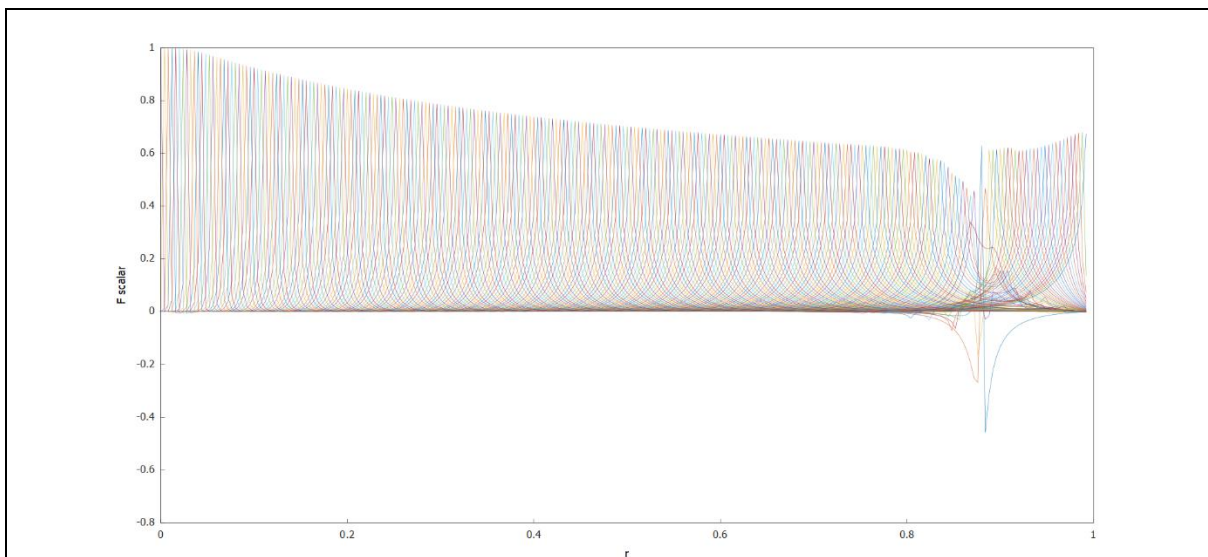
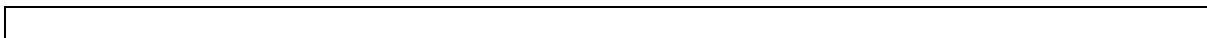


Рис. 25 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 12% від початкових значень

$i=3$:



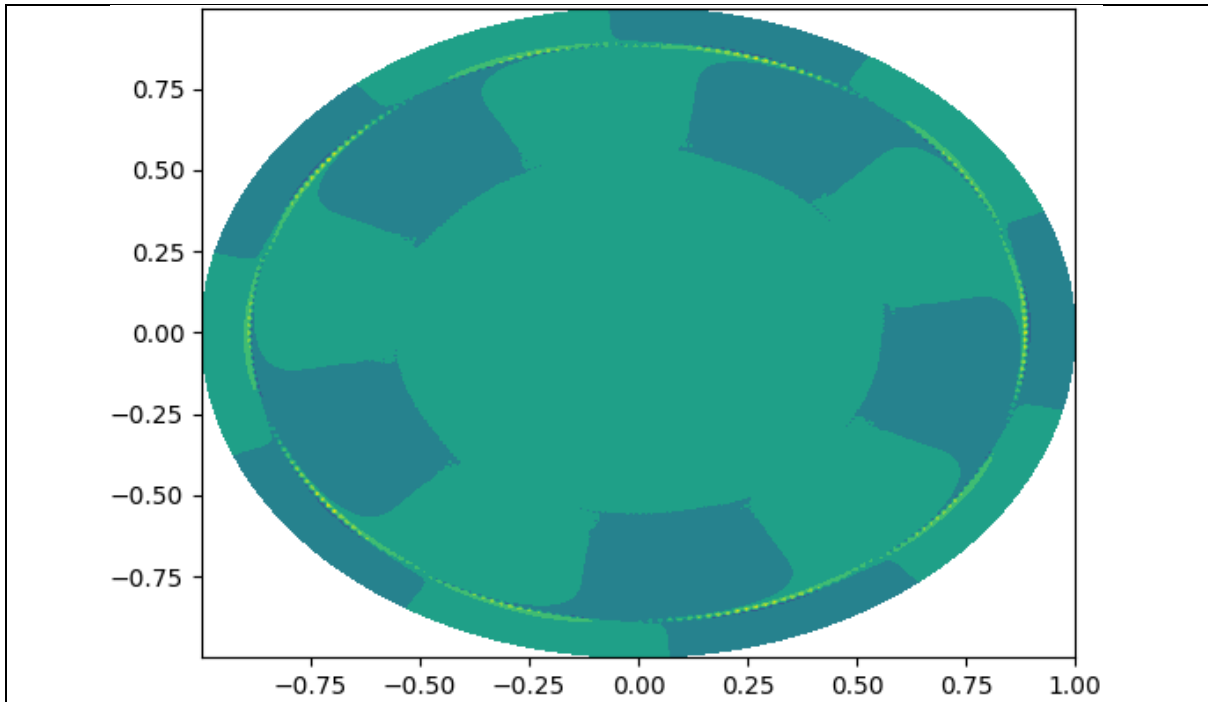


Рис. 26 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 18% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

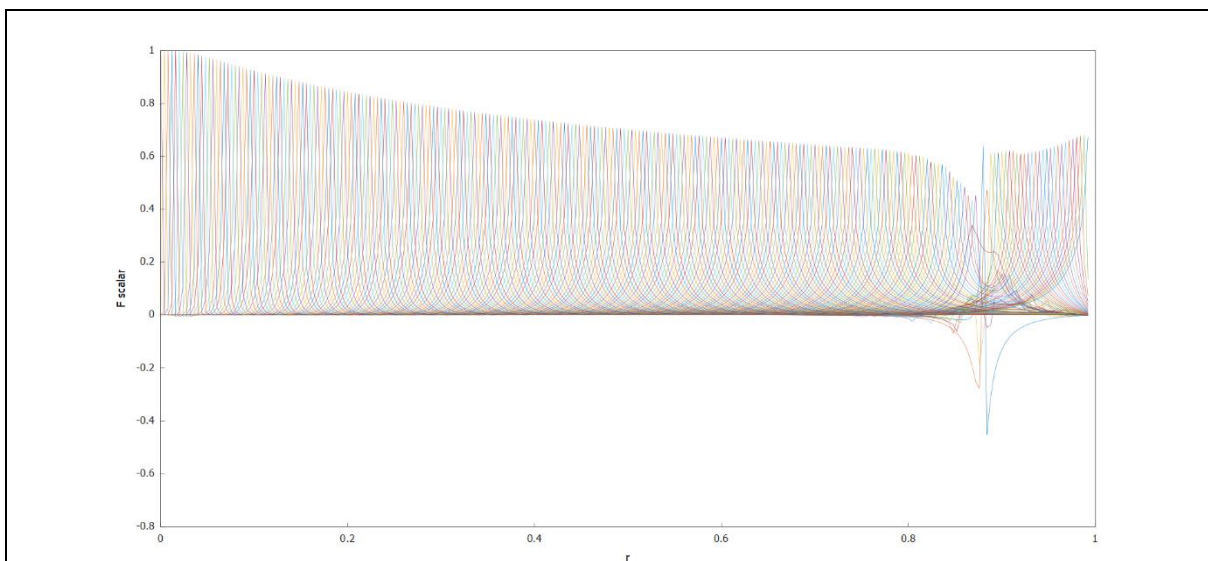
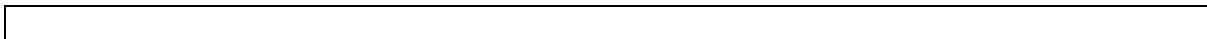


Рис. 27 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 12% від початкових значень

$i=4$:



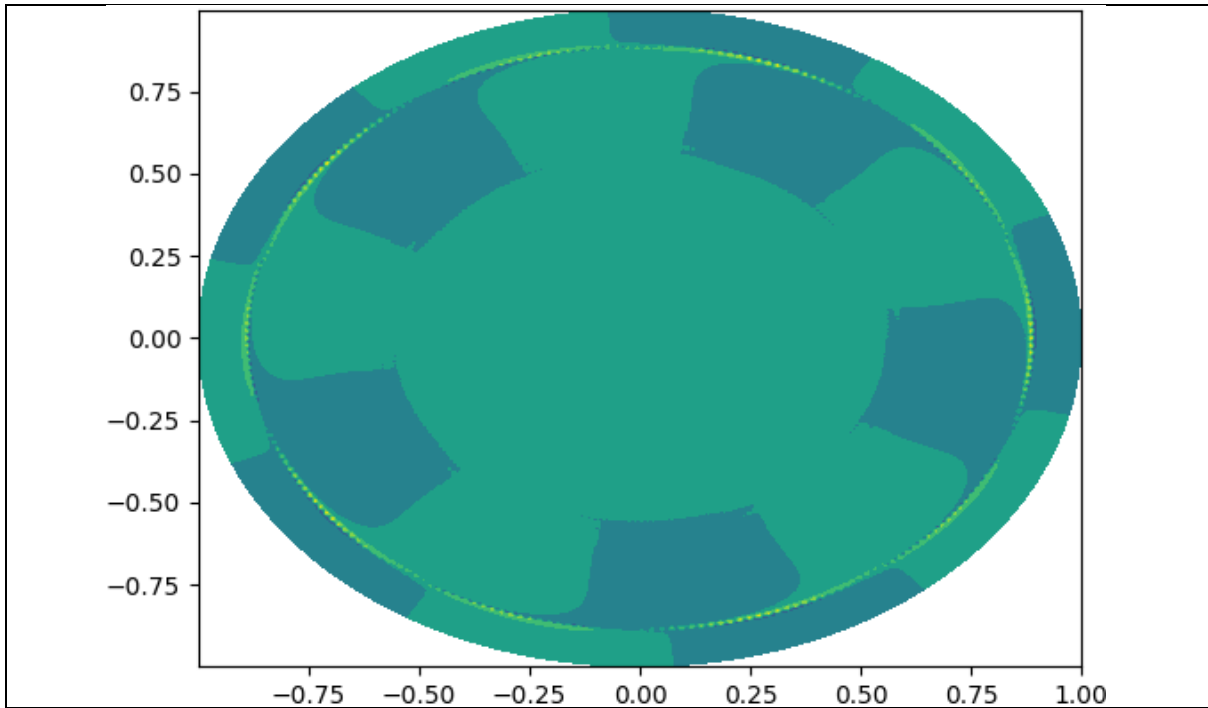


Рис. 28 Отримана модель розподілу потенціалів GAE в поперечному перерізі тороїда при збільшенні параметрів ϵ та μ на 24% від початкових значень з викривленням фаз у радіальному напрямку

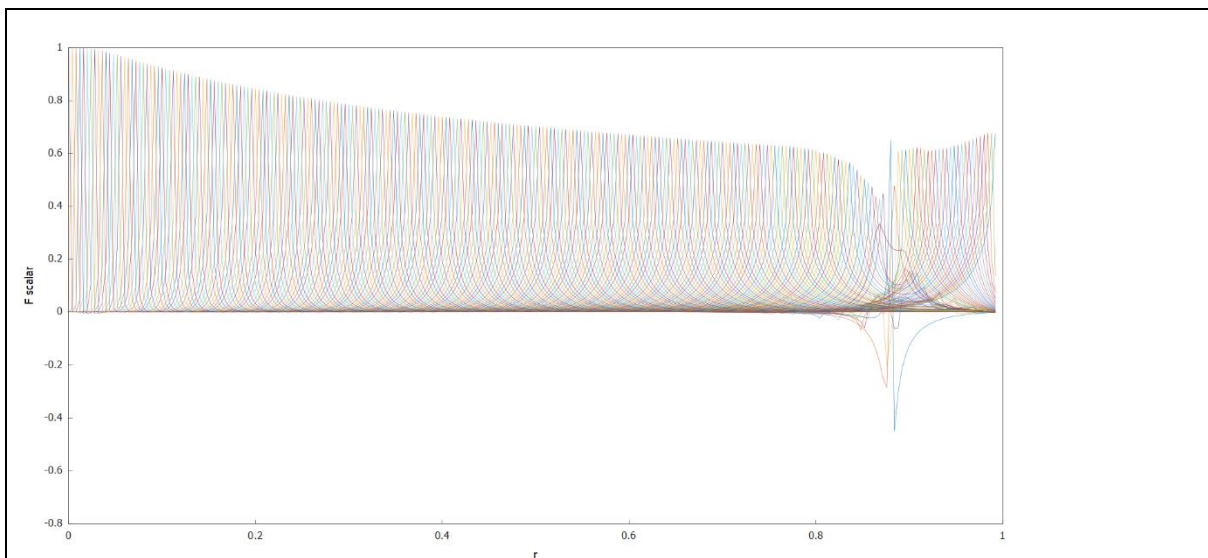


Рис. 29 Графік залежності скалярного потенціалу від часу $\tilde{\Phi}(r)$ для усього набору мод збільшенні параметрів ϵ та μ на 24% від початкових значень

Перейдемо до аналізу результатів, отриманих у рамках цього експерименту. На (Рис. 20) навідміну від (Рис. 18) з'явилося сильне

викривлення фаз та значно змінилась поведінка мод у континуумі $r \approx 0.87$. Знову спостерігається збільшення дизбалансу, який виникає безпосередньо через перенесення енергії глобальними альвеновими власними модами.

Далі, на (Рис. 22) чітко видно, що при збільшенні коефіцієнтів збудження та гамування на 6%, радіальна деформація фаз мод посилилась і зріс дизбаланс. Надалі, ця тенденція зберігається для кожного наступного досліджу. Таким чином, опрацювавши отримані результати, ми вкотре переконались, що зміна фаз у радіальному напрямку є наслідком збільшення потоку енергії, який, у свою чергу, є наслідком збільшення збудження та поглинання.

Висновок

У даній роботі досліджувався зв'язок між перенесенням енергії альфвеновими власними модами та радіальною залежністю їх фаз за допомогою емпіричного дослідження альвенових власних мод у тороїді токамака за допомогою виведеної нами їх математичної моделі, яка розглядалась у циліндричному наближенні. Було здійснено перетворення диференціальної задачі на власні значення в матричну за допомогою методу скінченних різниць. Далі, останню було розв'язано за допомогою написаної на мові C++ та Python комп'ютерної програми з застосуванням багатопоточних обчислень для зменшення часу, який затрачається на обрахунки. У результаті, було отримано моделі поперечного перерізу тороїда з відображення глобальних власних альвенових мод при різних значеннях ширини збудження, хвильових чисел та коефіцієнтів збудження і поглинання.

Числове моделювання показало, що за наявності просторово рознесених збудження та гамування хвилі, з'являється радіальна залежність фази мод. Це підтверджує висновки роботи Крамера [6], у якій виникнення згаданої радіальної залежності було пов'язано з перенесенням енергії хвилями. Варто зазначити, що на відміну від роботи Крамера [6], де мода знайдена МГД кодом була штучно деформована, і таким чином з'являвся потік енергії, у нашій роботі у рівняння МГД вводилося джерело енергії та задача розв'язувалась самоузгоджено.

Список використаної літератури

1. Salamon Valentyn. Coursework. "Numerical study of the relation between the wave front deformation and the spatial energy transport by Alfvén waves."

2. S Tomczyk, Scott McIntosh, Stephen Keil, Philip Judge, Tom Schad, D Seeley, and Justin Edmondson. 2007. Alfvén Waves in the Solar Corona. *Science* (New York, N.Y.) 317, (September 2007), 1192–6.
DOI:<https://doi.org/10.1126/science.1143304>
3. D. Stutman, L. Delgado-Aparicio, N. Gorelenkov, M. Finkenthal, E. Fredrickson, S. Kaye, E. Mazzucato, and K. Tritz. 2009. Correlation between Electron Transport and Shear Alfvén Activity in the National Spherical Torus Experiment. *PhysRevLett* 102, 11 (March 2009), 115002.
DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.115002>
4. Ya. I. Kolesnichenko, Yu. V. Yakovenko, and V. V. Lutsenko. 2010. Channeling of the Energy and Momentum during Energetic-Ion-Driven Instabilities in Fusion Plasmas. *Phys. Rev. Lett.* 104, 7 (February 2010), 075001. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.075001>
5. B. Tobias, E.M. Bass, I.G.J. Classen, C.W. Domier, B.A. Grierson, W.W. Heidbrink, N.C. Luhmann, R. Nazikian, H.K. Park, D.A. Spong, and M.A. Van Zeeland. 2012. Alfvén eigenmode structure during off-axis neutral beam injection. *Nuclear Fusion* 52, 10 (August 2012), 103009.
DOI:<https://doi.org/10.1088/0029-5515/52/10/103009>
6. G.J. Kramer, B.J. Tobias, A. Turnbull, and E.M. Bass. 2019. Enhanced radial energy transport induced by radially curved Alfvén eigenmode wavefronts. *Nuclear Fusion* 59, 9 (July 2019), 094001.
DOI:<https://doi.org/10.1088/1741-4326/ab2ee3>
7. Princeton University[Electronic resource]/Princeton Plasma Physics Laboratory is a U.S. Department of Energy national laboratory managed by Princeton University-Mode of access-
<https://www.pppl.gov/research/nstx-u>-Title from the screen

8. Ya. I. Kolesnichenko, V. V. Lutsenko, A. Weller, A. Werner, Yu. V. Yakovenko, J. Geiger, and O. P. Fesenyuk. 2007. Conventional and nonconventional global Alfvén eigenmodes in stellarators. *Physics of Plasmas* 14, 10 (October 2007), 102504.
DOI:<https://doi.org/10.1063/1.2789558>
9. M.J. Hole et al Global Alfvén Eigenmodes in the H-1 heliac // *Plasma Physics and Controlled Fusion*.— 2017.— Volume 59, Number 12
10. Fasoli *Plasma Physics II: Kinetic theory of plasmas, lecture notes* 2010
11. Malnev V. M. Sitenko O. G. 1994. *Fundamentals of plasma theory*. Scientific Thought, Kyiv 317, (1994), 375.
13. Andreas Keiling, Scott Thaller, John Wygant, and John Dombek. 2019. Global Alfvén Wave Power in the Auroral Zone in Relation to the AE Index. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 124, 11 (November 2019), 8637–8646.
DOI:<https://doi.org/10.1029/2019JA026805>
14. K Appert, R Gruber, F Troyon, and J Vaclavik. 1982. Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in Tokamaks. *Plasma Physics* 24, 9 (September 1982), 1147. DOI:<https://doi.org/10.1088/0032-1028/24/9/010>
15. Mahajan, S. M.; Ross, D. W.; Chen, G. Discrete Alfvén Eigenmode Spectrum in Magnetohydrodynamics. *The Physics of Fluids* 1983, 26 (8), 2195–2199. <https://doi.org/10.1063/1.864404>.
16. Ю.В. Яковенко, В.І. Саламон, С.В. Тарасенко, XXX Щоріч. конф. ІЯД НАН України (К., ІЯД НАН України, 2023), с. 186, DOI: 10.15407/jnpae http://www.kinr.kiev.ua/Annual_Conferences/KINR2023/index.html