

Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.

2 D КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є НА КЛАСІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ОПЕРАТОРИ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ

У статті запропоновано та досліджено кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на деякому класі диференційованих функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доведено, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

Ключові слова: цифрова обробка сигналів, інтерлінація функцій, 2 D коефіцієнтів Фур'є, кубатурні формули.

Вступ

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів потребують вміння наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. За дані можуть слугувати значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають

досліджуваний об'єкт. Зокрема, задачу наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дає змогу ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1] на різних класах функцій. Важливим кроком у розв'язанні такої задачі є обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації (інформація

про $f(x, y)$ задається її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих). Актуальним є питання оцінки похибки кубатурної формули, а також отримання оцінки похибки кубатурної формули через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

У [2–4] розглядалася задача наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про $f(x, y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Однак питання отримання оцінки похибки побудованих кубатурних формул через відповідні оцінки похибки квадратурних формул розглядається вперше.

Постановка задачі: побудова кубатурних формул для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій на класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що $|f^{(0,0)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$ тоді, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$. Довести, що оцінку похибки побудованих кубатурних формул можна отримати різними способами, зокрема, виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

Оцінки похибки обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є

Нехай $p_k(x)$, $p_j(y)$ – сплайни порядку 0, 1, 2, 3 з властивостями

$$p_k(x_\alpha) = \delta_{\alpha k}, p_j(y_\beta) = \delta_{\beta j}, \alpha, \beta = \overline{1, \ell} \text{ і}$$

$$O_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x),$$

$$O_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y), k, j \in \overline{1, \ell},$$

$$R_1(f; x, y) = f(x, y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) =$$

$$= f(x, y) - O_1 f(x, y),$$

$$R_2(f; x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) =$$

$$= f(x, y) - O_2 f(x, y).$$

Оператор сплайн-інтерліант $Of(x, y)$ представлений оператором $O_\mu f(x, y)$, $\mu = 1, 2$ так:

$$Of(x, y) = O_1 f(x, y) + O_2 f(x, y) - O_1 O_2 f(x, y).$$

Лема 1. Для залишку

$$R(f) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy,$$

справедлива наступна рівність:

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 R_1 R_2 f(x, y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy,$$

Доведення. Оскільки

$$f(x, y) - Of(x, y) =$$

$$= f(x, y) - O_1 f(x, y) - O_2 f(x, y) + O_1 O_2 f(x, y) =$$

$$= [I - O_1 - O_2 + O_1 O_2] f(x, y) =$$

$$= [I - O_1 + I - O_2 + I - O_1 O_2] f(x, y) =$$

$$= [(I - O_1)(I - O_2)] f(x, y) = R_2 R_1 f(x, y), \text{ то}$$

$$R(f) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 R_1 R_2 f(x, y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy, \text{ то}$$

Лема 1 доведена.

Нехай

$$\tilde{R}_1(f; y) =$$

$$= \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) \right) \sin 2\pi m x dx =$$

$$= \int_0^1 (f(x, y) - O_1 f(x, y)) \sin 2\pi m x dx,$$

$$\tilde{R}_2(f; x) =$$

$$= \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy =$$

$$= \int_0^1 (f(x, y) - O_2 f(x, y)) \sin 2\pi n y dy.$$

Лема 2. Для залишку $R(f)$ справедлива така рівність:

$$R(f) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy =$$

$$= \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x, y).$$

Доведення.

Розглянемо

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x, y) =$$

$$= \int_0^1 \left(\tilde{R}_2(f; x) - \sum_{k=1}^{\ell} \tilde{R}_2(f; x_k) p_k(x) \right) \sin 2\pi m x dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) 2\pi n y dy p_k(x) \right\} \sin 2\pi m x dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy \right\} \sin 2\pi m x dx -$$

$$- \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy p_k(x) \right\} \sin 2\pi m x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y dx dy - \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \sin 2\pi n y dy \sin 2\pi m x dx - \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_k(x) p_j(y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(x, y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) + \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_k(x) p_j(y) \right\} \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = R(f).
\end{aligned}$$

Лема 2 доведена.

Далі як $p_k(x)$, $p_j(y)$ будемо розглядати кусково-сталі базисні сплайни.

2. Кубатурна формула обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлєтації

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
h_{0k}(x) &= \begin{cases} 1, x \in X_k \\ 0, x \notin X_k \end{cases}, \quad k = \overline{1, \ell}; \\
H_{0j}(y) &= \begin{cases} 1, y \in Y_j \\ 0, y \notin Y_j \end{cases}, \quad j = \overline{1, \ell},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_k &= [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \\
x_k &= k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}.
\end{aligned}$$

Нехай $Jf(x, y)$ – оператор-інтерплінант

$$\begin{aligned}
Jf(x, y) &= \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \\
&- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).
\end{aligned}$$

Лема 3. [1] Для $Of(x, y)$ виконуються наступні властивості:

1. $Jf(x_k, y) = f(x_k, y)$, $k = \overline{1, \ell}$,
2. $Jf(x, y_j) = f(x, y_j)$, $j = \overline{1, \ell}$,
3. $|f(x, y) - Jf(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O(\Delta^2)$, $\forall (x, y) \in G$.

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m, n)$, $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
I_1^2(m, n) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y dx dy, \\
I_2^2(m, n) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos 2\pi m x \cos 2\pi n y dx dy, \\
I_3^2(m, n) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi m x} e^{-i2\pi n y} dx dy
\end{aligned}$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y dx dy,$$

$$\Phi_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \cos 2\pi m x \cos 2\pi n y dx dy,$$

$$\Phi_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{-i2\pi m x} e^{-i2\pi n y} dx dy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерплінанта $Jf(x, y)$ та отримаємо відповідні кубатурні формули:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^2(m, n) &= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi m x dx \int_0^1 f(x_k, y) \sin 2\pi n y dy + \\
&+ \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) \sin 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi n y dy - \\
&- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi n y dy, \\
\Phi_2^2(m, n) &= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi m x dx \int_0^1 f(x_k, y) \cos 2\pi n y dy + \\
&+ \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) \cos 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi n y dy - \\
&- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi n y dy, \\
\Phi_3^2(m, n) &= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi m x} dx \int_0^1 f(x_k, y) e^{-i2\pi n y} dy + \\
&+ \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) e^{-i2\pi m x} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi n y} dy - \\
&- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi m x} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi n y} dy.
\end{aligned}$$

Теорема. Для кубатурної формули $\Phi_1^2(m, n)$ обчислення $I_1^2(m, n)$ справедлива наступна оцінка

$$\rho(I_1^2(m, n), \Phi_1^2(m, n)) = |R(f)| \leq \frac{\tilde{M}}{16\ell^2}.$$

Доведення. Маємо наступну оцінку (лема 1)

$$\begin{aligned} \rho(I_1^2(m, n), \Phi_1^2(m, n)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) \sin(2\pi mx) \sin(2\pi ny) dx dy \right| \leq \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [f(x, y) - Jf(x, y)] \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy \leq \\ &\leq \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy = \\ &= \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \left(-\frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times \\ &\times \left(-\frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) = \\ &= \tilde{M} \ell^2 \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\tilde{M}}{16} \frac{1}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Доведення теореми можна здійснити на основі леми 2, використовуючи оцінки похибки квадратурних формул.

Дійсно, якщо $g(x) \in C^1[0, 1]$, $|g'(x)| \leq M$, $x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $k = \overline{1, \ell}$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$, то для функції однієї змінної мають місце наступні оцінки:

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_1| &= \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (g(x) - g(x_k)) \sin 2\pi mx dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |g(x) - g(x_k)| dx = \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x g'(\xi) d\xi \right| dx \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx = \\ &= M \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(-\frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) = \end{aligned}$$

$$= M \ell \frac{\Delta^2}{4} = \frac{M\Delta}{4}.$$

Тоді, залемою 2, маємо $\rho(I_1^2(m, n), \Phi_1^2(m, n)) \leq |\tilde{R}_1 \tilde{R}_2(f; x, y)| \leq \tilde{M} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\tilde{M}}{16\ell^2}$. Теорема доведена.

3. Чисельний експеримент

Нехай

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (\cos(2x - 2y) - \cos(2x + 2y)),$$

тоді $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq 2$, $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq 2$, $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq 4$. Якщо обчислювати інтеграл за кубатурою формули $\Phi_1^2(2, 3)$, коли $\ell = 19$, то

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = \\ &= |0.008785471951418 - 0.008785470342025| = \\ &= 0.000000001609393. \end{aligned}$$

Функцію $f(x, y)$ можна представити у вигляді $f(x, y) = \cos 2x \cos 2y$, тому, якщо $g(u) = \cos 2u$, $u = x, y$, можна отримати наступні результати обчислень для

$$\tilde{R}_i(g, u, s) = \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} (g(u) - g(u_k)) \sin 2\pi s u du \right|,$$

$i = 1, 2$, при $\ell = 19$:

$$\tilde{R}_1(g, x, 2) = 0.000051056063201,$$

$$\tilde{R}_2(g, y, 3) = 0.000031522074555.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = \\ &= \tilde{R}_1(g, x, 2) \cdot \tilde{R}_2(g, y, 3) = \\ &= 0.000051056063201 \cdot 0.000031522074555 = \\ &= 0.000000001609393. \end{aligned}$$

Висновки

У статті досліджено кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталі інтерлінації на деякому класі диференційованих функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доведено, що оцінку похибки кубатурних формул можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О. М. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18 – 21 травня, 2010. – Харків. – Ч. 1. – 2010. – С. 211–213.
3. Литвин О. М. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Доповіді НАН України. – 2010. – № 3. – С. 24–29.
4. Литвин О. М. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – № 926. – С. 153–160.

O. Lytvyn, O. Nechuyviter

2 D FOURIER COEFFICIENTS ON CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS AND OPERATORS PIECEWISE-STEEL SPLINE-INTERLINEATION

Cubature formulas of the calculation of 2 D Fourier's coefficients are presented by using piecewise operators of spline-interlineation in the case when information about function is set of lines on one class of differentiable functions. The error of the cubature formulas is evaluated by errors of quadratures formulas.

Keywords: digital signal processing, functions interlineation, 2 D Fourier coefficients, cubature formulas.

Матеріал надійшов 11 травня 2011 р.