

1) Равенство (13) играет важную роль в обобщенной трактовке решений некоторых типов уравнений математической физики, особенно в том случае, когда $u(x, t)$ – фундаментальное решение некоторого дифференциального оператора. Тогда с помощью (13) можно находить фундаментальные решения усеченных по переменному t дифференциальных операторов, избегая достаточно громоздких построений метода спуска по t .

2) Если в (13) $\int |u(x, t)| dt$ – локально интегрируемая по Лебегу функция в R^n , то оно примет форму

$$u(x, t) * [\delta(x) \cdot 1(t)] = 1(t) \cdot \int u(x, \tau) d\tau.$$

Литература

1. Сташкевич А.В., Щелоков В.С. Некоторые аспекты теории векторных топологических пространств // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2007. – № 1.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512с.
3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 631 с.

УДК 519.21

Н.Ю. Щестюк

ПРОБЛЕМА ПРОГНОЗУ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ ОБЛАСТЕЙ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

У статті розглянуто задачу прогнозу випадкових однорідних полів для індексних множин спеціального вигляду. Знайдено спектральні характеристики та середньоквадратичні похибки оптимальних лінійних оцінок поля для цих областей.

Вступ. Задачі прогнозу випадкових полів є досить актуальними при розгляді проблем кодування та обробки сигналів, проблем розпізнавання образів зображень, у задачах метеорології, океанографії, статистичної гідромеханіки, економетрики та теорії автоматичного регулювання. Методи знаходження оптимальних лінійних оцінок стаціонарних процесів та випадкових полів досліджувались у роботах Н. Вінера, Ю.А. Розанова, М. Г. Крейна, А. М. Яглома, Пінскера та Цзян Це-пея. У статтях [1, 2] було досліджено задачу екстраполяції функціоналу $A_+ \xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(k, j) \xi(k, j)$ від невідомих значень поля $\xi(k, j)$ за спостереженнями поля $\xi(u, v) + \eta(u, v)$ в області $S_h = Z^2 \setminus Z \times Z_+$. У даній статті знайдено спектральні характеристики та середньоквадратичні похибки оптимальних лінійних оцінок поля для більш загальних областей $S_{add} = Z_h \cup \{Z \times m\}$, $S_{del} = Z_h \setminus \{Z \times (-n)\}$, $S_{com} = Z_h \cup \{Z \times m\} \setminus \{Z \times (-n)\}$, що відповідають або додаванню множин спостережень $\{Z \times (-n)\}$ або вилучанню множин спостережень $\{Z \times m\}$ або одночасному додаванню та вилучанню множин $\{Z \times (-n)\}$ та $\{Z \times m\}$ до Z_h відповідно [3].

Постановка задач. Нехай $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$ однорідне випадкове поле, що спостерігається для однієї з наступних областей $S_{add}, S_{del}, S_{com}$. $\xi(u, v)$ та $\eta(u, v)$ – однорідні та однорізно зв'язані випадкові поля. Припустимо, що умова мінімальності [1, 2] виконується

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} d\mu < \infty \quad \forall \lambda \in [-\pi; \pi] \quad (1)$$

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_+ \xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(k, j) \xi(k, j)$$

від невідомих значень $\xi(k, j)$, $k \in Z$, $j \in Z_+$, якщо матрицю спектральних щільностей відомо.

Оптимальні лінійні оцінки. Лінійну оцінку $\hat{A}_+ \xi$ функціонала $A_+ \xi$ за спостереженнями поля $\zeta(u, v) = \xi(u, v) + \eta(u, v)$ для $(u, v) \in Z_{add}$ шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_+ \xi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda, \mu) Z_{\zeta}(d\lambda, d\mu),$$

де $h(\lambda, \mu)$ належить підпростору $L_2^-(f_{\xi\xi})$ простора $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породженого $e^{i(u\lambda+v\mu)}$, $(u, v) \in S_{add} = Z_h \cup \{Z \times m\}$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_+ \xi$ визначається умовами ортогонального проектування у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, F, P)$:

$$A_+ \xi - \hat{A}_+ \xi \perp \zeta(k, j) \quad \forall (k, j) \in S_{add}$$

Тоді

$$(A_+(\lambda, \mu))(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)) - h(\lambda, \mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu) = C_{add}(\lambda, \mu),$$

де

$$A_+(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} a(k, j) e^{i(k\lambda+j\mu)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} a_j(\lambda) e^{ij\mu}, \quad a_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a(k, j) e^{ik\lambda};$$

$$C_{add}(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} c(k, j) e^{i(k\lambda+j\mu)} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} c_j(\lambda) e^{ij\mu} = c_0(\lambda) + c_1(\lambda) e^{i\mu} + \dots + c_{m-1}(\lambda) e^{i(m-1)\mu} + c_{m+1}(\lambda) e^{i(m+1)\mu} + \dots,$$

$$c_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c(k, j) e^{ik\lambda};$$

та

$$\begin{aligned} h(\lambda, \mu) &= \frac{A_+(\lambda, \mu)(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)) - C_{add}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} = \\ &= \frac{A_+(\lambda, \mu)(f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu))}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} - \frac{C_{add}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)}, \end{aligned} \quad (2)$$

$c_j(\lambda)$ – можна знайти з системи

$$\sum_{\substack{j=0, \\ j \neq m}}^{\infty} a_j(\lambda) d_{t-j}(\lambda) = \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq m}}^{\infty} c_j(\lambda) b_{t-j}(\lambda), \quad t \in \{0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots\},$$

$$b_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} e^{-ij\mu} d\mu, \quad d_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} e^{-ij\mu} d\mu.$$

Якщо визначити оператори $B(\lambda)$, $D(\lambda)$ у просторі l_2 як матриці з елементами:

$$B_N(\lambda)(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} d\mu, \quad D_N(\lambda)(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)} d\mu,$$

$k, j = 0, 1, \dots$, що є коефіцієнтами Фур'є функцій $\frac{1}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)}$, $\frac{f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) + f_{\xi\eta}(\lambda, \mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu)}$

відповідно, то для знаходження $c_j(\lambda)$ отримаємо

$$D(\lambda)a(\lambda) = B(\lambda)c(\lambda),$$

звідки

$$c(\lambda) = B^{-1}(\lambda)D(\lambda)a(\lambda).$$

Спектральна характеристика $h(\lambda, \mu)$ оптимальної лінійної оцінки $A_+ \xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки:

$$\Delta(h; f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}) = \min_{\hat{A}_+ \xi} M \left| A_+ \xi - \hat{A}_+ \xi \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A_+(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu)|^2 f_{\xi\xi}(\lambda, \mu) - 2h(\lambda, \mu) \overline{A_+}(f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) + 2|h(\lambda, \mu)|^2 \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda, \mu) + |h(\lambda, \mu)|^2 f_{\eta\eta}(\lambda, \mu)) d\lambda d\mu \quad (3)$$

Отже, маємо

Теорема 1. Нехай $\zeta(k, j) = \xi(k, j) + \eta(k, j)$ –однорідне випадкове поле, що спостерігається у області $S_{add} = Z_h \cup \{Z \times m\}$ та нехай справджується умова (1). Тоді спектральна характеристика та середньоквадратична похибка оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+ \xi$ визначаються за формулами (2), (3).

Наслідок 1.1 Якщо областю спостережень є множина $S_{del} = Z_h \setminus \{Z \times (-n)\}$, отримана за допомогою вилучення множини $\{Z \times (-n)\}$ з Z_h , тоді функціонали $A_+(\lambda, \mu)$ та $C_{del}(\lambda, \mu)$ будуть включати $a_{-n}(\lambda)e^{-in\mu}$, $c_{-n}(\lambda)e^{-in\mu}$ відповідно:

$$A_+(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a(k, -n) e^{-in\mu} + a(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)} \right) = a_{-n}(\lambda) e^{-in\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\lambda) e^{ij\mu}$$

$$C_{del}(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} c(k, -n) e^{-in\mu} + c(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)} \right) = c_{-n}(\lambda) e^{-in\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\lambda) e^{ij\mu}$$

та $c_j(\lambda)$ – може бути знайдено з системи

$$a_{-n}(\lambda) d_{t+n}(\lambda) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\lambda) d_{t-j}(\lambda) = \sum_{j=0,}^{\infty} c_j(\lambda) b_{t-j}(\lambda) + c_{-n}(\lambda) b_{t+n}(\lambda),$$

$$t \in \{-n, 0, 1, \dots, \dots\}.$$

Наслідок 1.2 Якщо областю спостережень є множина $S_{com} = Z_h \cup \{Z \times m\} \setminus \{Z \times (-n)\}$, що відповідає додаванню множини спостережень $\{Z \times (m)\}$ до Z_h та одночасному вилучанню множини спостережень $\{Z \times (-n)\}$ з Z_h , тоді функціонали $A_+(\lambda, \mu)$ та $C_{com}(\lambda, \mu)$ визначаються як

$$A_+(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} a(k, -n) e^{-in\mu} + a(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)} \right) = a_{-n}(\lambda) e^{-in\mu} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} a_j(\lambda) e^{ij\mu}$$

$$C_{com}(\lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} c(k, -n) e^{-in\mu} + c(k, j) e^{i(k\lambda + j\mu)} \right) = c_{-n}(\lambda) e^{-in\mu} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} c_j(\lambda) e^{ij\mu}$$

та $c_j(\lambda)$ – може бути знайдено з системи

$$a_{-n}(\lambda) d_{t+n}(\lambda) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\lambda) d_{t-j}(\lambda) = \sum_{j=0,}^{\infty} c_j(\lambda) b_{t-j}(\lambda) + c_{-n}(\lambda) b_{t+n}(\lambda),$$

$$t \in \{-n, 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots\}.$$

Наслідок 1.3 Нехай $\xi(k, j), \eta(k, j)$ - некорельовані випадкові поля із спектральними щільностями вигляду $f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$, $g(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) g_2(\mu)$ та нехай умова (1) виконується.

Тоді спектральна характеристика $h(f, g)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+ \xi$ визначається за формулами

$$h(f, g) = \frac{A_+(\lambda, \mu) f_1(\lambda) f_2(\mu) - C_+(\lambda, \mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu) + g_2(\mu))} = A_+(\lambda, \mu) - \frac{A_+(\lambda, \mu) f_1(\lambda) g_2(\mu) + C_+(\lambda, \mu)}{f_1(\lambda)(f_2(\mu) + g_2(\mu))} \quad (4)$$

$$\Delta(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) \left[\langle D a(\lambda), B^{-1} D a(\lambda) \rangle + \langle R a(\lambda), a(\lambda) \rangle \right] d\lambda, \quad (5)$$

де B, D, R - оператори у просторі l_2 , що визначаються коефіцієнтами Фур'є функцій $(f_2(\mu) + g_2(\mu))^{-1}$, $f_2(\mu)(f_2(\mu) + g_2(\mu))^{-1}$, $f_2(\mu)g_2(\mu)(f_2(\mu) + g_2(\mu))^{-1}$ відповідно:

$$B(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f_2(\mu) + g_2(\mu)} d\mu, \quad D(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f_2(\mu)}{f_2(\mu) + g_2(\mu)} d\mu, \\ R(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{f_2(\mu)g_2(\mu)}{f_2(\mu) + g_2(\mu)} d\mu, \quad k, j = 0, 1, \dots$$

Якщо $g(\lambda, \mu) = 0$, тоді спектральна характеристика $h(f)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+ \xi$ від невідомих значень поля $\xi(k, j)$ за спостереженнями $\xi(u, v)$ для $(u, v) \in S_{add}$ визначається формулами

$$h(f) = A_+(\lambda, \mu) - \tilde{C}_+(\lambda, \mu) \frac{1}{f_2(\mu)}, \quad (6)$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C_+(\lambda, \mu)|^2 f_1^{-1}(\lambda) f_2^{-1}(\mu) d\lambda d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda) \langle \tilde{B}^{-1} a(\lambda), a(\lambda) \rangle d\lambda \quad (7)$$

де

$$\tilde{C}_+(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} (\tilde{B}^{-1} a(\lambda))(j) e^{ij\mu}$$

$\tilde{B}$ оператор у просторі l_2 , що визначається коефіцієнтами Фур'є функції $\frac{1}{f_2(\mu)}$:

$$\tilde{B}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f_2(\mu)} d\mu, \quad k, j = 0, 1, \dots$$

Висновки. У статті розглянуто задачу прогнозу функціоналів від випадкових однорідних полів для індексних множин $S_{add}, S_{del}, S_{com}$. Знайдено спектральні характеристики та середньоквадратичні похибки оптимальних лінійних оцінок поля для зазначених областей за умови відомої матриці спектральних щільностей поля, що спостерігається. Надалі для множин $S_{add}, S_{del}, S_{com}$ бажано дослідити оцінки поля в умовах спектральної невизначеності.

Література

35. Моклячук М.П., Шестюк Н.Ю. Екстраполяція випадкових полів, що спостерігаються з шумом // ДАН України, – 2003, вип. № 4, с. 12– 18.
36. Шестюк Н. Екстраполяція функціоналів від однорідного випадкового поля, яке спостерігають у півплощині. // Вісник Львів. універ. Серія прикл. матем. та інф. Випуск 12, 2007, с.62-67.
37. M. Pourahmadi, A. Inoue. A Prediction Problem in $L_2(\varpi)$ // Proceedings of the American Mathematical Society, - N4, 2007, P 1233-1239.