

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**Функціональні простори Александрова**»

Виконав: студент 4-го року
навчання

освітньої програми «Прикладна
математика»,

спеціальності 113 «Прикладна
математика»

Дімогло Данііл Олексійович

Керівник:

к. ф. - м. н, Козеренко С.О.

Рецензент:

к. ф. - м. н, Пилявська О.С.

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою: _____

Секретар ЕК: _____

«_____» _____ 20__ р.

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф., д.ф - м.н., Б.В. Олійник

(підпис)

“ _____ ” _____ 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу
студенту 4-го курсу факультету інформатики
Дімогло Даніілу Олексійовичу

Тема: Функціональні простори Александрова.

Вихідні дані: Досліджено функціональні простори Александрова.

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

- 1 Анотація
 - 2 Вступ
 - 3 Основні означення та попередні результати
 - 3.1 Означення
 - 3.2 Попередні результати
 - 4 Основні результати
 - 4.1 ФПА та аксіоми відокремлюваності
 - 4.2 Неперервність відображення у ФПА
 - 5 Програма на мові Java
 - 6 Висновки
- Література

Дата видачі “ _____ ” _____ 2021 р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: «Функціональні простори Александрова».

Календарний план виконання роботи:

	Назва етапу кваліфікаційної	Кінцевий термін виконання етапу	Підпис
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	04.10.2021	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	08.11.2021	
3.	Розробка плану та структури роботи.	23.11.2021	
4.	Робота з науковою літературою.	02.12.2021	
5.	Опис основних понять і властивостей ПА та ФПА.	14.12.2021	
6.	Доведення основної теореми.	21.01.2022	
7.	Дослідження ФПА на аксіомі відокремлюваності.	27.03.2022	
8.	Написання програми на мові Java.	15.04.2022	
9.	Робота над текстовим оформленням результатів.	25.05.2022	
10.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи.	08.06.2022	
11.	Передзахист помилок кваліфікаційної роботи.	15.06.2022	
12.	Виправлення помилок.	26.06.2022	
13.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.07.2022	

Студент _____ Керівник _____

“ _____ ” _____ 2022 р.

Зміст

1	Анотація	5
2	Вступ	6
3	Основні означення та попередні результати	8
3.1	Означення та твердження	8
3.2	Попередні результати	11
4	Основні результати	16
4.1	ФПА та аксіоми відокремлюваності	16
4.2	Неперервність відображення у ФПА	21
5	Програма на мові Java	25
6	Висновки	29

1 Анотація

У 1937 році П. Александров займався вивченням «особливих» топологічних просторів. Ця особливість полягала у накладанні більш суворої умови на одну з аксіом топології, а саме: відкритою множиною є перетин не лише скінченної кількості відкритих множин, а й будь-якої їх кількості [1]. На честь Павла Сергійовича зараз простори з такою властивістю називаються Александровими. Метою даної роботи є розбір основних понять та властивостей функціональних просторів Александрова, дослідження їх зв'язку зі звичайними просторами Александрова, аналіз таких просторів на аксіоми відокремлюваності, пошук спорідненості між субмаксимальними просторами й просторами Вайберна, а також опис найменших та найбільших топологій з властивістю неперервності.

Ключові слова: топологічний простір, простір Александрова, неперервне відображення, база топології, аксіоми відокремлюваності, простір Колмогорова, $T_{1/2}$ простір, простір Фреше, всюди щільна множина, субмаксимальний простір, простір Вайберна.

2 Вступ

Простори Александрова або, як їх ще називають, «простори найменшого околу» (англ. «Smallest Neighborhood Spaces») є цікавим підвидом топологічних просторів, у яких довільний перетин відкритих множин є також відкритою множиною. Вперше ці простори були введені П. Александровим у 1937 році у праці під назвою «Diskrete Räume» (з нім. – «Дискретні Простори») [1]. Натомість, як влучно зазначили у своїй роботі палестинські математики Мохаммед Елатраш (англ. Mohammed S. Elatrash) та Хішам Махді (англ. Hisham B. Mahdi), така назва наразі не є актуальною, адже дискретним у сучасній топології узвичаєно називати простір, будь-які підмножини якого є відкритими [7].

Простори Александрова широко використовуються у таких галузях як інформатика, цифрова топологія, біологія, соціологія [4]. Згідно статі «Structural and Numerical Studies of Some Topological Properties for Alexandroff Spaces» це зумовлено передусім тим, що будь-яка топологія на скінченному носії є простором Александрова [4]. Крім того, топологічні результати відіграють важливу роль у комп'ютерній графіці та аналізі зображень [8]. Зокрема, чимало уваги приділяється T_0 - просторам Александрова. Значна кількість математиків розглядала саме такі простори ([7], [9], [10], [12], [11] тощо) передусім через їх зв'язок з множинами з заданим на них відношенням передпорядку, частково впорядкованими множинами, а також природнім бажанням вилучити з розгляду топологічно не розрізнявані точки. Натомість, у нашому дослідженні ми не будемо зосереджуватися лише на просторах Колмогорова.

У даній роботі ми розглянемо функціональні простори Александрова (надалі – ФПА), розберемо їх спорідненість зі звичайними просторами Александрова та дослідимо такі простори на аксіоми відокремлюваності T_0 , $T_{1/2}$, T_1 тощо. Вперше ФПА були введені іранськими математиками Фатемою Ширазі (англ. Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi) та Насером Голестані (англ. Nasser Golestani) у публікації під назвою «Functional Alexandroff Spaces» у 2011 році [3]. У своїй роботі Ф. Ширазі та Н. Голестані продемонстрували декілька цікавих результатів, та одним з найбільш суттєвих є критерій функціональності Александрівських просторів з приміткою «[Main Theorem]».

У доволі свіжій праці «Structural and Numerical Studies of Some Topological Properties for Alexandroff Spaces» 2021-го року [4] туніські математики Самі Лазар (англ. Sami Lazaar), Хаусем Сабрі (англ. Housseem Sabri) та Ранда Тахрі (англ. Randa Tahri) досліджували простори Александрова та їх зв'язок з субмаксимальними просторами та просторами Вайберна. З огляду на це виникають природні питання і стосовно зв'язку ФПА з вищезгаданими просторами.

3 Основні означення та попередні результати

3.1 Означення та твердження

Означення 3.1. Топологічний простір (X, τ) , що задовольняє нижченаведені еквівалентні умови називається простором Александрова ([2], с. 43):

1. $\forall i \in \mathbb{I} : \{U_i\} \subseteq \tau \implies (\bigcap_{i \in \mathbb{I}} U_i) \in \tau$.
2. $\forall x \in X \exists V(x) \in \tau, x \in V(x) \forall U_x \in \tau, x \in U_x : V(x) \subseteq U_x$ (існування найменшого околу x).

Доведення.

Достатність: Нехай у топологічному просторі (X, τ) довільний перетин відкритих множин є відкритою множиною. Зафіксуємо точку $x \in X$. Покладемо $O(x) := \{U_x \subseteq X : U_x \in \tau \wedge x \in U_x\}$. Розглянемо множину $V(x) = \bigcap_{U_x \in O(x)} U_x$. Маємо, що $V(x) \in \tau, x \in V(x)$ та $\forall U_x \in \tau, x \in U_x : V(x) \subseteq U_x$.

Необхідність: Нехай для кожної точки $x \in X$ топологічного простору (X, τ) існує найменший окіл $V(x) \in \tau$. Розглянемо множину $W := \bigcap_{i \in \mathbb{I}} U_i, U_i \in \tau$. Якщо $W = \emptyset$, то $W \in \tau$. Якщо ж $W \neq \emptyset$, зафіксуємо точку $x \in W$. Маємо, що $\forall i \in \mathbb{I} : x \in U_i$. Оскільки $\forall i \in \mathbb{I} : U_i$ є деяким околом точки $x \in X$, а для кожної точки $x \in X$ існує найменший окіл $V(x) \in \tau, x \in V(x)$, то маємо, що $\forall i \in \mathbb{I} : V(x) \subseteq U_i$. Звідси $V(x) \subseteq W$ для кожної точки $x \in W$. Отже, $W \in \tau$. \square

Нехай X – довільна множина, на якій діє відображення $f : X \rightarrow X$. Покладемо для довільного $x \in X$:

$$\uparrow x := \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x)$$

$$\downarrow x := \bigcup_{n \geq 0} f^n(x).$$

Означення 3.2. Топологічний простір, породжений базою $\beta = \{\uparrow x : x \in X\}$ називається функціональним простором Александрова. ([3], с. 516)

Лема 3.3. Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александрова. Тоді $\forall U \subseteq X : U \in \tau_f \iff f^{-1}(U) \subseteq U$.

Доведення.

Необхідність: Нехай $U \in \tau_f$. Покажемо, що тоді $f^{-1}(U) \subseteq U$. Оскільки $U \in \tau_f$, то $U = \bigcup_{x \in U} \uparrow x$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} \uparrow x\right) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(\uparrow x) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x)\right) = \\ &= \bigcup_{x \in U} \left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(f^{-n}(x))\right) = \bigcup_{x \in U} \left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^{-1}(x))\right) = \bigcup_{x \in U} \uparrow (f^{-1}(x)) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{x \in U} (\uparrow x), \text{ бо } \uparrow (f^{-1}(x)) \subseteq \uparrow x \text{ – за умовою 1 Теорема 3.16.} \end{aligned}$$

Оскільки $\bigcup_{x \in U} (\uparrow x) = U$, то маємо, що $f^{-1}(U) \subseteq U$.

Достатність: Нехай $f^{-1}(U) \subseteq U$. Покажемо, що тоді $U \in \tau_f$. Зафіксуємо довільну точку $x \in U \implies f^{-1}(x) \in f^{-1}(U) \implies f^{-1}(x) \in U \implies f^{-2}(x) \in f^{-1}(U) \implies \dots \implies f^{-n}(x) \in U \implies \dots$. Таким чином, $\{x\} \cup \{f^{-1}(x)\} \cup \dots \cup \{f^{-n}(x)\} \cup \dots = \uparrow x \subseteq U$. Отже, маємо, що: $\forall x \in U : \uparrow x \in U$. Звідси $U = \bigcup_{x \in U} \uparrow x$, а тому $U \in \tau$. \square

Твердження 3.4. [Зовнішній критерій бази] ([6], с. 22) Нехай X – деяка множина, $\beta \subseteq 2^X$ є базою деякої топології τ на X тоді і тільки тоді, якщо виконуються наступні умови:

1. $\bigcup_{B \in \beta} B = X$;
2. $\forall B_1, B_2 \in \beta \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \beta : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Означення 3.5. Топологічний простір (X, τ) , задовольняє T_0 - аксіому відокремлюваності, якщо: $\forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \tau : (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$. ([2], с. 42)

Означення 3.6. Топологічний простір (X, τ) , задовольняє $T_{1/2}$ - аксіому відокремлюваності, якщо: $\forall x \in X : \{x\}$ – відкрита $\vee \{x\}$ – замкнена. ([5], с. 89)

Означення 3.7. Топологічний простір (X, τ) , задовольняє T_1 - аксіому відокремлюваності, якщо: $\forall x \in X : \{x\}$ – замкнена. ([2], с. 31)

Означення 3.8. Топологічний простір (X, τ) , називається субмаксимальним, якщо: $\forall U \subseteq X : U$ – всюди щільна $\implies U$ – відкрита.

Твердження 3.9. ([4], с. 4) Простір Александера (X, τ) є простором Вайберна тоді і тільки тоді, коли: $\forall x \in X : |\downarrow x| \leq 2$.

Твердження 3.10. [**Критерій всюди щільності в топологічному просторі**] ([13], с. 36) Множина $A \subseteq X$ топологічного простору (X, τ) є всюди щільною тоді і тільки тоді, коли вона перетинає його будь-яку відкриту непорожню множину:

$$\forall U \in \tau, U \neq \emptyset : A \cap U \neq \emptyset.$$

Означення 3.11. Орієнтований граф D є впорядкованою парою множин $(V(D), A(D))$, де $A(D) \subseteq V(D) \times V(D)$.

Означення 3.12. Нехай X – довільна множина, $f : X \rightarrow X$. Функціональний орієнтований граф Γ_f є впорядкованою парою множин $(V(\Gamma_f), A(\Gamma_f))$, де $V(\Gamma_f) = X$, а $A(\Gamma_f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Для кожного орієнтованого графа D можемо визначити неорієнтований граф $[D]$.

Означення 3.13. Нехай X – довільна множина. Неорієнтований граф $[D]$ є впорядкованою парою множин $(V([D]), E([D]))$, де $V([D]) = X$, а $E([D]) = \{\{u, v\} : u \neq v, (u, v) \in A(D) \vee (v, u) \in A(D)\}$.

Означення 3.14. Нехай D – орієнтований граф, а $u, v \in V(D)$. Кажуть, що v досяжна із u , якщо $u = v$ або:

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists u_1 = u, \dots, u_n = v \in V(D) : (u_1, u_2), \dots, (u_{n-1}, u_n) \in A(D).$$

3.2 Попередні результати

Твердження 3.15. $\beta_f = \{ \uparrow x : x \in X \}$ є базою деякої топології.

Доведення. Покажемо, що β_f дійсно є базою. Для цього скористаємося зовнішнім критерієм бази **Твердження 3.4**.

$$\bigcup_{B \in \beta_f} B = \bigcup_{B \in \{ \uparrow x : x \in X \}} B \supseteq \bigcup_{y \in \{ \{x\} : x \in X \}} y = \bigcup_{y \in X} y = X$$

Зафіксуємо $\uparrow x_1, \uparrow x_2 \in \beta_f$ та $x_3 \in \uparrow x_1 \cap \uparrow x_2$. У пункті 2 **Теорема 3.16** ми покажемо, що $\forall x_1, x_2 \in X : \uparrow x_1 \subseteq \uparrow x_2 \vee \uparrow x_2 \subseteq \uparrow x_1 \vee \uparrow x_1 \cap \uparrow x_2 = \emptyset$. Не втрачаючи загальності, покладемо $\uparrow x_1 \subseteq \uparrow x_2$. Розглянемо $B_3 = \uparrow x_3 \in \beta_f$. $x_3 \in \uparrow x_3$ – за означенням β_f . $\uparrow x_3 \subseteq \uparrow x_1 \cap \uparrow x_2$, бо $x_3 \in \uparrow x_1 \cap \uparrow x_2$. Отже, β_f дійсно є базою. \square

Теорема 3.16. *Нехай (X, τ) – простір Александрова. (X, τ) є функціональним простором Александрова тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні твердження:*

1. $\forall x, y \in X : V(x) \subseteq V(y) \vee V(y) \subseteq V(x) \vee V(x) \cap V(y) = \emptyset$;
2. $\forall x \in X : \left(\exists y \in X : V(x) \subset V(y) \implies \forall z \in X \setminus \{x\} : V(x) \neq V(z) \right)$;
3. $\forall x, y \in X : \{z \in X : V(x) \subseteq V(z) \subseteq V(y)\}$ – скінченна множина.

Доведення.

Необхідність: Нехай, (X, τ_f) є функціональним простором Александрова. Покажемо, що в такому разі для (X, τ_f) виконуються вищенаведені твердження.

① : Доведемо від супротивного. Нехай $\exists x, y \in X : (\uparrow x \not\subseteq \uparrow y) \wedge (\uparrow y \not\subseteq \uparrow x) \wedge (\uparrow y \cap \uparrow x \neq \emptyset)$. Тоді $\exists a \in X : a \in \uparrow x \wedge a \notin \uparrow y, \exists b \in X : b \in \uparrow y \wedge b \notin \uparrow x$ та $\exists c \in X : c \in \uparrow y \wedge c \in \uparrow x$. Звідси $\exists m, n \in \mathbb{N} : f^m(c) = a$ та $f^n(c) = b$. Нехай $m > n$. Тоді $b \in \uparrow a, a \in \uparrow x$, тобто $\uparrow a \subseteq \uparrow x$. Звідси

$b \in \uparrow x$. Отримали суперечність. $\not\Leftarrow$ Аналогічно для $n > m$. Якщо $m = n$, то $a = b \implies a \in \uparrow x \wedge a \notin \uparrow x$. Отримали суперечність. $\not\Leftarrow$

② : Доведемо від супротивного. Нехай $\exists x, y : \uparrow x \subset \uparrow y$ та $\exists z \in X \setminus \{x\} : \uparrow x = \uparrow z$. Оскільки $x \neq z$, то функціональний граф G_f міститиме цикл, серед вершин якого будуть точки x, y та z . Тобто $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x$. Не складно помітити, що $\forall i \in \mathbb{N} : \uparrow x = \uparrow f^i(x) = \uparrow f^{i \bmod n}(x)$. Також, оскільки $x \in \uparrow x \subset \uparrow y$, то $x \in \uparrow y$. Це означає, що $\exists m \in \mathbb{N} : f^m(x) = y$. Звідси маємо, що $\uparrow x = \uparrow y$. Отримали суперечність. $\not\Leftarrow$

③ : Зафіксуємо $x, y \in X$. Покажемо, що $[x, y] := \{z \in X : \uparrow x \subseteq \uparrow z \subseteq \uparrow y\}$ – скінченна множина. Розглянемо 2 випадки: $\uparrow x \subseteq \uparrow y$ та $\uparrow x \not\subseteq \uparrow y$. Якщо $\uparrow x \not\subseteq \uparrow y$, то $[x, y] = \emptyset$ – скінченна множина. Якщо ж $\uparrow x \subseteq \uparrow y$, то $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = y$, причому якщо $|\mathbb{M}| := |\{m \in \mathbb{N} : f^m(x) = y\}| > 1$, то нехай $n = \min_{m \in \mathbb{M}} m$. Зафіксуємо $z \in [x, y]$. Оскільки $\uparrow x \subseteq \uparrow z \subseteq \uparrow y$, то $\exists l, p \in \mathbb{N} : f^l(x) = z, f^p(z) = y$. Розглянемо 2 випадки: $l \leq n$ та $l > n$. Якщо $l \leq n$, то $z = f^l(x) \in \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x), y\}$. Якщо ж $l > n$, то маємо: $f^n(x) = y, f^{l-n}(y) = z, f^p(z) = y$. Звідси $f^{l-n+p}(y) = y$. Отже, маємо y – цикл. Тоді $z = f^{l-n}(y)$ – лежить на y – циклі (скінченна множина). Таким чином, $[x, y] = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x), y\} \cup [y]$ – скінченна множина, як об'єднання скінченних множин.

Достатність: Нехай для простору Александрова (X, τ) виконуються вищевведені твердження. Покажемо, що тоді такий простір дійсно є *функціональним* простором Александрова.

Розглянемо відношення еквівалентності на $X : a \sim b \iff V(a) = V(b)$.

Зафіксуємо $a \in X$. Покладемо $[a] := \{x \in X : V(x) = V(a)\} \in X_{/\sim}$.

За умовою 3, $\{z \in X : V(a) \subseteq V(z) \subseteq V(a)\} = \{z \in X : V(a) = V(z)\} = [a]$ – скінченна. Також $[a] \neq \emptyset$, оскільки $a \in [a]$.

Розглянемо 2 випадки:

1. Нехай $\exists y \in X : V(a) \subset V(y)$.

За умовою 2, $\forall z \in X \setminus \{a\} : V(a) \neq V(z)$. Таким чином, $[a] = \{a\}$.

За умовою 3, $\{z \in X : V(a) \subseteq V(z) \subseteq V(y)\} := [a, y]$ – скінченна.

За умовою 1, $\forall z_i, z_j \in [a, y] \subseteq X : V(z_i) \subseteq V(z_j) \vee V(z_j) \subseteq V(z_i) \vee V(z_i) \cap$

$V(z_j) = \emptyset$. Розглянемо $z_i, z_j \in [a, y] \subseteq X$. Оскільки $V(a) \subseteq V(z_i) \subseteq V(y)$ та $V(a) \subseteq V(z_j) \subseteq V(y)$, то $V(a) \subseteq V(z_i) \cap V(z_j)$.

В такому разі, $\forall z_i, z_j \in [a, y] \subseteq X : V(z_i) \subseteq V(z_j) \vee V(z_j) \subseteq V(z_i)$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $V(a) \subset V(z_1) \subseteq V(z_2) \subseteq \dots \subseteq V(z_n) \subseteq V(y)$, де $[a, y] = \{a, z_1, \dots, z_n, y\}$. Покладемо $f(a) = z_1$.

2. Нехай $\forall y \in X : V(a) \not\subseteq V(y)$.

Нехай $[a] = \{a_1, \dots, a_n\}$. Покладемо $\forall i \in \overline{1, n-1} : f(a_i) = a_{i+1}$ та $f(a_n) = a_1$.

Також зауважимо, що $\forall a \in X \exists! [a] \in X_{/\sim} : a \in [a]$. Отже, f – коректно визначена.

Покажемо, що τ_f – функціональний простір Александрова. Для цього зафіксуємо точку $x \in X$ та покажемо, що $V(x) = \uparrow x$. Для цього продемонструємо, що $V(x) \subseteq \uparrow x$ та $V(x) \supseteq \uparrow x$.

$\forall a \in X : a \in V(x) \implies z \in \uparrow x :$

Нехай $a \in V(x)$. Розглянемо множину $[a, x]$. За умовою 3, вона є скінченною. За допомогою методу математичної індукції покажемо, що $a \in \uparrow x$. База індукції $|[a, x]| = 1 : a = x \in \uparrow x$. Крок індукції $|[a, x]| \geq 2$. Якщо $V(a) = V(x)$, то за побудовою f , a та x лежать у спільному циклі. Звідси маємо, що $a \in \uparrow x$. Нехай тепер $V(a) \subset V(x)$. Тоді розглянемо y , такий, що $V(a) \subset V(y)$. Нехай $[a, x] = \{a, z'_1, \dots, z'_m = x\}$, а $[a, y] = \{a, z_1, \dots, z_n = y\}$. Розглянемо 2 наступні варіанти: $z'_1 \neq z_1$ та $z'_1 = z_1$.

Нехай $z'_1 \neq z_1$. Тоді $V(a) \subset V(z'_1) \cap V(z_1)$. За умовою 1, $V(z'_1) \subseteq V(z_1)$ або $V(z_1) \subseteq V(z'_1)$. Якщо $V(z'_1) \subset V(z_1)$, то $z'_1 \in [a, y]$. Тому $z'_1 = z_i$ для $i \geq 2$. Отримали суперечність, оскільки $V(z_1) \subseteq V(z_i)$. Аналогічні міркування можемо застосувати і для випадку $V(z_1) \subset V(z'_1)$, а отже $V(z_1) = V(z'_1)$. В такому разі, за умовою 2: $V(z_1) = V(z'_1) = V(z'_2) = \dots = V(x)$. За побудовою f , z_1 та x лежать на спільному циклі, але при цьому $z_1 = f(a)$. Отже, $a \in \uparrow x$.

Тепер нехай $z'_1 = z_1$. Оскільки $[z'_1, x] \subset [a, x]$ та $a \notin [z'_1, x]$, то $z'_1 \in V(x)$ та $|[z'_1, x]| < |[a, x]|$. За умовою 2, $V(a) \subset V(z'_1)$, бо $V(a) \subset V(z)$. За

припущенням індукції, $z'_1 \in \uparrow x$, але $f(a) = z_1 = z'_1 \in \uparrow x$ – за побудовою. Отже, $a \in \uparrow x$.

$\forall a \in X : a \in \uparrow x \implies a \in V(x) :$

Нехай $a \in \uparrow x$. Тоді $\exists n \geq 0 : f^n(a) = x$. Покажемо за допомогою методу математичної індукції, що $a \in V(x)$. База індукції $n = 0 : a = x \in V(x)$. Крок індукції $n \geq 1$: розглянемо елемент $b = f(a)$. Тоді $f^{n-1}(b) = x$. За припущенням індукції, $b \in V(x)$. Звідси $V(b) \subset V(x)$. За побудовою f маємо: $V(a) \subseteq V(f(a))$. Тому $a \in V(a) \subseteq V(b) \subset V(x)$. Отже, $a \in V(x)$. \square

Приклад 3.17. Наведемо приклад простору Александрова, що задовольняє ① та ② умови, але не задовольняє умову ③.

Нехай $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Топологія τ породжена базою $\beta = \{V(n) : n \in X\}$, де $V(0) = 0$, а $\forall n \in \mathbb{N} : V(n) = \{0, n, n+1, \dots\}$. Спершу покажемо, що такий набір відкритих множин дійсно є базою. Для цього скористаємося зовнішнім критерієм бази **Твердження 3.4**.

$$\bigcup_{V(n) \in \beta} V(n) \supseteq V(1) = \mathbb{N} \cup \{0\} = X$$

Зафіксуємо $V(m), V(n) \in \beta, m \geq n$ та $x \in V(m) \cap V(n) = V(m)$. Розглянемо $V(x) \in \beta$. Тоді $x \in V(x) \subseteq V(m)$.

Тепер покажемо, що наведений простір Александрова задовольняє умови ① та ②. Виконання умови ① є очевидним. Перевіримо виконання умови ②. Зафіксуємо точку $x \in X, x \notin \{0, 1\}$. Тоді $\exists y = x-1 \in X : V(x) \subset V(x-1)$. Зафіксуємо точку $z \in X \setminus \{x\}$. Дійсно, $V(x) \neq V(z)$. Якщо $x = 0$, то $\exists y = 1 \in X : V(0) = 0 \subset V(1) = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді $\forall z \in \mathbb{N} : V(0) = 0 \neq V(z)$. Якщо ж $x = 1$, то $\nexists y \in X : V(1) = X \subset V(y)$.

Нарешті продемонструємо, що $\exists x, y \in X : \{z \in X : V(x) \subseteq V(z) \subseteq V(y)\}$ – нескінченна множина. Розглянемо точки $x = 0$ та $y = 1$. $V(0) = 0$, $V(1) = \mathbb{N} \cup \{0\} = X$. Тоді $\{z \in X : 0 \subseteq V(z) \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}\} = X$ – нескінченна.

Приклад 3.18. Наведемо приклад простору Александрова, що задовольняє ① та ③ умови, але не задовольняє умову ②.

Нехай $X = \{a, b, c\}$. Розглянемо наступну топологію τ на X : $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$. Виконання умов ① та ③ є очевидним. Покажемо, що $\exists x \in X : \left(\exists y \in X : V(x) \subset V(y) \right) \wedge \left(\exists z \in X \setminus \{x\} : V(x) = V(z) \right)$. Нехай $x = a$, тоді $\exists y = c \in X : V(a) = \{a, b\} \subset V(c) = X$ та $\exists z = b \in X \setminus \{a\} : V(a) = \{a, b\} = V(b)$.

Приклад 3.19. Наведемо приклад простору Александрова, що задовольняє ② та ③ умови, але не задовольняє умову ①.

Нехай $X = \{a, b, c\}$. Розглянемо наступну топологію τ на X : $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Виконання умови ③ є очевидним. Покажемо, що $\forall x \in X : \left(\exists y \in X : V(x) \subset V(y) \implies \forall z \in X \setminus \{x\} : V(x) \neq V(z) \right)$.

- $x = a : \exists y = b : V(a) = \{a\} \subset V(b) = \{a, b\}$. Покажемо, що $\forall z \in \{b, c\} : V(a) \neq V(z)$. Якщо $z = b$, то $V(a) = \{a\} \neq V(b) = \{a, b\}$. Якщо ж $z = c$, то $V(a) = \{a\} \neq V(c) = \{a, c\}$.
- $x = b : \nexists y : V(b) = \{a, b\} \subset V(y)$.
- $x = c : \nexists y : V(c) = \{a, c\} \subset V(y)$.

Тепер покажемо, що $\exists x, y \in X : (V(x) \not\subset V(y)) \wedge (V(y) \not\subset V(x)) \wedge (V(y) \cap V(x) \neq \emptyset)$. Нехай $x = b, y = c$. Тоді $(V(b) = \{a, b\} \not\subset V(c) = \{a, c\}) \wedge (V(c) = \{a, c\} \not\subset V(b) = \{a, b\}) \wedge (V(c) \cap V(b) = \{a, c\} \cap \{a, b\} = \{a\} \neq \emptyset)$.

4 Основні результати

4.1 ФПА та аксіоми відокремлюваності

Лема 4.1. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александрова. Одноточкова множина $\{x\}$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли $x \notin f(X)$.*

Доведення.

Достатність: Доведемо від супротивного. Нехай x – відкрита множина та $\exists y \in X, x \neq y : f(y) = x$. Оскільки x – відкрита, то найменший окіл $\uparrow x = \{x\}$, але $\{x\}$ не може бути найменшим околом точки x , адже $f^{-1}(x) = y$, тобто $\uparrow x = \{x\} \cup \{y\} \cup \dots$. Отримали суперечність. $\not\Leftarrow$

Необхідність: Нехай $\forall y \in X, x \neq y : f(y) \neq x$. Тоді $\uparrow x = \{x\}$. Звідси маємо, що x – відкрита множина. \square

Лема 4.2. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александрова. Одноточкова множина $\{x\}$ є замкненою тоді і тільки тоді, коли $f(x) = x$.*

Доведення.

Достатність: Нехай $f(x) = x$. Тоді $\forall a \in X_{/x} : x \notin \uparrow a$. Розглянемо множину $X \setminus \{x\}$:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{a \in X \setminus \{x\}} \uparrow a - \text{відкрита}$$

Звідси маємо, що $\{x\}$ – замкнена.

Необхідність: Доведемо від супротивного. Нехай $\{x\}$ – замкнена та $\exists y \in X, y \neq x : y = f(x)$. Тоді $X \setminus \{x\}$ – відкрита, а отже її можна представити у вигляді об'єднання елементів з бази:

$$\begin{aligned} X \setminus \{x\} &= \bigcup_{z \in (X \setminus \{x\})} \uparrow z = \bigcup_{z \in (X \setminus (\{x\} \cup \{y\}))} \uparrow z \cup \uparrow y = \\ &= \bigcup_{z \in (X \setminus (\{x\} \cup \{y\}))} \uparrow z \cup \{y\} \cup \{x\} \cup \dots = X. \end{aligned}$$

Отримали суперечність. ζ

□

Твердження 4.3. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александра. Тоді (X, τ_f) задовольняє T_0 - аксіому відокремлюваності тоді і тільки тоді, коли кожна f – періодична точка є нерухомою.*

Доведення.

Достатність: Нехай кожна f – періодична точка є нерухомою. Покажемо, що тоді $\forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \tau : (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$. Зафіксуємо довільні точки $x, y \in X, x \neq y$. Розглянемо 2 випадки: «принаймні одна з двох фіксованих точок є періодичною» та «жодна з точок не є періодичною».

Нехай точка x – періодична, тобто $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x$. Покажемо, що $\exists U \in \tau : (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$. Тоді вона є нерухомою: $f(x) = x$. Тоді за **Лемою 4.2** одноточкова множина $\{x\}$ є замкненою. Звідси $X \setminus \{x\} \in \tau$. Таким чином $U = X \setminus \{x\} \in \tau : x \notin X \setminus \{x\} \wedge y \in X \setminus \{x\}$ – бо $x \neq y$. Аналогічні міркування можемо застосувати і для випадку, якщо періодичною є точка y .

Нехай x та y не є періодичними. Оскільки $x \neq y$, то $\uparrow x \neq \uparrow y$. За **Твердженням 3.16**, $\forall x, y \in X : \uparrow x \subseteq \uparrow y \vee \uparrow y \subseteq \uparrow x \vee \uparrow x \cap \uparrow y = \emptyset$. Таким чином, маємо: $\uparrow x \subset \uparrow y \vee \uparrow y \subset \uparrow x \vee \uparrow x \cap \uparrow y = \emptyset$. Нехай $\uparrow x \subset \uparrow y$. Тоді $U = \uparrow x \in \tau : x \in \uparrow x \wedge y \notin \uparrow y$. Аналогічні міркування можемо застосувати і для випадку $\uparrow y \subset \uparrow x$. Якщо ж $\uparrow x \cap \uparrow y = \emptyset$, то в якості U можемо обрати будь-яку з двох множин: $\uparrow x$ або $\uparrow y$.

Необхідність: Доведемо від супротивного. Нехай функціональний простір Александра задовольняє T_0 - аксіому відокремлюваності та існує періодична точка a , яка не є нерухомою. $\forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \tau : (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$ та $\exists z \in X_{/a} \exists m, n \in \mathbb{N} : (f^n(a) = z) \wedge (f^m(z) = a)$. Звідси $\uparrow a = \uparrow z$, причому $z \in \uparrow a$ та $a \in \uparrow z$. Покажемо, що $\exists x, y \in X, x \neq y \forall U \in \tau : (x \notin U \vee y \in U) \wedge (x \in U \vee y \notin U)$. Для цього розглянемо точки $a, z \in X$ та зафіксуємо довільну відкриту множину $U \subseteq X$. Оскільки $U \in \tau$, то $U = \bigcup_{c \in U} \uparrow c$. Тому $((a \notin U \vee z \in U) \wedge (a \in U \vee z \notin U)) \iff ((\uparrow a \notin U \vee \uparrow z \in U) \wedge (\uparrow a \in U \vee \uparrow z \notin U))$. Оскільки $\uparrow a = \uparrow z$, то маємо: $((\uparrow a \notin U \vee \uparrow a \in U) \wedge (\uparrow z \in U \vee \uparrow z \notin U)) \iff 1$. Отже, отримали суперечність. ζ

□

Лема 4.4. *Нехай (X, τ) – довільний топологічний простір. Якщо (X, τ) є субмаксимальним (Означення 3.8), то він задовольняє $T_{1/2}$ аксіому відокремлюваності (Означення 3.6).*

Доведення. Нехай $\forall U \subseteq X : U$ – всюди щільна $\implies U$ – відкрита. Зафіксуємо точку $x \in X$. Покажемо, що якщо $\{x\}$ – не відкрита, то $\{x\}$ – замкнена. Оскільки $\{x\}$ – не відкрита, то $X \setminus \{x\}$ – всюди щільна множина. З субмаксимальності простору (X, τ) маємо, що $X \setminus \{x\}$ – відкрита. Звідси $\{x\}$ – замкнена, як доповнення до відкритої множини. Тепер покажемо, що якщо $\{x\}$ – не замкнена, то $\{x\}$ – відкрита. Оскільки $\{x\}$ – не замкнена, то $X \setminus \{x\}$ – не відкрита. З субмаксимальності простору (X, τ) маємо, що $X \setminus \{x\}$ – не всюди щільна. Натомість X – всюди щільна. Звідси маємо, що $\{x\}$ – відкрита множина. \square

Твердження 4.5. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александра. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. (X, τ_f) задовольняє $T_{1/2}$ - аксіому відокремлюваності (Означення 3.6);
2. $\forall A \subseteq X : f(A)$ – замкнена;
3. f є ідемпотентною ($\forall x \in X : f(f(x)) = f(x)$);
4. (X, τ_f) є субмаксимальним простором (Означення 3.8).

Доведення. Доведемо дане твердження "по колу".

① \implies ② : Покажемо, що $\forall x \in X : \{x\}$ – відкрита $\vee \{x\}$ – замкнена $\implies \forall A \subseteq X : f(A)$ – замкнена. Зафіксуємо множину $A \subseteq X$. Покажемо, що $\forall a \in A \subseteq X : f(a)$ – замкнена. І тоді матимемо: $\bigcup_{a \in A} f(a) = \{f(a) : a \in A\} = f(A)$ – замкнена, бо простір Александра.

Розіб'ємо це твердження на дві частини, розглянувши відкриті одноточкові та замкнені одноточкові множини окремо.

Покажемо, що $\forall x \in X, \{x\}$ – відкрита : $f(x)$ – замкнена. Доведемо від супротивного. Нехай $\exists x \in X, \{x\}$ – відкрита : $f(x)$ – не замкнена. В силу

$T_{1/2} : f(x)$ – відкрита. Але $f(x)$ не може бути відкритою, оскільки $\{x\} \cup \{f(x)\} \subseteq \uparrow f(x)$ – найменший окіл $\{f(x)\}$. Отримали суперечність. ζ

У **Лемі 4.2** ми показали еквівалентність умов « $\{x\}$ є замкненою множиною» та наступної умови: $\forall y \in X, x \neq y : y \neq f(x)$ (або інакше: $f(x) = x$). Звідси маємо: $\forall x \in X, \{x\}$ – замкнена : $f(x) = x$. Отже, і $f(x)$ – замкнена.

② \implies ③ : Доведемо від супротивного. Нехай $\forall A \subseteq X : f(A)$ – замкнена множина та $\exists x \in X : f(f(x)) \neq f(x)$. В такому разі маємо, що: $\exists y \in X_{/x} : y = f(x)$ та $\exists z \in X_{/y} : z = f(y)$. Розглянемо одноточкову множину $\{x\}$. Її образ $f(x) = y$ є замкненою множиною. За **Лемою 4.2** $f(y) = z \neq y$. Отримали суперечність. ζ

③ \implies ④ : Доведемо від супротивного. Нехай f є ідемпотентною, тобто $\forall x \in X : f(f(x)) = f(x)$ та $\exists U \subseteq X : U$ – всюди щільна та U – не відкрита. Оскільки U – не відкрита, то маємо, що: $f^{-1}(U) \not\subseteq U$. Це означає, що $\exists x \in X : x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin U$. Звідси $\exists x \in X : f(x) \in U \wedge x \notin U$. Оскільки f – ідемпотентна, то $\forall y \in X_{/x} : f(y) \neq x$, тобто $f^{-1}(x) = \emptyset$. Тоді $\{x\}$ – відкрита, бо $\uparrow x = \{x\}$, але $x \notin U$. Отже, U – не всюди щільна множина. Отримали суперечність. ζ

④ \implies ① : За **Лемою 4.4** маємо доведення і для ФПА. □

Наслідок 4.6. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александрова, що задовольняє $T_{1/2}$ - аксіому відокремлюваності. Тоді він є простором Вайберна (Твердження 3.9).*

Доведення. Нехай (X, τ_f) задовольняє $T_{1/2}$ - аксіому відокремлюваності, тобто за **Твердженням 4.5** : $\forall x \in X : f(f(x)) = f(x)$. Зафіксуємо точку $x \in X$. Тоді $\downarrow x = \{x\} \cup \{f(x)\}$. Таким чином, дійсно $|\downarrow x| \leq 2$. □

Твердження 4.7. *Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Александрова. Тоді (X, τ_f) задовольняє T_1 - аксіому відокремлюваності (Означення 3.7) тоді і тільки тоді, коли $\forall x \in X : f(x) = id(x) = x$.*

Доведення.

Достатність: Нехай $\forall x \in X : f(x) = x$. Тоді $\forall x \in X : \uparrow x = \{x\}$ – відкрита множина. Звідси $\forall x \in X : X \setminus \{x\}$ – відкрита, як довільне об'єднання відкритих одноточкових множин $\{y\}$ для всіх $y \in X \setminus \{x\}$. Отже, $\forall x \in X : \{x\}$ – замкнена.

Необхідність: Оскільки T_1 - простір задовольняє умови $T_{1/2}$ - простору, то вже маємо маємо необхідне доведення у **Лемі 4.2**. \square

4.2 Неперервність відображення у ФПА

Твердження 4.8. *Нехай X, Y – довільні множини, $f : X \rightarrow X$, $f' : Y \rightarrow Y$. Тоді $g : (X, \tau_f) \rightarrow (Y, \tau_{f'})$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли g як відображення із Γ_f у $\Gamma_{f'}$ зберігає відношення досяжності.*

Доведення.

Необхідність: Нехай $a, b \in X$ та b досяжна з a в графі Γ_f . Тоді $\exists n \geq 0 : f^n(a) = b$. Тому $b \in \text{Cl}\{a\}$. $g(\text{Cl}\{a\}) \subseteq \text{Cl}(g(\{a\})) = \text{Cl}(\{g(a)\})$. Тому $g(b) \in \text{Cl}(\{g(a)\})$. Звідси маємо, що $g(b)$ досяжна з $g(a)$ в графі $\Gamma_{f'}$.

Достатність: Нехай $x \in X$. Покажемо, що відображення g є неперервним в точці x . Для цього продемонструємо, що $g(V_f(x)) \subseteq V_{f'}(g(x))$. Нехай $y \in g(V_f(x))$. Тоді $y = g(a)$ для деякого $a \in V_f(x)$. Тоді x досягається із a в графі Γ_f . За умовою, $g(x)$ досягається із $g(a)$ в графі $\Gamma_{f'}$. Тому $g(a) \in V_{f'}(g(x))$. \square

Наслідок 4.9. *Нехай $f : X \rightarrow X$. Тоді $f : (X, \tau_f) \rightarrow (X, \tau_f)$ є неперервним.*

Доведення. Нехай $a, b \in V(\Gamma_f)$ та b досягається із a в Γ_f . Тоді $\exists n \geq 0 : f^n(a) = b$. Звідси маємо, що $f(f^n(a)) = f^n(f(a)) = f(b)$. Таким чином, $f(b)$ досягається із $f(a)$ у Γ_f . Отже, за **Твердженням 4.8** відображення f є неперервним. \square

Лема 4.10. *Нехай $f : X \rightarrow Y$. Тоді $\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(f^{-1}(A))) = f^{-1}(A)$.*

Доведення. Зафіксуємо множину $A \subseteq X$. Покажемо, що $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(A)))$. Нехай $B := f^{-1}(A)$. Дійсно, тоді $B \subseteq f^{-1}(f(B))$.

Тепер покажемо, що $f^{-1}(f(f^{-1}(A))) \subseteq f^{-1}(A)$. Оскільки $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$, а також за монотонністю прообразу f^{-1} маємо, що $f^{-1}(f(f^{-1}(A))) \subseteq f^{-1}(A)$.

Таким чином маємо, що $\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(f^{-1}(A))) \subseteq f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(A)))$, що еквівалентно: $\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(f^{-1}(A))) = f^{-1}(A)$. \square

Твердження 4.11. [*Опис найбільшої топології τ на X , відносно якої f – неперервна*] Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Алєксандрова, (X, τ) – довільний топологічний простір. Нехай $f : (X, \tau_f) \rightarrow (X, \tau)$ – неперервна. Тоді $\tau = \{U \subseteq X : f^{-1}(U) \setminus U \subseteq X \setminus f(X)\}$ є найбільшою топологією на X , відносно якої f – неперервна.

Доведення.

Спершу покажемо, що даний набір множин дійсно є топологією.

1. $\emptyset, X \in \tau$ – очевидно.
2. Нехай $\forall i \in \mathbb{I} : \{U_i \subseteq X : i \in \mathbb{I}\} \subseteq \tau$. Покажемо, що тоді $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i \in \tau$.

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i\right) &= \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} f^{-1}(U_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i\right) = \\ &= \bigcup_{j \in \mathbb{I}} \left(f^{-1}(U_j) \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i\right) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{I}} \left(f^{-1}(U_j) \setminus U_j\right) \subseteq X \setminus f(X). \end{aligned}$$

3. Нехай $U_1, U_2 \in \tau$. Покажемо, що тоді $(U_1 \cap U_2) \in \tau$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1 \cap U_2) \setminus (U_1 \cap U_2) &= \left(f^{-1}(U_1 \cap U_2) \setminus U_1\right) \cup \left(f^{-1}(U_1 \cap U_2) \setminus U_2\right) \subseteq \\ &\subseteq \left(f^{-1}(U_1) \setminus U_1\right) \cup \left(f^{-1}(U_2) \setminus U_2\right) \subseteq X \setminus f(X). \end{aligned}$$

Тепер покажемо, що $f : (X, \tau_f) \rightarrow (X, \tau)$ дійсно є неперервною. Для цього зафіксуємо $U \in \tau$ та продемонструємо, що $f^{-1}(U) \in \tau_f$. Розглянемо множину $f^{-1}(f^{-1}(U)) = \left(f^{-1}(f^{-1}(U) \cap U) \cup f^{-1}(f^{-1}(U) \setminus U)\right) \subseteq f^{-1}(U)$, бо $\left(f^{-1}(U) \cap U\right) \subseteq U$ та $f^{-1}(f^{-1}(U) \setminus U) = \emptyset$ (бо $U \in \tau$). Таким чином, за **Лемою 3.3** $f^{-1}(U) \in \tau_f$.

Нарешті, покажемо, що топологія $\tau = \{U \subseteq X : f^{-1}(U) \setminus U \subseteq X \setminus f(X)\}$ є найбільшою топологією на X , відносно якої f – неперервна, тобто: $\forall \tau_0 \subseteq 2^X, f : (X, \tau_f) \rightarrow (X, \tau_0)$ – неперервна, $\forall U \in X : U \in \tau_0 \implies U \in \tau$.

Зафіксуємо довільну топологію τ_0 та відкриту множину $U \in \tau_0$. Оскільки f – неперервна, то $f^{-1}(U) \in \tau_f$. За **Лемою 3.3** $f^{-1}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(U)$. Продемонструємо, що $f^{-1}(U) \setminus U \subseteq X \setminus f(X)$. Для цього покажемо, що $\forall x \in f^{-1}(U) \setminus U : x \in X \setminus f(X)$. Зафіксуємо точку $x \in f^{-1}(U) \setminus U$. Це означає, що $x \in f^{-1}(U)$ та $x \notin U$. Звідси $f(x) \in U$ та $x \notin U$.

Покажемо, що тоді $\forall y \in X_{/x} : f(y) \neq x$. Доведемо від супротивного. Нехай $\exists y \in X_{/x} : f(y) = x$. В такому разі $f(y) \notin U$ та $f(y) \in f^{-1}(U)$. З останнього маємо, що: $y \in f^{-1}(f(y)) \subseteq f^{-1}(f^{-1}(U)) \implies y \in f^{-1}(f^{-1}(U))$. Оскільки $f^{-1}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(U)$ – за **Лемою 3.3**, то з цього слідує, що $y \in f^{-1}(U)$. Нарешті, $f(y) \in U$. Отримали суперечність. \nmid

Оскільки $\forall y \in X_{/x} : f(y) \neq x$, то $f^{-1}(x) = \emptyset$. Звідси маємо, що $x \in X \setminus f(X)$. \square

Лема 4.12. *Нехай $f : X \rightarrow Y$, де X – довільна множина, а (Y, τ) – топологічний простір. Тоді $\tau_{min} = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ є найменшою топологією на X , відносно якої f – неперервна.*

Доведення. Спочатку покажемо, що τ_{min} дійсно є топологією на X :

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_{min}$ та $f^{-1}(X) = X \in \tau_{min}$
2. Нехай $\forall i \in \mathbb{I} : \{U_i \subseteq X : i \in \mathbb{I}\} \subseteq \tau$. Покажемо, що тоді $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i \in \tau$.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} f^{-1}(U_i) \in \tau$$

3. Нехай $U_1, U_2 \in \tau$. Покажемо, що тоді $(U_1 \cap U_2) \in \tau$.

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \in \tau$$

Очевидно, що $f : (X, \tau_{min}) \rightarrow (Y, \tau)$ є неперервною, бо дана топологія τ_{min} і утворена прообразами відкритих множин в τ . Також очевидно, що τ_{min} є найменшою топологією, адже будь-яка інша топологія τ_0 має її містити, аби відображення $f : (X, \tau_0) \rightarrow (Y, \tau)$ було неперервним. \square

Твердження 4.13. [*Опис найменшої топології τ на X , відносно якої f – неперервна*] Нехай (X, τ_f) – функціональний простір Алєксандрова, (X, τ) – довільний топологічний простір. Нехай $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_f)$ – неперервна. Тоді $\tau = \{U \in \tau_f : f^{-1}(f(U)) = U\}$ є найменшою топологією на X , відносно якої f – неперервна.

Доведення. Скористаємося **Лемою 4.12** та покажемо, що $\tau = \tau_{min}$.

Спершу продемонструємо, що $\tau_{min} \subseteq \tau$. Нехай $V \in \tau_{min}$. Тоді $V = f^{-1}(U)$ для деякого $U \in \tau_f$. Покажемо, що $V = f^{-1}(U) \in \tau_f$. За **Лемою 3.3** $f^{-1}(U) \subseteq U$. За монотонністю прообразу маємо: $f^{-1}(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(U)$. Таким чином, $f^{-1}(V) \subseteq V$. Звідси так само за **Лемою 3.3** $V \in \tau_f$. Нарешті, за **Лемою 4.10** маємо, що $f^{-1}(f(V)) = V$.

Тепер покажемо, що $\tau \subseteq \tau_{min}$. Зафіксуємо множину $V \in \tau$. Тоді $V \in \tau_f$ та $f^{-1}(f(V)) = V$. З **Лемами 3.3** маємо, що $f^{-1}(V) \subseteq V$. Покажемо, що $\exists U \in \tau_f : f^{-1}(U) = V$. Розглянемо множину $U = f(V) \cup V$. В такому разі маємо: $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(V) \cup V) = f^{-1}(f(V)) \cup f^{-1}(V) = V \cup f^{-1}(V) = V$. Оскільки $f^{-1}(U) = V \subseteq f(V) \cup V = U$, то за **Лемою 3.3** $U \in \tau_f$. \square

5 Програма на мові Java

Програма приймає в якості вхідних даних множину точок та набір відкритих множин, утворених з попередньо введених точок. Після цього проводиться перевірка на те, чи задовольняє заданий простір аксіоми топології. (Зауважимо, що на скінченному носії поняття топологічного простору та простору Александрова є еквівалентними). У разі успіху застосунок визначає чи є простір функціональним простором Александровим, перевіряючи умови функціональності простору Александрова відповідно до **Теорема 3.16**.

В якості класу, що інкапсулює усі логіку, відповідальну за перевірку простору на умови ФПА виступає клас *Determinant*, параметризований типом $\langle T \rangle$. Серед полів класу: множина точок простору *space*, набір відкритих множин *topology* та мапа *smallestNeighbourhoods*, яка ставить у відповідність кожній з точок простору її найменший окіл. Також зауважимо, що для перевірки заданого простору на аксіоми топології ми використовуємо:

- комбінаторну функцію *Sets.combinations(Set < E > set, final int size)* від Google Guava, яка знадобиться нам для перебору усіх можливих комбінацій об'єднань та перетинів відкритих множин;
- бібліотеку Lombok, яка дозволить не писати «зайвий» код та за допомогою анотацій *@Data* та *@AllArgsConstructor* згенерує необхідний конструктор, а також гетери та сетери.

```
import com.google.common.collect.Sets;
import lombok.AllArgsConstructor;
import lombok.Data;
import java.util.*;

@Data
@AllArgsConstructor
public class Determinant<T> {

    private Set<T> space;
    private Set<Set<T>> topology;
    private Map<T, Set<T>> smallestNeighbourhoods;
    ...
}
```

Розглянемо алгоритм роботи програми та її основні методи.

```
boolean isFAS() {
    return isTopology() && satisfyFirstCondition() &&
        satisfySecondCondition();
}
```

isFAS() – метод, що визначає чи є заданий простір ФПА. Для цього перевіряємо чи є даний простір топологічним та чи задовольняє він перші дві умови з **Теорема 3.16**. Зауважимо, що для скінченних просторів виконання третьої умови є «безкоштовним», а отже не потребує перевірки.

```
boolean isTopology() {
    return isIntersectionOpen() && isUnionOpen();
}

boolean isIntersectionOpen() {
    for (int i = 2; i < space.size(); i++) {
        Set<Set<Set<T>>> setCombinations =
            Sets.combinations(topology, i);
        for (Set<Set<T>> family : setCombinations) {
            Set<T> intersection = new HashSet<>(space);
            for (Set<T> set : family) {
                intersection.retainAll(set);
                if (!topology.contains(intersection)) { return false; }
            }
        }
    }
    return true;
}

boolean isUnionOpen() {
    for (int i = 2; i < space.size(); i++) {
        Set<Set<Set<T>>> setCombinations =
            Sets.combinations(topology, i);
        for (Set<Set<T>> family : setCombinations) {
            Set<T> union = new HashSet<>();
            for (Set<T> set : family) {
                union.addAll(set);
                if (!topology.contains(union)) { return false; }
            }
        }
    }
    return true;
}
```

isTopology() – визначає чи є заданий простір топологічним. Для цього перевіряємо дві аксіоми топології: довільний перетин скінченної кількості

множин з заданого набору має міститися в цьому наборі, так само як і довільне об'єднання. Зауважимо, що виконання першої аксіоми забезпечує сама програма, автоматично додаючи множину всіх введених елементів простору *space* до набору відкритих множин *topology*.

```

boolean satisfyFirstCondition() {
    if (space.size() == 1) { return true; }
    Set<Set<T>> pairs = Sets.combinations(space, 2);
    for (Set<T> pair : pairs) {
        List<T> aList = new ArrayList<>(pair);
        Set<T> vx = new HashSet<>
            (smallestNeighbourhoods.get(aList.get(0)));
        Set<T> vy = new HashSet<>
            (smallestNeighbourhoods.get(aList.get(1)));
        Set<T> superSet = vx.size() >= vy.size() ? vx : vy;
        Set<T> subSet = vx.size() < vy.size() ? vx : vy;
        Set<T> intersection = Sets.intersection(superSet, subSet);
        if (!intersection.equals(subSet) && !intersection.isEmpty()) {
            return false;
        }
    } return true;
}

```

satisfyFirstCondition() – визначає чи задовольняє заданий топологічний простір першу умову з **Теорема 3.16**.

```

boolean satisfySecondCondition() {
    for (T x : space) {
        if (!existSuperset(x)) { continue; }
        if (!checkImplication(x)) { return false; }
    } return true;
}

boolean existSuperset(T element_x) {
    Set<T> vx = smallestNeighbourhoods.get(element_x);
    for (T y : space) {
        Set<T> vy = new HashSet<>(smallestNeighbourhoods.get(y));
        vy.removeAll(vx);
        if (!vy.isEmpty()) { return true; }
    } return false;
}

boolean checkImplication(T element_x) {
    Set<T> spaceMinusX = new HashSet<>(space);
    spaceMinusX.remove(element_x);
    for (T z : spaceMinusX) {

```

```
        if (smallestNeighbourhoods.get(element_x)
            .equals(smallestNeighbourhoods.get(z))) {
            return false;
        }
    } return true;
}
```

satisfySecondCondition() – визначає чи задовольняє заданий топологічний простір другу умову з **Теорема 3.16**.

6 Висновки

У розділі **Розділі 3.1** «Означення та твердження» ми навели основні означення понять, пов'язаних з ПА та ФПА, а також необхідні для подальшого доведення твердження.

У розділі **Розділі 3.2** «Попередні результати» ми показали, що набір відкритих множин, утворених прообразами точок довільної множини X дійсно є базою певної топології, а також розглянули критерій функціонального простору Александрова **3.16**, сформульований іранськими математиками Фатемою Ширазі (англ. Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi) та Насером Голестані (англ. Nasser Golestani) у публікації під назвою «Functional Alexandroff Spaces» [3]. Натомість, у своєму доведенні критерію, іранські математики допустили декілька дуже суттєвих помилок. Таким чином, увесь хід доведення Ф. Ширазі та Н. Голестані виявився хибним. У розділі **Розділі 3.2** вищезгаданий критерій було доведено.

У **Розділі 4.1** «ФПА та аксіоми відокремлюваності» ми сформулювали декілька допоміжних лем та дослідили аксіоми відокремленості в контексті Александровських просторів, знайшовши необхідні та достатні умови для просторів Колмогорова, $T_{1/2}$ просторів та просторів Фреше. Подальший розгляд T_2 , $T_{2_{1/2}}$, T_3 , $T_{3_{1/2}}$, T_4 , T_5 , T_6 аксіом відокремлюваності є тривіальним та не має змісту, адже вже при розборі ФПА, які є просторами Фреше ми побачили, що такі простори є дискретними.

У **Розділі 4.2** «Неперервність відображення у ФПА» ми навели декілька необхідних для подальшого доведення лем та сформулювали критерій неперервності відображення між двома ФПА у термінах графів. Наслідком з цього стала неперервність відображення ФПА у самого себе, що послугувало мотивацією для опису найбільшої та найменшої топологій, відносно яких відображення між ФПА та цима топологіями є неперервним.

У **Розділі 5** «Програма на мові Java» ми реалізували деякі теоретичні результати, отримані у розділі **Розділі 3.2**, розробивши написаний на мові Java консольний застосунок. Ми описали алгоритм роботи програми, її основні методи та використані бібліотеки.

Література

- [1] P. Alexandroff: *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S.) 2, 501-518, (1937).
- [2] M. Mürger: *Topology for the working mathematician* (2020).
- [3] F. A. Z. Shirazi & N. Golestani: *Functional Alexandroff Spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 40 (4), University of Tehran, Iran (2011).
- [4] S. Lazaar, H. Sabri & R. Tahri: *Structural and Numerical Studies of Some Topological Properties for Alexandroff Spaces*, Iranian Mathematical Society, Springer (2021).
- [5] N. Levine: *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo 19 (1970).
- [6] В. М. Бабич & В. О. Пехтерев: *Загальна топологія в задачах і прикладах, "Аксиома"* (2015).
- [7] H. B. Mahdi & M. S. Elatrash: *On T_0 – Alexandroff Spaces*, Journal of The Islamic University, Vol.13, No.2 , P19-46 (2005).
- [8] A. E. Hashoosh, H. R. Mohammed & H. J. Mustafa: *Alexandroff space as applied to image analysis and Edge Detection*, University of Kufa (2013).
- [9] Mohammad S. Elatrash & Sahar F. Alsamak: *Preopen and semi-open in T_0 -Alexandroff space*, Gaza, Palestine (2006).
- [10] M. C. McCord: *Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math. Jour 33, 465-474 (1966).
- [11] F.G. Arenas: *Some results on Alexandroff space*, Preprint, Topology Atlas (1997).
- [12] C.A. Naturman: *Interior Algebras and Topology*, Ph.D. thesis, University of Cape Town Department of Mathematics (1991).
- [13] О. Я. Віро, О. А. Іванов, Н. Ю. Нецветаєв, В. М. Харламов: Елементарна топологія, МЦНМО (2010).