Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«КОМБІНАТОРНА ТЕОРЕМА ПРО НУЛІ»**

Виконала: студентка
4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна математика», спеціальності 113 Прикладна математика
Дацько Юлія Віталіївна
Керівник: Тимошкевич Л.М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач
Рецензент: _____________________

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ______________________
Секретар СЕК __________________

(підпис)

«___» __________________ 2024 р.

Київ – 2024

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук
_____________ Чорней Р.К.
(підпис)
«____» ___________ 2024 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи
студентці 4-го курсу, факультету інформатики
Дацько Юлії Віталіївні

Тема: «Комбінаторна теорема про нулі»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація
1 Вступ
2 Теоретичні основи теореми
3 Класичні застосування теореми
4 Задачі на перевірку існування магічних графів
Висновки
Список літератури

Дата видачі «____» ______________ 2024 р.   Керівник ____________________
(підпис)
Завдання отримав ___________
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «____» _____________2024 р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконан-ня етапу	Підпис наукового керівника	Дата озна-йомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми квалі-фікаційної роботи.	20.10.2023			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	29.10.2023			
3.	Розробка плану та стру-ктури роботи.	17.01.2024			
4.	Робота з науковою літе-ратурою, опис основних означень.	02.02.2024			
5.	Дослідження резуль-татів отриманих в літературі.	28.02.2024			
6.	Робота над текстовим оформленням результа-тів.	24.04.2024			
7.	Попередній аналіз квалі-фікаційної роботи. Ви-правлення помилок.	14.05.2024			
8.	Попередній захист ква-ліфікаційної роботи.	15.05.2024			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	04.06.2024			

Науковий керівник _________ _____________
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____ __________________
(ПІБ)

Зміст

Анотація

Метою даної кваліфікаційної роботи є детальний аналіз комбінаторної теореми про нулі. Дослідження спрямоване на виявлення нових методів розв’язання різного роду задач, що пов’язані з комбінаторикою, теорією множин та графів.

У роботі було розглянуто основні поняття з теорії многочленів, які використовуються в комбінаторній теоремі про нулі. Особливу увагу приділено формулюванню та доведенню цієї теореми, а також її використанню при доведенні інших відомих теорем. Проведено дослідження задачі на існування магічної розмітки графів у полі $\mathbb{Z}_p$, з демонстрацією її застосування на часткових прикладах.

1 Вступ

1.1 Актуальність

Комбінаторна теорема про нулі була вперше запропонована у вигляді двох теорем Нога Аланом у 1999 році [1]. Дані теореми є посиленням теореми Гільберта про нулі 1893 року в частковому випадку [2], відмінність між якими полягає у тому, що комбінаторна теорема дозволяє обмежувати кількість нулів, яких може набувати многочлен від багатьох змінних. У зв'язку зі своєю популярністю, теорема Гільберта має численні застосування у топології [3], напіввизначеному програмуванні [4] та програмному забезпеченні Coq [5].

Попри відносну новизну теореми Алона та відсутності впізнаваності у широкому колі, вона вважається потужною теоремою для застосування у адитивній комбінаториці [6] та алгебраїчній геометрії [1]. Вартим уваги є використання комбінаторної теореми про нулі у задачах з розфарбовування графів та гіперграфів у теорії графів [7], зокрема постановці задач з розв'язку судоку.

1.2 Мета, завдання дослідження

Метою даної кваліфікаційної роботи є детальний аналіз комбінаторної теореми про нулі. Дослідження спрямоване на виявлення нових методів розв'язання різного роду задач, що пов'язані з комбінаторикою, теорією множин та графів.

Конкретні завдання дослідження передбачають:

● Зробити огляд основних понять з теорії многочленів, які використовуються в комбінаторній теоремі про нулі.

● Розглянути формулювання комбінаторної теореми про нулі та продемонструвати її застосування у альтернативному доведенні теорем з комбінаторики, теорії множин та графів.

● Розглянути постановку задачі з існування магічної розмітки графів у полі $\mathbb{Z}_p$ та її застосування на часткових прикладах.

● Розробка алгоритмів для деяких випадків магічних графів у Wolfram Mathematica та проведення практичних досліджень з даними графами.

2 Теоретичні основи теореми

Введемо основні визначення та поняття, що стосуються многочленів у багатовимірному просторі, що необхідні для використання у даній роботі.

2.1 Основні означення з теорії многочленів

Означення 1. 1 Одночленом від $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінних степеня t називається множник $x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n}$, де $t_i >= 0$ та $\sum_{i=1}^{n} t_i = t$ [8].

Означення 1. 2 Многочленом від $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінних в кільці R називається скінченна лінійна комбінація одночленів з коефіцієнтами k_i в кільці R [9]

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

Означення 1. 2 Нехай $R[x_1, \dots, x_n]$ кільце многочленів від $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінних в кільці R так, що $R_1 = R[x_1], R_2 = R_1[x_2], \dots, R_n = R_{n-1}[x_n]$. Елементи кільця R_n є многочленами від $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінних згідно з визначенням операцій рівності, додавання та множення в комутативному кільці R [10].

Означення 1. 3 Степенем $deg(f)$ многочлена $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ є найбільша сума степенів $t_1, t_2, \dots, t_n$ одночлена з ненульовим коефіцієнтом [8].

Наприклад, розглянемо одночлен $x_1^2 x_2 x_4^3$. Запишемо усі його степені $(2,1,0,3)$ та, просумувавши значення, маємо $deg(x_1^2 x_2 x_4^3) = 6$.

Означення 1. 4 Многочлен f є тотожно рівним нулю, якщо кожен його одночлен $f_t = 0, t = \overline{1, n}$. [9]

Означення 1. 5 Многочлен f в полі $R[x_1, \dots, x_n]$ дорівнює нулю в кожній точці $S \subseteq F^n$, тоді $f(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0 \ \forall s \in S$. [8]

Означення 1. 6 Поле $R[x_1, \dots, x_n]$ є алгебраїчно замкнутим, якщо кожен многочлен ненульового степеня можна розкласти на добуток лінійних множників в полі $R[x_1, \dots, x_n]$.

2.2 Формулювання теореми Гільберта про нулі

Комбінаторна теорема про нулі Алона є посиленою версією теореми Гільберта в частковому випадку, фундаментальної теореми алгебраїчної геометрії. Розглянемо її основні положення.

Нехай F – поле для скінченної множини точок $V \subseteq F^n$ та $I(V)$ – ідеал, що рівний нулю на V. З протилежної сторони, визначимо нульовий набір для ідеалу на $F(x)$:

$$V(I) = \{v \in F^n \mid f(v) = 0 \ \forall f \in I\}$$

На перший погляд здається, що ці дві операції є взаємно оберненими, тобто для ідеалу над полем $F[x]$ маємо $I\big(V(I)\big) = I$. Проте це не є обов'язково так, що можна продемонструвати за допомогою ідеалу $I = (x^2)$. Можемо стверджувати, що $I\big(V(I)\big) = (x)$, що не дорівнює ідеалу (x^2). Для вирішення цієї проблеми варто визначити радикал ідеалу над полем $F[x]$:

$$\sqrt{I} = \{f \in F[x] \mid \exists t \in N : \ f^t \in I\}$$

У наведеному прикладі ідеалу $\sqrt{(x)^2} = (x)$, тобто $I\big(V((x)^2)\big) = \sqrt{(x)^2}$. З цією додатковою умовою над полем $F[x]$ справджується твердження $I\big(V(I)\big) = I$.

Визначимо передумови для теореми Гільберта: Нехай F – алгебраїчно замкнене поле, а I є ідеалом в кільці $F[x_1, \dots, x_n]$, тоді $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Згідно з попередніми твердженнями I є скінчено породжуваним ідеалом, тобто існують такі многочлени $f_1(x), \dots, f_n(x) \in F[x]$ так, що $I = (f_1, \dots, f_n)$. Це означає, що деякий многочлен $f(x) \in F[x]$ належить до I тоді і тільки тоді, якщо існують такі многочлени $h_1(x), \dots, h_n(x) \in F[x]$, що:

$$f = f_1 h_1 + \cdots + f_n h_n$$

Варто зауважити, що $V(I)$ є набором нулів для f. Вищенаведені твердження дозволяють сформулювати теорему Гільберта.

Теорема 1 (Теорема Гільберта про нулі) [2]: Над алгебраїчно замкненим полем F многочлен $f = 0$ над усіма нулями спільних многочленів $f_1(x), \dots, f_n(x) \in F[x]$ тоді і тільки тоді, якщо існують многочлени $h_1(x), \dots, h_n(x) \in F[x]$ та додатне число t:

$$f^t = f_1 h_1 + \cdots + f_n h_n$$

Далі перейдемо до даної посиленої теореми в частковому випадку – комбінаторної теореми Алона про нулі. У ній ми не будемо припускати, що поле є алгебраїчно замкненим, а натомість воно є довільним.

2.3 Основні поняття до комбінаторної теореми про нулі

Лема 1 [1]: Нехай F – довільне поле та $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в полі многочленів від n змінних $F[x_1, \dots, x_n]$. Припустимо, що f має степінь k_i для $i = \overline{1, n}$, а $S_i \subseteq F$, $|S_i| > k_i$. Тоді, якщо $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$, то $f \equiv 0$.

Доведення:

Проведемо доведення леми за індукцією:

- База індукції: $n = 1$. Нехай f – многочлен від однієї змінної степені не більше k. Нехай $S \subseteq F$ так, що $|S_i| = k_i + 1$. Якщо $f \neq 0$, то многочлен має тоді k коренів, але знаючи, що $f = 0$ для всіх $s \in S_i$, то $f = 0$.
- Крок індукції: припустимо, що лема справджується для $n - 1$ змінної, де $n \geq 2$. Нехай $S \subseteq F$ так, що $|S_i| = k_i + 1$ для $i = \overline{1, n}$. Запишемо многочлен f спираючись на наше припущення:

$$f = \sum_{i=0}^{k_i} g_i(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^i,$$

де степінь кожного многочлена g_i не більше k_i для кожної змінної x_i. Многочлен $f(s_1, \dots, s_n)$ отриманий шляхом підстановки значень $s_1, \dots, s_{n-1}$ буде рівний нулю $f(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$. За припущенням індукції, $f_i \equiv 0$ для всіх i, що означає $f = 0$ та завершує доведення леми. □

Лема 2 [1]: Нехай F – довільне поле та $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в полі многочленів від n змінних $F[x_1, \dots, x_n]$. Нехай $S_1, \dots, S_n$ непорожні підмножини F, тоді визначимо многочлен від змінної x_i: $g_i = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Якщо многочлен f рівний нулю в кожній точці, координати якої є коренями $g_1, \dots, g_n$ (так, що $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$), то існують такі многочлени $h_1, \dots, h_n \in F[x_1, \dots, x_n]$, що

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$$

та задовольняють умову $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$.

Доведення:

За умовою теореми, $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$. Присвоїмо значення $k_i = |S_i| - 1$, тоді можемо розкласти многочлен $g_i(x_i)$ за степенями x_i:

$$g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s) = x_i^{|S_i|} - \sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j} x_i^j = x_i^{k_i+1} - \sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j} x_i^j$$

Тоді, зазначивши, що при $g_i(x_i) = 0$, для всіх $s \in S_i$ є справедливе співвідношення:

$$x_i^{k_i+1} = \sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j} x_i^j \tag{1}$$

Запишемо многочлен $\hat{f}$, що його можливо отримати з f шляхом заміни одночленів у вигляді $x_i^{t_i}$, де $t_i > k_i$, на лінійну комбінацію менших степенів x_i використовуючи співвідношення (1). Розглянемо це на прикладі:

$$x_i^{k_i+2} = g_i(x_i)x_i + \sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j}x_i^{j+1} = g_i(x_i)x_i + g_{i,t_i}x_i^{j+1} + \sum_{j=0}^{k_i-1} g_{i,j}x_i^{j+1} =$$

$$= g_i(x_i)x_i + g_{i,t_i}g_i(x_i) + g_{i,t_i}\sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j}x_i^j + \sum_{j=0}^{k_i-1} g_{i,j}x_i^{j+1} =$$

$$= g_i(x_i)(x_i + g_{i,t_i}) + g_{i,t_i}\sum_{j=0}^{k_i} g_{i,j}x_i^j + \sum_{j=0}^{k_i} h_{i,j}x_i^j =$$

$$= g_i(x_i)(x_i + g_{i,t_i}) + \sum_{j=0}^{k_i} q_{i,j}x_i^j =$$

$$= g_i(x_i)h_i + \sum_{j=0}^{k_i} q_{i,j}x_i^j$$

де $h_{i,j}$= 0 при $j = 0$, а при $j > 0$ $h_{i,j} = g_{i,j-1}$. Завдяки заміні $q_{i,j} = g_{i,t_i}g_{i,j} + h_{i,j}$ зводимо рівність до вигляду з початково заданої умови.

Таким чином, здійснюючи перехід за індукцією, отримуємо многочлен відносно x_i, що має степінь $t_i > k_i$. Отримані висновки можливо звести до вигляду:

$$f = \hat{f} + \sum_{i=0}^{n} h_i g_i$$

Оскільки многочлен $\hat{f}$ виходить шляхом віднімання суми многочленів $h_i g_i$, то $\deg(f) \geq \deg\,(h_i g_i) = \deg\,(h_i) + \deg\,(g_i)$, звідки $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg\,(g_i)$.

За початковою умовою, $\hat{f}(s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_n)$ для всіх $s \in S_i$, тому $\hat{f}(s_1, \dots, s_n) = 0$. За Лемою 1 $\hat{f} \equiv 0$, що завершує доведення теореми. □

2.4 Формулювання комбінаторної теореми про нулі

Теорема 2 (Комбінаторна теорема про нулі) [1]: Нехай F – довільне поле та $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в полі многочленів від n змінних $F[x_1, \dots, x_n]$. Припустимо, що степінь $\deg(f) = \sum_{i=i}^{n} k_i$, де кожне k_i – невід'ємне ціле число, а коефіцієнт $\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$ є ненульовим. Тоді для довільних підмножин $S_1, \dots, S_n \subseteq F$ таких, що $|S_i| > k_i$, існують такі $s_i \in S_i$, які задовольняють твердження

$$f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$$

Доведення:

Припустимо, що твердження $|S_i| = t_i + 1$ для всіх i є неправильним. Тоді многочлен рівний нулю в кожній точці, координати якої є коренями многочленів виду $g_i = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Оскільки, за припущенням Теореми 1 $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ для всіх $s \in S_i$, то існують такі многочлени h_i, що

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$$

За умовою даної теореми коефіцієнт $\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$ є ненульовим, а отже, має бути ненульовим і у $\sum_{i=1}^{n} h_i g_i$, проте за умовою Теореми 1:

$$\deg(h_i g_i) = \deg\left(h_i \prod\nolimits_{s \in S_i} (x_i - s)\right) = \deg(h_i) + \deg(g_i) \leq \deg\,(f)$$

Маємо, що одночлени степеня $\deg\,(f)$, що входять в $\deg(h_i g_i)$ діляться на $x_i^{k_i+1}$ для певного $i = \overline{1, n}$. Проте за припущенням, коефіцієнт при $\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$ в кожному члені доданків $h_i g_i$ є ненульовим, тому $f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$ має дорівнювати нулю. Це і є протиріччям до початкового припущення. □

Основною відмінністю між теоремою про нулі Гільберта та Алона є те, що остання вважається потужнішою у зв'язку з відкиданням умови щодо алгебраїчно замкнутого поля та обмеженням степені h_i.

Це можна пояснити тим, що теорема Алона накладає обмеження на тип ідеалу, на відміну від теореми Гільберта, що натомість справджується на радикалах ідеалів.

3 Класичні застосування теореми

3.1 Задача 1 (Коші-Девенпорта) [1]

Для двох довільних множин A, B їхня сума $A + B$ визначається $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тоді для довільного простого числа p та $A, B \in \mathbb{Z}_p$

$$|A + B| \geq min\{p, |A| + |B| - 1\}$$

Доведення:

Розглянемо очевидний випадок, коли $|A| + |B| > p$. Тоді повинне існувати таке $g \in \mathbb{Z}_p$, що множини $g - B$ та A повинні перетинатись. Очевидно, що $(g - B) \in \mathbb{Z}_p$, а оскільки значення множини B є унікальними всередині неї, то $|g - B| = |B|$ [11]. Тоді $\exists\ a \in A, b \in B$, що $g - b = a \Rightarrow g\ =\ a + b \Rightarrow g \in A + B \Rightarrow g \in \mathbb{Z}_p$. Отримуємо, що теорема справджується за даних умов у вигляді $|A + B| = p$.

Припустимо, що $|A| + |B| \leq p$ та твердження $|A| + |B| - 1 < p$. Тоді $|A + B| \leq |A| + |B| - 2$ та існує деяка множина $C \in \mathbb{Z}_p$, що $A + B \subseteq C$ та $|C| = |A| + |B| - 2$. Визначимо многочлен $f(x, y) \in \mathbb{Z}_p(x, y)$*:*

$$f(x, y) = \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

Оскільки $A + B \subseteq C$, тоді $\forall\ a \in A,\ b \in B$ та маємо таке $c \in C$, що $a + b = c$ та, відповідно, $f(a, b) = 0$. Запишемо многочлен у вигляді $f(x, y) = x^{k_1} y^{k_2}$ із загальним степенем $|A| + |B| - 2$, та розпишемо як $k_1 = |A| - 1, k_2 = |B| - 1$. За допомогою поліноміальної теореми визначається коефіцієнт даного одночлена $C_{|A|-1}^{|A|+|B|-2}$, який не є рівним нулю, оскільки $|A| + |B| \leq p$.

Згідно з Теоремою 2 $\exists\ a \in A, b \in B$, що $f(a, b) \neq 0$. Це суперечить визначенню многочлена $f(x, y)$, тому $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$. □

Розглянемо це на прикладі. Нехай $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ в полі $\mathbb{Z}_{13}$. Тоді $A + B = \{3, 5, 7, 9, 11, 0, 2, 4\}$, а $|A| + |B| - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. Отже, дійсно справджується теорема Коші-Девенпорта:

$$|A + B| = 8 \ \geq min(13,8)$$

3.2 Задача 2 (Ердеша-Гінзбурга-Зіва) [1]

Нехай $(a_1, \dots, a_{2p-1})$ є послідовністю чисел в $\mathbb{Z}_p$, де p – просте число. Тоді існує така підпослідовність довжини p, що сума її елементів рівна нулю.

Доведення:

Оскільки $\left(a_1, \dots, a_{2p-1}\right)$ є послідовністю, то її можна зобразити у вигляді $a_1 \leq a_2 \leq \leq \dots \leq a_{2p-1}$. Тоді необхідно розглянути два можливі випадки для певного $i \in \{1, \dots, p-1\}$:

1) При $a_{i+p-1} = a_i$ твердження $a_i = \ldots = a_{i+p-1}$ є очевидним так, що $a_i + \ldots + a_{i+p-1} = pa_i \equiv 0 (mod\ p)$
2) При $a_{i+p-1} > a_i$ варто розглянути такі множини $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$. Застосовуючи доведену вище теорему Коші-Девенпорта, маємо

   $$|A_1 + \ldots + A_{p-1}| \geq p$$

   Очевидно, що $A_1 + \ldots + A_{p-1} = \mathbb{Z}_p$ тому $a_{2p-1} \in A_1 + \ldots + A_{p-1}$. Тоді можемо стверджувати, що існують такі значення $c_i \in \{a_i, a_{i+p-1}\}$, що $c_i + \ldots + c_{p-1} + +a_{2p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$. □

Розглянемо це на прикладі. Нехай $p = 3$, тоді кількість чисел у послідовності повинна бути рівна $2p - 1 = 5$ як в $\{1,2,4,7,9\}$. Тоді за умовами теореми існує така підпослідовність довжини $p = 3$, що сума рівна 0 за модулем p. У даному прикладі нею можуть бути підпослідовності: $\{1,2,9\}, \{1,4,7\}, \{2,7,9\}$. Отже, теорема справджується.

3.3 Задача 3 [1]

Нехай $k, n \in \mathbb{N}$ та p – просте число. Тоді існують такі $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$

$$x_1^k + \ldots + x_k^k \equiv n \ (mod\ p)$$

Доведення:

Розглянемо випадок, коли $k \geq p$. Для цього пригадаємо визначення малої теореми Ферма. Нехай p – просте число, а a – просте ціле число, що не рівне нулю за модулем p. Тоді

$$\alpha^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

Згідно з умовами задачі, маємо $x^k \equiv x^{k+p-1} \ (mod\ p)$. Нехай $k = ak_1$ так, що $k_1 | (p-1)$ та НСД$(a, p-1) = 1$. Тоді можемо записати x^k у вигляді $x^k \equiv (x^a)^{k_1}$. Оскільки відображення $x \to x^a$ є бієкцією на саму себе в F_p, то буде достатньо доведення твердження для $k | (p-1)$. Нехай $p - 1 = kd, d \in \mathbb{N}$, тоді запишемо многочлен

$$f(x_1^k, \ldots, x_k^k) = \prod_{j \in \mathbb{Z}_p \backslash \{n\}} (x_1^k + \ldots + x_k^k - j)$$

Степінь даного многочлена рівна $k(p-1)$, оскільки маємо k змінних у полі $\mathbb{Z}_p \backslash \{n\}$. Розглянемо коефіцієнт при $x_1^{p-1} \ldots x_k^{p-1}$ за допомогою поліноміальної теореми $\frac{(p-1)!}{(d!)^k} = \frac{(kd)!}{(d!)^k}$, що не є рівним нулю, оскільки $p - 1 < p$.

Згідно Теореми 2, існує такий многочлен $f(x_1^k, \ldots, x_k^k)$, що не є рівним нулю. Відповідно, можна підібрати такі значення $x_1^k, \ldots, x_k^k$, щоб для всіх $j \in \mathbb{Z}_p \backslash \{n\}$ $x_1^k + \ldots + x_k^k - j \neq 0$. Тоді можемо зробити висновок, що $x_1^k + \ldots + x_k^k = n$. □

Розглянемо це на прикладі $x_1^1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 + x_5^5 \equiv 4 (mod 7)$. Вручну підберемо розв'язок (1,1,1,2,6): $1 + 1 + 1 + 2^4 + 6^5 = 3 + 16 + 7776 = 7795$. Оскільки $7795 \equiv 4 \ (mod\ 7)$, це дає пересвідчитись у дійсності даного твердження.

3.4 Задача 4 [12]

Нехай $H_1, \dots, H_m$ – сімейство гіперплощин в R^n, що покривають всі вершини одиничного куба $\{0,1\}^n$, окрім однієї. Доведіть, що $m \geq n$.

Доведення:

Нагадаємо, що гіперплощина в афінному просторі R^n – це множина точок $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$, що задовольняють рівняння вигляду $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ [13].

Припустимо, що непокрита вершина одиничного куба є нульовим вектором $\vec{0}$. Нехай $(a_i, x) = b_i$ – це рівняння, що визначає гіперплощину H_i, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і (a, b) – скалярний добуток між даними векторами. Також зауважимо, що $b_i \neq 0$ не покриває початок координат для кожного i.

Припустимо, що початкове твердження $m \geq n$ є неправильний, тому $m < n$ та розпишемо многочлен

$$P(x) = (-1)^{n+m} \prod_{j=1}^{m} b_j \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) - \prod_{i=1}^{m} [(a_i, x) - b_i]$$

Очевидно, що степінь многочлену $P(x)$ рівна n, а коефіцієнт при $\prod_{i=1}^{n} x_i$ змінних $(-1)^{n+m} \prod_{j=1}^{m} b_j \neq 0$. Згідно з Теоремою 2 існує така точка $x \in \{0,1\}^n$ для якої $P(x) \neq 0$. Цією точкою не є нульовий вектор $\vec{0}$, оскільки в ній $P(x) = 0$

$$f(\vec{0}) = (-1)^{n+m} \prod_{j=1}^{m} b_j \, (-1)^n - \prod_{i=1}^{m} (-b_i) =$$

$$= (-1)^m \prod_{j=1}^{m} b_j - (-1)^m \prod_{i=1}^{m} b_i = 0$$

Тому цією точкою є інша ненульова вершина така, що для певного i справджується, що вона є покрита гіперплощиною H_i так, що $(a_i, x) - b_j = 0$. Оскільки $P \equiv 0$ в цій точці, то маємо протиріччя до початкового припущення. □

Згідно з умовами задачі побудуємо приклади у двовимірному та тривимірному просторі. З них можемо зробити висновок, що кількість гіперплощин не може бути менше розмірності простору, отже, $m \geq n$.

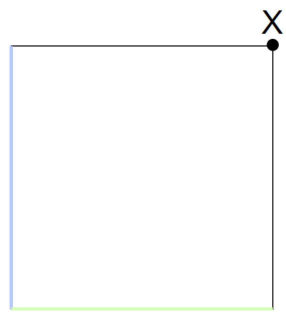


Рис. 1 Покриття гіперплощинами одиничного куба в R^2

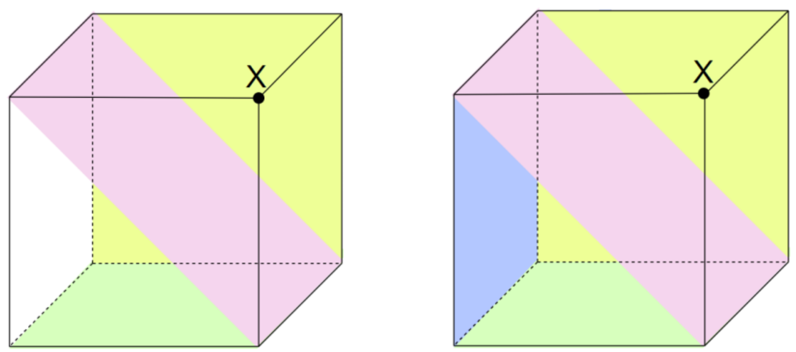


Рис. 2 Покриття гіперплощинами одиничного куба в R^3

3.5 Задача 5 [1]

Нехай p – просте число і $G(V, E)$ – граф, в якому множину вершин можна описати $|V| > d(p-1)$. Доведіть існування непорожньої множини U вершин G такої, що кількість клік графа G, що мають хоча б d вершин в U, ділиться на p.

Доведення:

Нагадаємо, що клікою простого неорієнтованого графа $G(V, E)$ називається повний підграф, який не міститься у будь-якому більшому підграфі [14]. Тобто, існує така підмножина $I \subseteq V$, що для кожних двох вершин I існує ребро, що їх з'єднує.

Нехай $K(I)$ – кількість клік на d вершинах графа G, що містять в собі I – непорожню підмножину вершин G. Тоді, враховуючи, що $v \in V$ запишемо многочлен від x_v змінних над полем F_p:

$$F = \prod_{v \in V} (1 - x_v) - 1 + G,$$

$$\text{де } G = \Big[\sum_{\emptyset \neq I \subset V} (-1)^{|I|+1} K(I) \prod_{i \in I} x_i\Big]^{p-1}$$

Оскільки $K(I) = 0$ для усієї множини I, потужність якої більше за d, тоді степінь G не перевищує $d(p-1) < |V|$, а степінь F дорівнює $|V|$. Дослідимо коефіцієнт при x_v у многочлені F: $(-1)^{|V|} \neq 0$.

За Теоремою 2, існують такі $x_v \in \{0,1\}$, що $F(x_v : v \in V) \neq 0$. На нульовому векторі многочлен $F = 0$, тобто не всі значення x_v дорівнюють нулю, отже $G(x_v : v \in V) \neq 1$. Застосуємо малу теорему Ферма:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subset V} (-1)^{|I|+1} K(I) \prod_{i \in I} x_i \equiv 0 \ (mod\ p)$$

Ліва частина даного твердження є кількістю клік на d вершинах, що перетинають множину вершин G: $U = \{v: x_v = 1\}$ згідно формули включень-виключень. Оскільки множина U – непорожня, то доведення теореми завершено. □

Розглянемо це на прикладі. Нехай $d = 3, p = 3$, тоді за умовами формули $|V| > 6$. Можна зобразити такий простий неорієнтований граф на 7 вершинах:

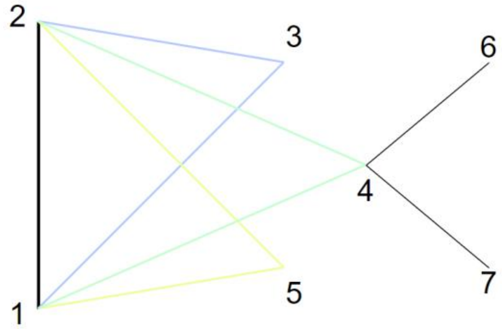


Рис. 3 Приклад простого неорієнтованого графа з 7 вершинами

Нехай підмножина $U = 1,2$, тоді можна виписати кліки даного графа $K(U) = \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\}$. Тоді дійсно справджуються умови теореми: $|K(U)| = 3$, отже $|K(U)| \equiv 0 \ (mod\ 3)$.

4 Задачі на перевірку існування магічних графів

4.1 Обґрунтування застосування теореми

Магічний граф – це вид графів, ребра якого позначені цілими додатними числами x_i так, що сума ребер, інцидентній кожній вершині v_i для $i = \overline{1, n}$, є однаковою [15]. Вперше дане поняття було запропоноване Лі, Сан та Вен у роботі [16]. У даному розділі розглядаються магічні графи у полі $\mathbb{Z}_k$, які є простими та зв'язними.

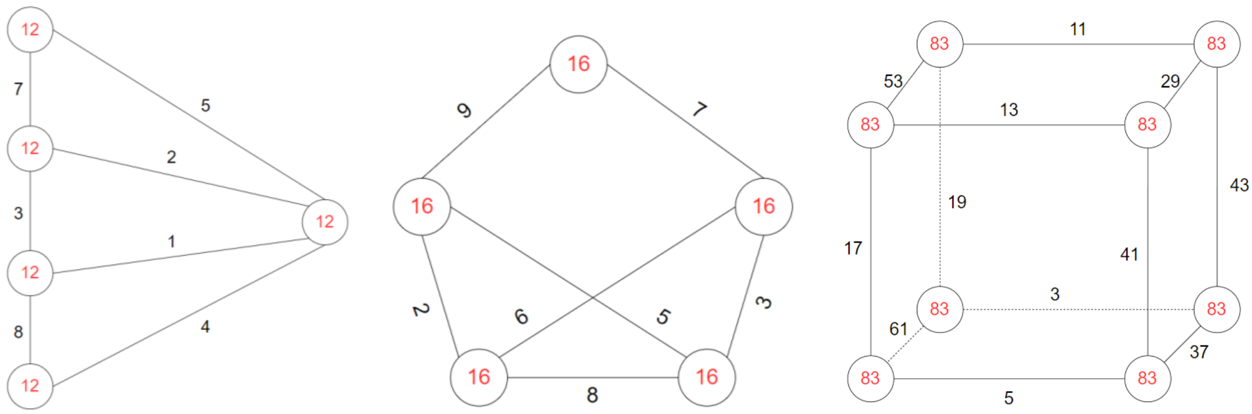


Рис. 4 Приклади розмітки магічних графів

Нехай $G = (V, E), |V(G)| = n$ – кількість вершин графу G, а $|E(G)| = m$ – кількість ребер у полі $\mathbb{Z}_k$, де k є простим числом. Оскільки $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ та $t = \{0,1\}$, можемо записати формулу многочленів $f_t(x_1, \dots, x_m)$:

$$f_t(\hat{x}) = f_t(x_1, \dots, x_m) = \prod_{v \in V} (1 - (t - \sum_{v \in x_i} x_i)^{k-1})$$

В даному випадку, за умови рівності суми ребер вершини числу t отримуємо 1, інакше 0. Перемноживши отримані значення для кожної вершини, можемо стверджувати, що $f_t(\hat{x}) = 1$ лише за умови, якщо граф є магічним у полі $\mathbb{Z}_k$. Спираючись на комбінаторну теорему про нулі, можемо стверджувати, що існує такий розв'язок $f_t(\hat{x}) \neq 0$. Переконаємось у даному твердженні на прикладах.

4.2 Магічний граф $G(3,3)$ в $\mathbb{Z}_3$

Нехай $p = 3$, а G – граф, зображений на першому рис. 5. Тоді можемо записати многочлен $f_t(\hat{x})$ у полі $\mathbb{Z}_3\{x_1, x_2, x_3\}$:

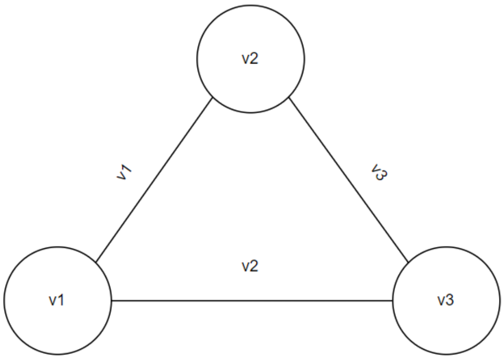
$$f_1(\hat{x}) = (1 - (1 - (x_1 + x_{2)})^2) \cdot (1 - (1 - (x_1 + x_{3)})^2) \cdot (1 - (1 - (x_2 + x_{3)})^2)$$

Варто зауважити, що $deg(f_1(\hat{x})) = 6$. За допомогою Wolfram Mathematica знайдемо ті одночлени $f_1(\hat{x})$, що відповідають степені многочлена, виберемо та запишемо в полі $\mathbb{Z}_3$ той з них, що має найменшу степінь: $2x_1^2x_2^2x_3^2$.

```
(* Визначення сторін графа *)

{x1, x2, x3} = {x1, x2, x3};

(* Визначення многочлена графа *)

expression = (1 - (1 - (x1 + x2))^2) * (1 - (1 - (x2 + x3))^2) * (1 - (1 - (x3 + x1))^2);

expandedExpression = Expand[expression];



(* Фільтрування комбінацій, що задовольняють умови теореми *)

monomials = Select[expandedExpression, Total[Exponent[#, {x1, x2, x3}]] == 6 &];

monomials
```

{-x1^4 x2^2, - 2 x1^3 x2^3, - x1^2 x2^4, - 2 x1^4 x2 x3, - 6 x1^3 x2^2 x3, - 6 x1^2 x2^3 x3, - 2 x1 x2^4 x3, - x1^4 x3^2, - 6 x1^3 x2 x3^2, - 10 x1^2 x2^2 x3^2, - 6 x1 x2^3 x3^2, - x2^4 x3^2, - 2 x1^3 x3^3, - 6 x1^2 x2 x3^3, - 6 x1 x2^2 x3^3, - 2 x2^3 x3^3, - x1^2 x3^4, - 2 x1 x2 x3^4, - x2^2 x3^4}

Маємо, що $S_i = \{1, 2\}$ для $i = 1, 2, 3$. Проте такі S_i не можуть існувати тому, що $|S_i| = 3$ для $i = 1, 2, 3$. Звідси, можемо зробити висновок про неможливість застосування Теореми 2 (Комбінаторної теореми про нулі) до даного прикладу. Проте шляхом підбору значень сторін графа, можемо визначити розв'язок даного магічного графа, що зображений на другому рис. 5.



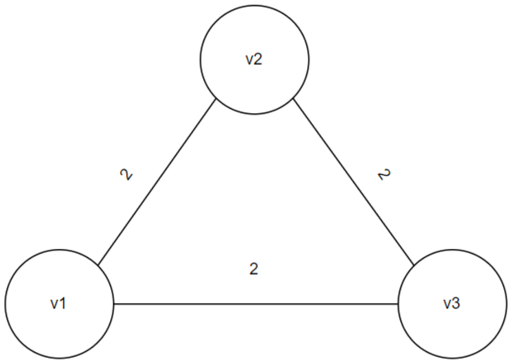


Рис. 5 Магічний граф $G(3,3)$ в $\mathbb{Z}_3$

4.3 Магічний граф $G(6,12)$ в $\mathbb{Z}_3$

Нехай $p = 3$, а G – граф, зображений на першому рис. 6. Тоді можемо записати многочлен $f_t(\hat{x})$ у полі $\mathbb{Z}_3\{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\}$:

$$f_1(\hat{x}) = (1 - (0 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2) \cdot (1 - (0 - (x_3 + x_5 + x_6 + x_7)^2) \cdot$$
$$\cdot (1 - (0 - (x_2 + x_5 + x_8 + x_{10})^2) \cdot (1 - (0 - (x_6 + x_8 + x_9 + x_{11})^2) \cdot$$
$$\cdot (1 - (0 - (x_1 + x_{10} + x_{11} + x_{12})^2) \cdot (1 - (0 - (x_4 + x_7 + x_9 + x_{12})^2)$$

Варто зауважити, що $deg\big(f_1(\hat{x})\big) = 12$, a $|\hat{x}| = 12$. Тоді найменшим степенем одночленів $f_1(\hat{x})$ буде $\frac{deg(f_1(\hat{x}))}{|\hat{x}|} = 1$. За допомогою Wolfram Mathematica знайдемо одночлен $f_1(\hat{x})$, що відповідає описаному припущенню, та запишемо його в полі $\mathbb{Z}_3$: $2x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}$.

```
(* Визначення сторін графа *)
{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12}={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12};
```

```
(* Визначення многочлена графа *)

expression=(1-(0-(x1+x2+x3+x4))^2)*(1-(0-(x3+x5+x6+x7))^2)*(1-(0-
(x2+x5+x8+x10))^2)*(1-(0-(x6+x8+x9+x11))^2)*(1-(0-(x1+x10+x11+x12))^2)*(1-(0-
(x4+x7+x9+x12))^2);

expandedExpression=Expand[expression];


(* Фільтрування комбінацій, що задовольняють умови теореми *)

monomials = "";

For[i = 1, i <= Length@expandedExpression , i++,

  If[Exponent[expandedExpression [[i]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8,x9,x10,x11,x12}]
== {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},

    monomials = expandedExpression [[i]];

    Break[]

  ]

];

monomials
```

```
2432x1*x2*x3*x4*x5*x6*x7*x8*x9*x10*x11*x12
```

Оскільки степені змінних рівні 1, то $|S_i| = 2$ для $i = \overline{1,12}$. Маємо, що $S_i = \{1,2\}$ для $i = \overline{1,12}$, тоді згідно Теореми 2 (Комбінаторної теореми про нулі) $f_1(\hat{x}) \neq 0$ для деякого $\hat{x} \in S_1 \times \ldots \times S_{12}$.

Оскільки $f_1(\hat{x})$ може набувати лише значення 0 або 1, то можемо стверджувати про існування такої комбінації чисел $\hat{x}$, що існує магічний граф у полі $\mathbb{Z}_3$ з магічним числом рівним нулю. Зобразимо магічний граф на другому рис. 6 зі самостійно знайденими методом перебору значеннями сторін графа.

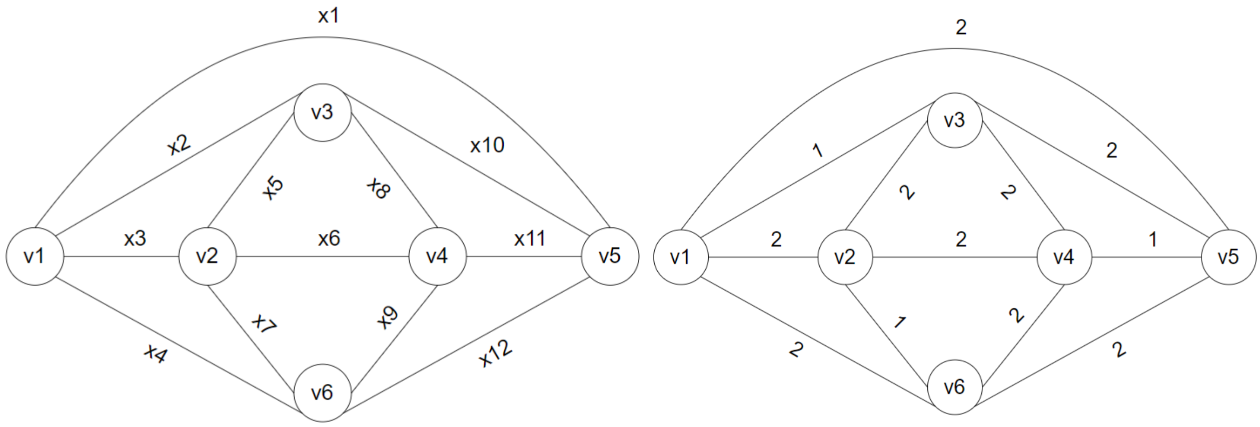


Рис. 6 Магічний граф $G(6,12)$ в $\mathbb{Z}_3$

4.4 Магічний граф $G(6,13)$ в $\mathbb{Z}_3$

Нехай $p = 3$, а G – граф, зображений на першому рис. 7. Тоді можемо записати многочлен $f_t(\hat{x})$ у полі $\mathbb{Z}_3\{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$:

$$f_1(\hat{x}) = (1 - (1 - (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2) \cdot (1 - (1 - (x_1 + x_2 + x_7 + x_8)^2) \cdot$$
$$\cdot (1 - (1 - (x_3 + x_7 + x_9 + x_{13})^2) \cdot (1 - (1 - (x_4 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12})^2) \cdot$$
$$\cdot (1 - (1 - (x_5 + x_{10} + x_{12} + x_{13})^2) \cdot (1 - (1 - (x_1 + x_6 + x_{10} + x_{11})^2)$$

Варто зауважити, що $deg(f_1(\hat{x})) = 12$. Тоді найменшим степенем одночленів $f_1(\hat{x})$ може бути 1 за винятком однієї змінної – її степінь буде рівна 0. За допомогою Wolfram Mathematica знайдемо приклад такого одночлена $f_1(\hat{x})$, що відповідає описаному припущенню, та запишемо його в полі $\mathbb{Z}_3$: $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}$.

```
(* Визначення сторін графа *)

{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13}={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12
,x13};
```

```
(* Визначення многочлена графа *)

expression=(1-(1-(x2+x3+x4+x5+x6))^2)*(1-(1-(x1+x2+x7+x8))^2)*(1-(1-(x3+x7+x9+x13))^2)*(1-(1-(x4+x8+x9+x11+x12))^2)*(1-(1-(x5+x10+x12+x13))^2)*(1-(1-(x1+x6+x10+x11))^2);

expandedExpression=Expand[expression];


(* Фільтрування комбінацій, що задовольняють вищезазначені припущення *)

degree12Monomials = Select[expandedExpression, Total[Exponent[#, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13}]] == 12 &];

degree1Monom = Select[List @@ degree12Monomials, Exponent[#, x1] <= 1 &];

degree2Monom = Select[List @@ degree1Monom, Exponent[#, x2] <= 1 &];

…

degree13Monom = Select[List @@ degree12Monom, Exponent[#, x13] <= 1 &];

degree13Monom
```

{2176 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8, 2176 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x9, 2048 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x8 x9, 2176 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x7 x8 x9, 2176 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x6 x7 x8 x9, 2432 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x5 x6 x7 x8 x9, 2176 x1 x10 x11 x12 x13 x2 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2176 x1 x10 x11 x12 x13 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2048 x1 x10 x11 x12 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2176 x1 x10 x11 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2176 x1 x10 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2048 x1 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9, 2048 x10 x11 x12 x13 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9}

Оскільки степені змінних рівні 1, то $|S_i| = 2$ для $i = 1, \dots 10,12,13$. Маємо, що $S_i = 1,2$ для $i = 1, \dots 10,12,13$, а для $i = 11$ маємо $S_{11} = 1, |S_{11}| = 1$. Тоді згідно Теореми 2 (Комбінаторної теореми про нулі) $f_1(\hat{x}) \neq 0$ для деякого $\hat{x} \in S_1 \times \ldots \times S_{13}$.

Оскільки $f_1(\hat{x})$ може набувати лише значення 0 або 1, то можемо стверджувати про існування такої комбінації чисел $\hat{x}$, що існує магічний граф у полі $\mathbb{Z}_3$ з магічним числом рівним нулю. Зобразимо магічний граф на другому рис. 7 зі самостійно знайденими методом перебору значеннями сторін графа.

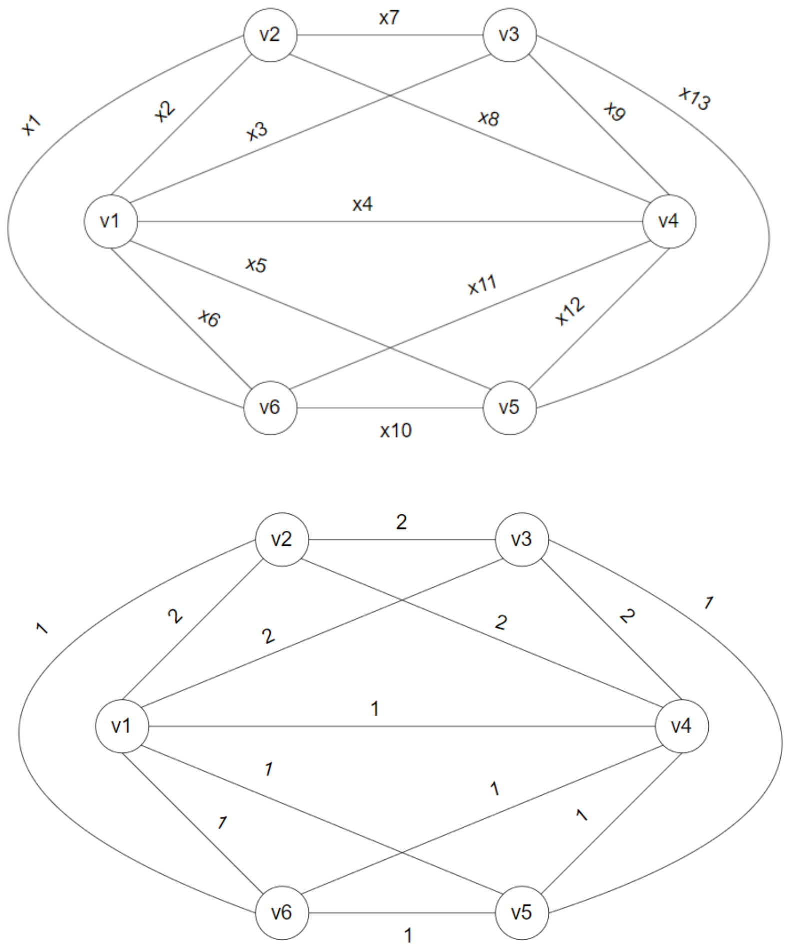


Рис. 7 Магічний граф $G(6,13)$ в $\mathbb{Z}_3$

4.5 Магічний граф $G(6,8)$ в $\mathbb{Z}_5$

Нехай $p = 6$, а G – граф, зображений на першому рис. 8. Тоді можемо записати многочлен $f_t(\hat{x})$ у полі $\mathbb{Z}_5\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$:

$$f_1(\hat{x}) = (1-(1-(x_1+x_2)^4)\cdot(1-(1-(x_2+x_3+x_4+x_5)^4)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_3+x_7)^4)\cdot\left(1-(1-(x_5+{x_6}^4\right)\cdot$$
$$\cdot(1-(1-(x_4+x_6+x_7+x_8)^4)\cdot(1-(1-(x_1+x_8)^4)$$

Варто зауважити, що $deg\left(f_1(\hat{x})\right) = 24$, а $|\hat{x}| = 8$. Тоді найменшим та єдиним степенем одночленів $f_1(\hat{x})$ буде $\frac{deg\left(f_1(\hat{x})\right)}{|\hat{x}|} = 3$. За допомогою Wolfram Mathematica знайдемо одночлен $f_1(\hat{x})$, що відповідає описаному припущенню, та запишемо його в полі $\mathbb{Z}_5$: $x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3x_5^3x_6^3x_7^3x_8^3$.

```
(* Визначення сторін графа *)

{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8}={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8};

(* Визначення многочлена графа *)

expression=(1-(1-(x1+x2))^4)*(1-(1-(x1+x3+x4+x5))^4)*(1-(1-(x3+x7))^4)*(1-(1-
(x5+x6))^4)*(1-(1-(x4+x6+x7+x8))^4)*(1-(1-(x1+x8))^4);

expandedExpression=Expand[expression];


(* Фільтрування комбінацій, що задовольняють умови теореми *)

monomials = ""

For[i = 1, i <= Length@expandedExpression , i++,

 If[Exponent[expandedExpression [[i]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8}] == {3, 3, 3, 3, 3,
3, 3, 3},

   monomials = expandedExpression [[i]];

   Break[]

 ]

];
```

monomials
1069056x1^3*x2^3*x3^3*x4^3*x5^3*x6^3*x7^3*x8^3

Оскільки степені змінних рівні 1, то $|S_i| = 2$ для $i = \overline{1,8}$. Маємо, що $S_i = \{1,2,3,4\}$ для $i = \overline{1,8}$, тоді згідно Теореми 2 (Комбінаторної теореми про нулі) $f_1(\hat{x}) \neq 0$ для деякого $\hat{x} \in S_1 \times \ldots \times S_8$.

Оскільки $f_1(\hat{x})$ може набувати лише значення 0 або 1, то можемо стверджувати про існування такої комбінації чисел $\hat{x}$, що існує магічний граф у полі $\mathbb{Z}_5$ з магічним числом рівним нулю. Зобразимо магічний граф на другому рис. 8 зі самостійно знайденими методом перебору значеннями сторін графа.

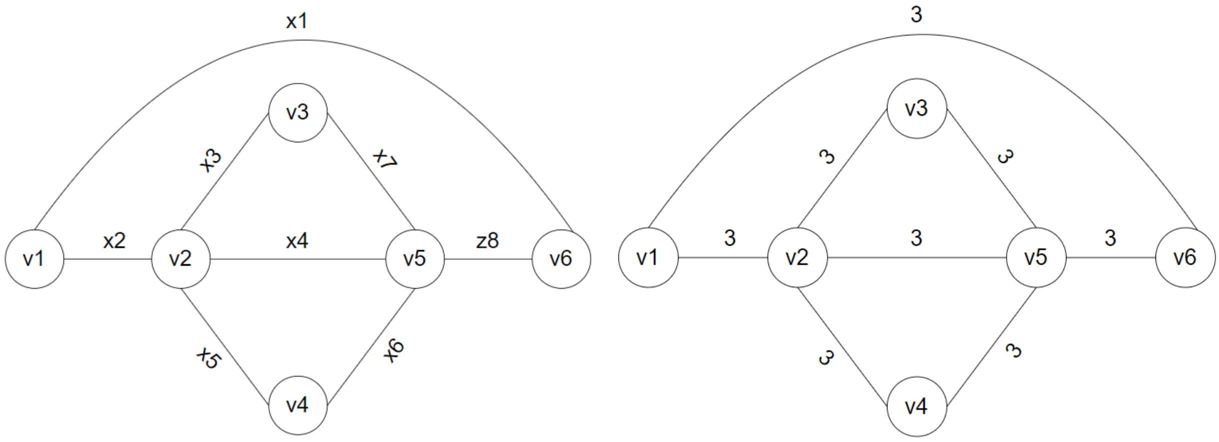


Рис. 8 Магічний граф $G(6,8)$ в $\mathbb{Z}_5$

Розглянемо ще один приклад магічного графу $G(6,8)$ в $\mathbb{Z}_5$. Нехай $p = 6$, а G – граф, зображений на першому рис. 9. Тоді можемо записати многочлен $f_t(\hat{x})$ у полі $\mathbb{Z}_5\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$:

$$f_0(\hat{x}) = (1 - (0 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4) \cdot (1 - (0 - (x_2 + x_7)^4) \cdot$$
$$\cdot (1 - (0 - (x_3 + x_6)^4) \cdot (1 - (0 - (x_4 + x_5)^4) \cdot$$
$$\cdot (1 - (0 - (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)^4) \cdot (1 - (0 - (x_1 + x_8)^4)$$

Варто зауважити, що $deg\big(f_0(\hat{x})\big) = 24$, а $|\hat{x}| = 8$. Тоді найменшим та єдиним степенем одночленів $f_0(\hat{x})$ буде $\frac{deg(f_0(\hat{x}))}{|\hat{x}|} = 3$. За допомогою Wolfram Mathematica знайдемо одночлен $f_0(\hat{x})$, що відповідає описаному припущенню, та запишемо його в полі $\mathbb{Z}_5$: 0.

```
(* Визначення сторін графа *)

{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8}={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8};

(* Визначення многочлена графа *)

expression=(1-(0-(x1+x2+x3+x4))^4)*(1-(0-(x2+x7))^4)*(1-(0-(x3+x6))^4)*(1-(0-(x4+x5))^4)*(1-(0-(x5+x6+x7+x8))^4)*(1-(0-(x1+x8))^4);

expandedExpression=Expand[expression];



(* Фільтрування комбінацій, що задовольняють умови теореми *)

monomials = "";

For[i = 1, i <= Length@expandedExpression , i++,

  If[Exponent[expandedExpression [[i]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8}] == {3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3},

    monomials = expandedExpression [[i]];

    Break[]

  ]

];

monomials
```

1797120x1^3*x2^3*x3^3*x4^3*x5^3*x6^3*x7^3*x8^3

Оскільки отриманий одночлен степені змінних 3 не існує , то можемо зробити висновок про неможливість застосування Теореми 2 (Комбінаторної теореми про нулі) до даного прикладу. Проте шляхом підбору значень сторін графа, можемо визначити розв’язок даного магічного графа, що зображений на другому рис. 9.

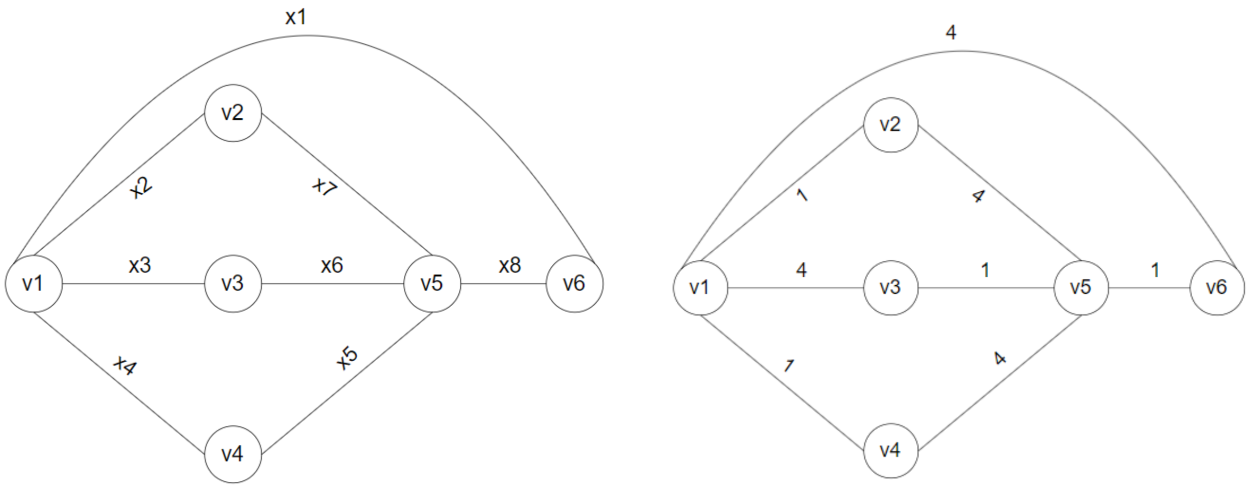


Рис. 9 Магічний граф $G(6,8)$ в $\mathbb{Z}_5$

Висновки

Дана кваліфікаційна робота присвячена дослідженню комбінаторної теореми про нулі та її застосування на задачах, що пов'язані з комбінаторикою, теорією множин та графів.

У Розділі 2 описано основні поняття з теорії многочленів, що застосовуються у визначенні комбінаторної теореми про нулі. Також було розглянуто формулювання та доведення теорем Гільберта та Алона, їх відмінності.

У Розділі 3 було проведено розв'язання задач із застосування комбінаторної теореми про нулі. Це включає альтернативні доведення теорем Коші-Девенпорта, Ердеша-Гінзбурга-Зіва та інші твердження з комбінаторики та теорії графів.

У Розділі 4 досліджено застосування комбінаторної теореми про нулі у задачах з перевірки існування розмітки графів у полі $\mathbb{Z}_p$. Це було детально розглянуто на часткових прикладах графів $G(3,3)$, $G(6,12)$, $G(6,13)$ та $G(6,8)$. Для них представлено алгоритми за допомогою математичного середовища Wolfram Mathematica, що дозволяє знаходити проводити обчислення з великим набором даних многочленів.

Список літератури

1. Alon N. Combinatorial Nullstellensatz. Combinatorics, Probability and Computing. 1999. Vol. 8, no. 1-2.
2. Hilbert D. Ueber die vollen Invariantensysteme. Mathematische Annalen. 1893. Vol. 42.
3. Goel K., Patil D., Verma J. Nullstellensätze and Applications. 2022
4. Sturmfels B. Solving Systems of Polynomial Equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. 2002. Vol. 97
5. What is Coq
   https://coq.inria.fr/
6. Gács A., Héger T., Nagy Z., Pálvölgyi D. Permutations, hyperplanes and polynomials over finite fields. 2010. Vol. 16
7. Akbari S., Daemi A., Hatami O., Javanmard A., Mehrabian A. Zero-Sum Flows in Regular Graphs. Graphs and Combinatorics. 2010. Vol. 26
8. Cox D., Little J., O'Shea D. Using algebraic geometry. 1998
9. Jukha S. External Combinatorics With Application in Computer Science Second Edition. 2001
10. Herstein I. N. Topics in Algebra Second Edition. 1975
11. Alon N. Additive Latin Transversals. Israel Journal of Mathematics. 2000. Vol. 117
12. Alon N., Füredi Z. Covering the Cube by Affine Hyperplanes, European Journal of Combinatorics. 1993. Vol. 14, no.2
13. Orlik P., Terao H. Arrangements of Hyperplanes. Springer Science & Business Media. 1992
14. Rosen Kenneth Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition. 2011
15. Magic graph
    https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_graph
16. Lee S., Sun H., Wen I. On group magic graphs. J. Combin. Math. Combin. Comput. 2001