Список літератури

1. Глушков В. М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта / В. М. Глушков // Кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 3–13.
2. Giunchiglia F. Reasoning theories: Towards an architecture for Open Mechanized Reasoning Systems / F. Giunchiglia, P. Pecchiari, C. L. Talcott // Technical Report 9409–15. – IRST, Trento, Italy. – 1994.
3. Abbott John. A report on OpenMath: A protocol for the exchange of mathematical information / John Abbott, Angel Diaz, Robert S. Sutor // ACM SIGSAM Bulletin. – Vol. 30, Num. 1. – 1996. – P. 21–24.
4. Lyaletski A. Evidential paradigm: a current state / A. Lyaletski and M. Morokhovets // Programme of the International Conference "Mathematical Challenges of the 21st Century". – University of California, Los Angeles, USA. – 2000.
5. Siek J. Practical theorem proving with Isabelle [Electronic resource] / Isar lecture notes / J. Siek. – Mode of access: http://www.cs.colorado.edu/~siek/7000/spring07/isabelle-notes.pdf. – Title from the screen.
6. The Automath checker [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.cs.ru.nl/~freek/aut/. – Title from the screen.
7. The Coq proof assistant [Electronic resource]. – Mode of access: http://coq.inria.fr/. – Title from the screen.
8. The Isabelle generic proof assistant [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/Isabelle/index.html. – Title from the screen.
9. The LambdaCLAM proof planning system [Electronic resource]. – Mode of access: http://dream.inf.ed.ac.uk/software/lambda-clam. – Title from the screen.
10. The Mizar project [Electronic resource]. – Mode of access: http://mizar.org. – Title from the screen.
11. The SAD system [Electronic resource]. – Mode of access: http://nevidal.org/sad.en.html. – Title from the screen.
12. The Theorema project [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.risc.jku.at/research/theorema/description. – Title from the screen.

A. Afonin, O. Lyaletskiy

FEATURES OF INTELLIGENT INFORMATION PROCESSING IN MODERN SYSTEMS OF THINKING AUTOMATION

The modern paradigms and styles of intelligent information processing in automated reasoning systems are considered in the paper.

Keywords: thinking processing, information processing, machine proof, Theorema, Isabelle, Coq, Automath, Lambda-Clam, Mizar, SAD.

Матеріал надійшов 16.10.2013

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С. С.

ЧИСЛЕННЯ СЕКВЕНЦІЙНОГО ТИПУ ДЛЯ ЧИСТИХ ПЕРШОПОРЯДКОВИХ ЛОГІК КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів побудовано спеціальні секвенційні числення, які використовують предикати-індикатори наявності значень для змінних. Такі числення пропоновано для логік кванторного та кванторно-екваційного рівнів. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

Ефективним апаратом пошуку виведень є числення ґенценівського, або секвенційного типу. Такі числення побудовано [1] для композиційно-номінативних логік (КНЛ) однозначних часткових предикатів різних рівнів абстрактності й загальності. Використання в програмуванні часткових та необов'язково однозначних відображень над номінативними даними робить актуальним дослідження КНЛ як однозначних, так і неоднозначних часткових предикатів. Секвенційні числення для таких КНЛ запропоновано в [2–4]. Зокрема, в [4] побудовано числення для реномінативних КНЛ часткових і тотальних, однозначних та неоднозначних предикатів. Запропонована стаття є продовженням роботи [4].

Метою статті є побудова спеціальних секвенційних числень для першопорядкових КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Такі числення запропоновано для КНЛ кванторного рівня, або чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ), та КНЛ кванторно-екваційного рівня (ЧКНЛ з рівністю). Характерними особливостями цих числень є використання спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для предметних змінних та секвенційних форм елімінації кванторів під реномінацією. Для збудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1–4].

1. Першопорядкові секвенційні числення

Семантичною основою побудови секвенційних числень є властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Вивчення таких відношень для першопорядкових КНЛ часткових однозначних (неокласична семантика), тотальних неоднозначних (пересичена семантика) та часткових неоднозначних (загальна семантика) предикатів проведено в [5]. Досліджено «істиннісний» $|=_T$, «хибнісний» $|=_F$, «сильний» $|=_{TF}$, «неспростовнісний» $|=_{Cl}$, «насичений» $|=_{Cm}$ логічні наслідки.

Базовими композиціями КНЛ кванторного рівня є $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$. На кванторно-екваційному рівні додаємо до них спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності. Можна розглядати дві різновидності таких предикатів – предикати слабкої рівності $=_{xy}$ та предикати строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$. Предикати $=_{xy}$ є частковими однозначними, тому їх можна розглядати лише в неокласичній і загальній семантиках. Такі предикати $=_{xy}$ монотонні й еквітонні. ЧКНЛ із предикатами слабкої рівності розглядалися в [6], для відношення $|=_{Cl}$ в неокласичній семантиці таких логік побудовано секвенційні числення.

У цій роботі будемо розглядати ЧКНЛ із предикатами строгої рівності.

Задамо предикати $\equiv_{xy}$ областями їх істинності й хибності:

$\boldsymbol{T}(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V\!A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\} \cup \{d \in {}^V\!A \mid d(x)\uparrow$ та $d(y)\uparrow\}$;

$\boldsymbol{F}(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V\!A \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\} \cup \{d \in {}^V\!A \mid d(x)\downarrow, d(y)\uparrow$ або $d(x)\uparrow, d(y)\downarrow\}$.

Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, проте немонотонні й нееквітонні.

Для опису властивостей, пов'язаних з елімінацією кванторів, використаємо спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори εz, які визначають наявність у даних компоненти з відповідним іменем z. Задамо їх так:

$\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \in {}^V\!A \mid d(z)\uparrow\}$; $\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \in {}^V\!A \mid d(z)\downarrow\}$.

Теорема 1. *Маємо* $\equiv_{xy} = (=_{xy} \& \neg\varepsilon x \& \neg\varepsilon y) \vee (\varepsilon x \& \varepsilon y)$.

Отже, предикати $\equiv_{xy}$ можна подати через предикати $=_{xy}$ та предикати-індикатори εz. Водночас подання $=_{xy}$ через $\equiv_{xy}$ та εz за допомогою композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ неможливе, адже ці композиції зберігають тотальність предикатів.

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ традиційно позначаємо $x = y$ та $x \equiv y$.

Секвенційні числення будуємо на основі властивостей відношень логічного наслідку для множин формул. На *реномінативному* рівні такими є [4] властивості типу RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg$ΦN, RR, $\neg$RR, R$\neg$, $\neg$R$\neg$, R$\vee$, $\neg$R$\vee$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$. До них додаємо властивості *кванторного* рівня типу R$\exists$R та $\neg$R$\exists$R [2, 3]. Для $|=_{Cl}$ (неокласична семантика) та $|=_{Cm}$ (пересичена семантика) додаємо властивості типу $\neg$, а властивості типу $\neg$RT, $\neg$ΦN, $\neg$R$\exists$R, $\neg$RR, $\neg$R$\neg$, $\neg$R$\vee$, $\neg\neg$, $\neg\vee$ тоді похідні.

Маємо такі властивості елімінації кванторів (тут і далі, якщо інше окремо не зазначено, $|=_*$ позначає: одне із $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$ для неокласичної семантики; одне із $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cm}$ для пересиченої; $|=_{TF}$ для загальної):

$\exists R_{\vdash}$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Gamma |=_* \Delta, \varepsilon z$;

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma |=_* \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists R_{\dashv}$) $\Gamma |=_* \Delta, \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists_{\dashv}$) $\Gamma |=_* \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \neg R_z^x(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists Rf_{\dashv}$) $\Gamma |=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon z$;

$\exists f_{\dashv}$) $\Gamma |=_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi), \varepsilon z$;

$\neg\exists Rf_{\vdash}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Gamma |=_* \Delta, \varepsilon z$;

$\neg\exists f_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi), \Gamma |=_* \Delta, \varepsilon z$.

Для властивостей $\exists R_{\vdash}$, $\neg\exists R_{\dashv}$, $\exists Rf_{\dashv}$, $\neg\exists Rf_{\vdash}$ умови: $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$.

Для властивостей $\exists_{\vdash}$, $\neg\exists_{\dashv}$, $\exists f_{\dashv}$, $\neg\exists f_{\vdash}$ умови: $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists$Rv$_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta,$
$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y;$

$\exists$v$_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y;$

$\neg\exists$Rv$_{\vdash}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow$
$\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y;$

$\neg\exists$v$_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi),$
$\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y;$

$\exists$Rd$_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ та
$\Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y;$

$\exists$d$_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi,$
$R_y^x(\Phi), \varepsilon y;$

$\neg\exists$Rd$_{\vdash}$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varepsilon y, \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta$ та $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),$
$\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y;$

$\neg\exists$d$_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta$ та $\neg\exists x\Phi,$
$\neg R_y^x(\Phi), \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y.$

Для предикатів строгої рівності маємо такі властивості:

Rf) $\Gamma \models_* \Delta, x \equiv x$ (випливає з того, що предикат $x \equiv x$ тотожно істинний);

Eε) $x \equiv y, \varepsilon x, \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y;$

$\neg$E) $\Gamma \models_* \Delta, \neg x \equiv y \Leftrightarrow x \equiv y, \Gamma \models_* \Delta$ та
$\neg x \equiv y, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, x \equiv y;$

Sm) $x \equiv y, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, y \equiv x, \Gamma \models_* \Delta;$

Tr) $x \equiv y, y \equiv z, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, y \equiv z, x \equiv z, \Gamma \models_* \Delta;$

EΦ$_{\vdash}$) $x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$
$x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta;$

EΦ$_{\dashv}$) $x \equiv y, \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi) \Leftrightarrow x \equiv y, \Gamma \models_* \Delta,$
$R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi).$

Секвенції – це множини формул, відмічених (специфікованих) символами ${}_{\vdash}$ та ${}_{\dashv}$. Формули, відмічені ${}_{\vdash}$, назвемо *T*-формулами, а відмічені ${}_{\dashv}$ – *F*-формулами.

Для секвенції Σ введемо множини означених та неозначених предметних імен, або *val*-змінних та *unv*-змінних: $val(\Sigma) = \{x \in V \mid {}_{\dashv}\varepsilon x \in \Sigma\}$; $unv(\Sigma) = \{x \in V \mid {}_{\vdash}\varepsilon x \in \Sigma\}$.

Нехай $Un = unv(\Sigma)$, а *R*-формула $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$ така: $\{x_1,\ldots,x_n\} \cap Un = \varnothing$, $\{v_1,\ldots,v_m\} \cap Un = \varnothing$, $\{r_1,\ldots,r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\} \subseteq Un$. Назвемо *Un-unv-формою* формули $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$ вираз $R_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon, v_1,\ldots,v_m}^{x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots,u_m}\Phi$, де ε позначає невизначене значення. *R*-формули Φ і Ψ *Un-unv-еквівалентні*, якщо Φ і Ψ мають однакові *Un-unv*-форми.

Секвенційні числення будуємо так: секвенція ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$.

Аксіоми секвенційного числення – *замкнені* секвенції. Замкненість секвенції $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ означає, що $\Gamma \models_* \Delta$. Базова умова замкненості секвенції Σ в усіх численнях:

C) існує формула Φ така, що ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Додаткова умова замкненості секвенції в усіх численнях – *unv-замкненість*.

Секвенцію Σ із множиною *unv*-змінних *Un* назвемо *unv*-замкненою, якщо:

UnC) існують *Un-unv*-еквівалентні *R*-формули Φ та Ψ такі: ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\dashv}\Psi \in \Sigma$.

Додатковими умовами замкненості Σ є CL, CR, CLR. Ці умови індуковані відповідними властивостями *CL*, *CR*, *CLR* [4], які істотні для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

CL) існує формула Φ така: ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \Sigma$;

CR) існує формула Φ така: ${}_{\dashv}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\dashv}\neg\Phi \in \Sigma$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: ${}_{\vdash}\Phi \in \Sigma$, ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \Sigma$, ${}_{\dashv}\Psi \in \Sigma$, ${}_{\dashv}\neg\Psi \in \Sigma$.

Для числень з рівністю додаткові умови замкненості Σ індукуються Rf та Eε:

CRf) ${}_{\dashv}x \equiv x \in \Sigma$ для деякого $x \in V$;

CEε) ${}_{\vdash}\varepsilon x \in \Sigma$, ${}_{\dashv}\varepsilon y \in \Sigma$ та ${}_{\vdash}x \equiv y \in \Sigma$ для деяких $x, y \in V$.

Різновидності секвенційних числень ЧКНЛ. Залежно від відношення логічного наслідку та семантики для чистих першопорядкових КНЛ отримуємо низку різновидностей секвенційних числень (табл. 1 і 2).

Таблиця 1. **Секвенційні числення ЧКНЛ**

	|=Cl	|=Cm	|=T	|=F	|=TF
НС	QSC	–	QSL	QSR	QSLR
ПС	–	QSC	QSR	QSL	QSLR
ЗС	–	–	QSG	QSG	QSG

Таблиця 2. **Секвенційні числення ЧКНЛ з предикатами строгої рівності**

	|=Cl	|=Cm	|=T	|=F	|=TF
НС	QEsC	–	QEsL	QEsR	QEsLR
ПС	–	QEsC	QEsR	QEsL	QEsLR
ЗС	–	–	QEsG	QEsG	QEsG

Числення, назва якого на перетині стовпця $\models_*$ та рядка σ, формалізує відношення логічного наслідку $\models_*$ в семантиці σ. Тут * – одне з *T*, *F*, *TF*, *Cl*, *Cm*; НС – некласична семантика (КНЛ часткових однозначних предикатів); ПС – пересичена семантика (КНЛ тотальних неоднозначних предикатів); ЗС – загальна семантика (КНЛ часткових неоднозначних предикатів).

Наведемо умови замкненості секвенції у відповідному численні.

QSC: умова C ∨ UnC;

QEsC: умова C ∨ UnC ∨ CRf ∨ CEε;

QSL: умова C ∨ CL ∨ UnC;

QEsL: умова C ∨ CL ∨ UnC ∨ CRf ∨ CEε;

QSR: умова C ∨ CR ∨ UnC;

QEsR: умова C ∨ CR ∨ UnC ∨ CRf ∨ CEε;

QSLR: умова C ∨ CLR ∨ UnC;

QEsLR: умова C ∨ CLR ∨ UnC ∨ CRf ∨ CEε;

QSG: умова C ∨ UnC;

QEsG: умова C ∨ UnC ∨ CRf ∨ CEε.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми – синтаксичні аналоги властивостей відношень логічного наслідку для множин формул.

Для числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QSG* такими є відомі [4] форми $_{\vdash}$RT, $_{\dashv}$RT, $_{\vdash}\neg$RT, $_{\dashv}\neg$RT, $_{\vdash}$ΦN, $_{\vdash}$ΦN, $_{\vdash}\neg$ΦN, $_{\dashv}\neg$ΦN, $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}\neg$RR, $_{\dashv}\neg$RR, $_{\vdash}$R¬, $_{\dashv}$R¬, $_{\vdash}\neg$R¬, $_{\dashv}\neg$R¬, $_{\vdash}$R∨, $_{\dashv}$R∨, $_{\vdash}\neg$R∨, $_{\dashv}\neg$R∨, $_{\vdash}\neg\neg$, $_{\dashv}\neg\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}\neg\vee$, $_{\dashv}\neg\vee$, до яких додаються:

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\exists xA),\Sigma};\ _{\dashv}\neg\mathrm{R\exists R}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\vdash}\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}R_y^x(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}R_y^x(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}\neg R_y^x(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\mathrm{R\exists p}\ \frac{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}\neg R_y^x(\exists xA),\Sigma}.$$

Форми для елімінації кванторів:

$$_{\vdash}\exists\ \frac{_{\vdash}R_z^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\exists xA,\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\exists\ \frac{_{\dashv}\neg R_z^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\exists\mathrm{R}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};\ _{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{f}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R_z^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R_z^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\neg\exists$, $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f умова: $z\in V_T$ і $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$.

Для форм $_{\vdash}\exists$R, $_{\dashv}\neg\exists$R, $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA))$.

Форми $_{\dashv}\exists$f, $_{\vdash}\neg\exists$f, $_{\dashv}\exists$Rf, $_{\vdash}\neg\exists$Rf назвемо формами типу ∃f. Для цих форм додаткова умова: $val(\Sigma)=\varnothing$, тобто Σ не містить формул вигляду $_{\dashv}\varepsilon z$.

$$_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R_y^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R_y^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}.$$

Форми $_{\dashv}\exists$v, $_{\vdash}\neg\exists$v та $_{\dashv}\exists$Rv, $_{\vdash}\neg\exists$Rv назвемо формами типу ∃v.

$$_{\dashv}\exists\mathrm{d}\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}\exists xA,\Sigma \qquad _{\dashv}\exists xA,\ _{\dashv}R_y^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{d}\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma \qquad _{\vdash}\neg\exists xA,\ _{\vdash}\neg R_y^x(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{Rd}\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad _{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rd}\ \frac{_{\vdash}\varepsilon y,\ _{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad _{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ _{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Двозасновкові форми $_{\dashv}\exists$d, $_{\vdash}\neg\exists$d, $_{\dashv}\exists$Rd, $_{\vdash}\neg\exists$Rd назвемо формами типу ∃d. Для них умова: ε*y* не входить до Σ, проте Σ містить принаймні один символ вигляду ε*z*.

Ми ввели дві різновидності форм для елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією (∃R-форми) та елімінації зовнішнього квантора (∃-форми).

Форми $_{\vdash}\exists$R, $_{\dashv}\neg\exists$R, $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\neg\exists$ назвемо $\exists_T$-формами, а форми типів ∃f, ∃v, ∃d назвемо $\exists_F$-формами. Форми типів RT, ¬RT, ΦN, ¬ΦN, R∃R, ¬R∃R, R∃p ¬R∃p назвемо *допоміжними*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

Зауважимо, що символи предикатів-індикаторів ε*y* можуть фігурувати в секвенціях лише у складі специфікованих формул $_{\vdash}\varepsilon y$ і $_{\dashv}\varepsilon y$, які індукуються формами елімінації кванторів. Початкова секвенція не містить спеціальних символів ε*y*.

У численні *QSC* обходимося без форм для зовнішнього заперечення. Базовими секвенційними формами числення *QSC* є ${}_{\vdash}$RT, ${}_{\dashv}$RT, ${}_{\vdash}$ΦN, ${}_{\dashv}$ΦN, ${}_{\vdash}$R∃R, ${}_{\dashv}$R∃R, ${}_{\vdash}$R∃p, ${}_{\dashv}$R∃p, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}$RR, ${}_{\vdash}$R¬, ${}_{\dashv}$R¬, ${}_{\vdash}$R∨, ${}_{\dashv}$R∨, ${}_{\vdash}$∃, ${}_{\vdash}$∃R, ${}_{\dashv}$∃f, ${}_{\dashv}$∃Rf, ${}_{\dashv}$∃v, ${}_{\dashv}$∃Rv, ${}_{\dashv}$∃d, ${}_{\dashv}$∃Rd. Форми ${}_{\vdash}\neg$ та ${}_{\dashv}\neg$ – це традиційні [1] форми секвенційних числень.

Для числень *QEsL*, *QEsR*, *QEsLR*, *QEsG* до базових форм числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QSG* додаємо допоміжні форми, пов'язані з предикатами строгої рівності:

$$ {}_{\vdash}\neg\mathrm{E}\ \frac{{}_{\dashv}x\equiv y,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg x\equiv y,\ \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{E}\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg x\equiv y,\ \Sigma}; $$

$$ \mathrm{Sm}\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\vdash}y\equiv x,\ \Sigma}{{}_{\vdash}x\equiv y,\ \Sigma}; $$

$$ \mathrm{Tr}\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\vdash}y\equiv z,\ {}_{\vdash}x\equiv z,\ \Sigma}{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\vdash}y\equiv z,\ \Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{E}\Phi\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathrm{E}\Phi\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{E}\neg\Phi\ \frac{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x=y,\ {}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathrm{E}\neg\Phi\ \frac{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}x\equiv y,\ {}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi),\ \Sigma}. $$

Для числення *QEsC* можна обмежитись доданням до базових секвенційних форм числення *QSC* допоміжних форм Sm, Tr, ${}_{\vdash}$EΦ, ${}_{\dashv}$EΦ, пов'язаних з рівністю.

Основну властивість базових секвенційних форм встановлює

Теорема 2. *Нехай* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\ {}_{\dashv}\mathrm{K}}{{}_{\vdash}\Gamma\ {}_{\dashv}\Delta}$ *та* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\ {}_{\dashv}\mathrm{K}\quad {}_{\vdash}\mathrm{X}\ {}_{\dashv}\mathrm{Z}}{{}_{\vdash}\Gamma\ {}_{\dashv}\Delta}$

— секвенційні форми. Тоді:

1) *якщо* $\Lambda\,|\!=\mathrm{K}$, *то* $\Gamma\,|\!=\Delta$; 2) *якщо* $\Lambda\,|\!=\mathrm{K}$ *та* $\mathrm{X}\,|\!=\mathrm{Z}$, *то* $\Gamma\,|\!=\Delta$.

2. Теореми коректності та повноти

Виведення в секвенційних числень має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

Поетапна процедура побудови дерева для заданої секвенції Σ по суті однакова для різних першопорядкових числень [1–3]. Така процедура починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* «нових» тотально (строго) неістотних імен такий, що $nm(\Sigma)\cap TN=\varnothing$. На початку кожного етапу виконується крок доступу: до списку доступних додаємо по одній зі списків *T*-формул та *F*-формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

На початку кожного етапу перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги доступні формули секвенцій). Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією (незамкнена вершина-секвенція Ω фінальна, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до Ω не вводить формул, відмінних від формул секвенцій на шляху від кореня до Ω).

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу та добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ таким чином. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ. Далі до кожної активної формули застосовуємо відповідну основну форму. За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми типів RT, ¬RT, ΦN, ¬ΦN, R∃R, ¬R∃R, R∃p, ¬R∃p. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, на цьому етапі до них основні форми не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному такому застосуванні беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне *z* як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Потім застосовуємо форми типу RR, ¬RR, R¬, ¬R¬, R∨, ¬R∨, ¬¬, ∨, ¬∨. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо так.

Якщо в момент застосування $\exists_F$-форми до певної *F*-формули Ψ секвенції ξ маємо $val(\xi)=\varnothing$, то застосовуємо відповідну форму типу ∃f; якщо ж $val(\xi)\neq\varnothing$, то для кожного $z\in val(\xi)$ застосовуємо відповідну форму типу ∃v. Нехай після такого застосування форми типу ∃f чи форм типу ∃v отримана секвенція η. Далі до цієї Ψ багатократно застосовуємо відповідну форму типу ∃d, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною η.

Це робимо для всіх $y \in nm(\eta_0) \setminus (val(\eta) \cup unv(\eta))$, де η_0 – множина доступних на даний момент формул η. Зауважимо, що $val(\eta) = val(\eta_0)$ і $unv(\eta) = unv(\eta_0)$, адже специфіковані $_{\vdash}\varepsilon x$ і $_{\dashv}\varepsilon x$ індукуються формами елімінації кванторів, тому не можуть бути серед недоступних формул секвенції.

Для числень ЧКНЛ з рівністю після кожного застосування базової форми ЧКНЛ кванторного рівня при потребі робимо такі додаткові кроки. Нехай на попередньому кроці отримана $_{\vdash}a \equiv b$, або $_{\vdash}a \equiv b$ стала доступною на початку етапу. Тоді за допомогою ESm додаємо $_{\vdash}b \equiv a$. При появі $_{\vdash}a \equiv b$ та $_{\vdash}b \equiv c$ за допомогою ETr додаємо $_{\vdash}a \equiv c$; враховуючи ESm, це означає, що до наявних $_{\vdash}a \equiv b$, $_{\vdash}b \equiv a$, $_{\vdash}b \equiv c$, $_{\vdash}c \equiv b$ додаємо $_{\vdash}a \equiv c$, $_{\vdash}c \equiv a$. При отриманні $_{\vdash}a \equiv b$ далі, використовуючи форми типу EΦ та E¬Φ, для кожної наявної доступної $_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{a,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{a,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{a,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{a,\bar{v}}(\Phi)$ додаємо відповідно $_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{b,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{b,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{b,\bar{v}}(\Phi)$, $_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{b,\bar{v}}(\Phi)$.

Після виконання кожної форми перевіряємо на замкненість секвенції-вершини. При появі замкненої секвенції до неї незастосовна жодна форма, процес побудови дерева на цьому шляху обривається. Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то маємо скінченне замкнене дерево. Якщо ця процедура завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або процедура не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Теорема 3 (коректності). $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні* $\beta \Rightarrow \Gamma \models_{*} \Delta$ *в семантиці* σ.

Тут $*$ – одне з *T*, *F*, *TF*, *Cl*, *Cm*; σ – одна з семантик, скорочене позначення якої є іменем рядка таблиці 1 чи 2. Назва β числення – на перетині стовпця $\models_{*}$ і рядка σ.

Доведення. Нехай $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, тоді для неї побудовано замкнене секвенційне дерево. Для кожної його вершини $_{\vdash}\Lambda_{\dashv}K$ маємо $\Lambda \models_{*} K$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості, для інших вершин – із збереження секвенційними формами відповідних відношень логічного наслідку (від засновків до висновків).

Для доведення повноти побудованих числень використаємо метод модельних (хінтікківських) множин. Визначення модельної множини специфікованих формул [2–4] мають певні відмінності для різних секвенційних числень.

Модельна множина *H* формул, специфікованих символами $_{\vdash}$ та $_{\dashv}$, визначається умовами коректності та умовами переходу.

Для *L*-модельних, *R*-модельних, *LR*-модельних, *G*-модельних множин умови переходу: H¬¬, H∨, H¬∨¬, HRT, H¬RT, HΦN, H¬ΦN, HRR, H¬RR, HR¬, H¬R¬, HR∨, H¬R∨, HR∃R, H¬R∃R, HR∃p, H¬R∃p, H∃, H¬∃, H∃R, H¬∃R [2–4].

Ці множини відрізняються умовами коректності:

L-модельна: умови HC, HCL, HCU;
R-модельна: умови HC, HCR, HCU;
LR-модельна: умови HC, HCLR, HCU;
G-модельна: умови HC та HCU.

Ці умови наведено в [3, 4].

Для *LE*-модельних, *RE*-модельних, *LRE*-модельних, *GE*-модельних множин до цих умов переходу додаємо умови H¬E, HSm, HTr, HEΦ, HE¬Φ:

H¬E) якщо $_{\vdash}\neg x \equiv y \in H$, то $_{\dashv}x \equiv y \in H$, якщо $_{\dashv}\neg x \equiv y \in H$, то $_{\vdash}x \equiv y \in H$;

HSm) якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$, то $_{\vdash}y \equiv x \in H$;

HTr) якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$ і $_{\vdash}y \equiv z \in H$, то $_{\vdash}x \equiv z \in H$;

HEΦ) якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$ і $_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $_{\vdash}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi) \in H$;

якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$ і $_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $_{\dashv}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi) \in H$;

HE¬Φ) якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$ і $_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $_{\vdash}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi) \in H$;

якщо $_{\vdash}x \equiv y \in H$ і $_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(\Phi) \in H$, то $_{\dashv}\neg R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(\Phi) \in H$.

До умов коректності додаємо:

HCEε) не існує $x, y \in V$ таких, що $_{\vdash}\varepsilon x \in H$, $_{\dashv}\varepsilon y \in H$, $_{\vdash}x \equiv y \in H$;

HCRf) жодна формула вигляду $_{\dashv}x \equiv x$ не може належати до *H*.

Для *C*-модельних множин умови переходу: HC, HCU, HRT, HΦN, HR∃R, HR∃p, H¬, H∨, HRR, HR¬, HR∨, H∃, H∃R; умови коректності: HC та HCU.

Для *CE*-модельних множин до таких умов переходу додаємо HSm, HTr, HEΦ; до умов коректності додаємо HCEε та HCRf.

Теорема 4. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві, H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді H – модельна множина відповідного типу* (*L*-, *R*-, *LR*-, *G*-, *C*-, *LE*-, *RE*-, *LRE*-, *GE*-, *CE-модельна*).

За модельною множиною можна побудувати контрмодель.

Теорема 5. *Нехай H – модельна множина, яка може бути L-, R-, LR-, G-, LE-, RE-, LRE-, GE-модельною. Тоді існують моделі мови* $\boldsymbol{A} = (A, I)$, $\boldsymbol{B} = (A, I)$ *та існують* δ, $\eta \in {}^{V}\!A$ *такі*:

1) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ *і* $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$;

2) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ *і* $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Такі пари ($\boldsymbol{A}$, δ) і ($\boldsymbol{B}$, η) назвемо T-контрмоделлю та F-контрмоделлю.

Доведення. Нехай $W = \{y \in nm(H) \mid {}_{\dashv}\varepsilon y \in H\}$. Для випадку ЧКНЛ кванторного рівня H може бути L-, R-, LR-, G-модельною. Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деякі ін'єктивні $\delta, \eta \in {}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$. Така A дублює множину W.

Для випадку ЧКНЛ з рівністю H може бути LE-, RE-, LRE-, GE-модельною. Рівність індукує на W відношення еквівалентності: $x \sim y \Leftrightarrow {}_{\vdash}x \equiv y \in H$. Нехай $A = W/_{\sim}$ – фактор-множина такої W за відношенням $\sim$. Позначимо $[v]$ клас еквівалентності з представником v. Задамо $\delta = [v \mapsto [v] \mid v \in W]$. Таке δ є сюр'єкцією $W \to A$.

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ і η, а також на даних (іменних множинах) вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ і $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$:

– $_{\vdash}\varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$ та $\eta \notin \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$;
– $_{\dashv}\varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$ та $\eta \in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$;
– $_{\vdash}p \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta \notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}p \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta \in \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\vdash}\neg p \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\eta \notin \boldsymbol{T}(p_B)$;
– $_{\dashv}\neg p \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\eta \in \boldsymbol{T}(p_B)$;
– $_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \notin \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \in \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin \boldsymbol{T}(p_B)$;
– $_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \notin \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \in \boldsymbol{T}(p_B)$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів та їх заперечень задаємо довільно із таким обмеженням: для всіх $d, h \in {}^{V}\!A$ таких, що $d \| \text{-}\nu(p) = h \| \text{-}\nu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$, $\neg p_A(d) = \neg p_A(h)$, $p_B(d) = p_B(h)$, $\neg p_B(d) = \neg p_B(h)$.

Далі доведення теореми проводиться традиційним чином: індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини H.

Теорема 6. *Нехай H – C-модельна чи CE-модельна множина. Тоді існують моделі мови* $\boldsymbol{A} = (A, I)$, $\boldsymbol{B} = (A, I)$ *та існують* δ, $\eta \in {}^{V}\!A$ *такі*:1) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ *та* $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$;
2) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ *та* $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_B)$.

Такі пари ($\boldsymbol{A}$, δ) і ($\boldsymbol{B}$, η) назвемо Cl-контрмоделлю та Cm-контрмоделлю.

Доведення аналогічне доведенню теореми 5, причому достатньо задавати на δ і η та на даних вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ і $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$ лише значення базових предикатів:

– $_{\vdash}\varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$ та $\eta \notin \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$;
– $_{\dashv}\varepsilon y \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$ та $\eta \notin \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$;
– $_{\vdash}p \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\eta \notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}p \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\eta \notin \boldsymbol{T}(p_B)$;
– $_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in \boldsymbol{T}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– $_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta) \in \boldsymbol{F}(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta) \notin \boldsymbol{T}(p_B)$.

Теореми *повноти* для різних варіантів секвенційних числень та логічних наслідків формулюються однотипно, доведення опирається на теореми про контрмоделі та аналогічне доведенню відповідних теорем робіт [2–4].

Поєднуючи теореми повноти і теореми коректності, отримуємо:

Теорема 7. *Для семантики* σ *маємо*: $\Gamma \models_{*} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні* β.

Назву β числення читаємо на перетині стовпця $\models_{*}$ та рядка σ (таблиці 1 і 2).

Висновки

У роботі побудовано спеціальні секвенційні числення чистих першопорядкових композиційно номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Такі числення пропонуються для логік кванторного рівня та логік кванторно-екваційного рівня з предикатами строгої рівності. Характерною особливістю цих числень є використання спеціальних предикатів-індикаторів, які визначають наявність значення для предметних змінних, а також використання секвенційних форм елімінації кванторів під реномінацією. Для збудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Планується продовжити побудову подібних числень для різних відношень логічного наслідку в ЧКНЛ із предикатами слабкої рівності.

Список літератури

1. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Шкільняк С. С. Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів / С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 2–3. – С. 33–43.
3. Шкільняк С. С. Секвенційні числення логік часткових та неоднозначних квазіарних предикатів / С. С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 231–236.
4. Шкільняк С. С. Секвенційні числення реномінативних логік квазіарних предикатів / С. С. Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. – 2012. – Т. 138. Комп'ютерні науки. – С. 23–29.
5. Шкільняк С. С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
6. Нікітченко М. С. Логіки квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2012. – № 4. – С. 19–34.

S. Shkilniak

SEQUENT CALCULI FOR PURE FIRST-ORDER LOGICS OF QUASI-ARY PREDICATES

We construct special sequent calculi for pure first-order composition-nominative logics of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued quasi-ary predicates with using of special variable definedness predicates. Such calculi are proposed for logics of quantifier level and for logics of quantifier-equational level. The soundness and completeness theorems for the introduced calculi are proved.

Keywords: logic, predicate, logical consequence. sequent calculi.

Матеріал надійшов 20.11.2012

УДК 519.95

Порхун О. В.

ВСТАНОВЛЕННЯ ДІАГНОЗУ ДЕРМАТОЛОГІЧНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНОГО ВИХІДНОГО КОДУ ТА ПЕРСЕПТРОНУ

У статті розглянуто моделі розподіленого вихідного коду для вирішення задачі мультикласифікації з використанням нейронної мережі багатошаровий персептрон та описано застосування розробленої системи мультикласифікації з реалізацією описаних моделей для вирішення задачі визначення діагнозу захворювання пацієнтів в області дерматології.

Ключові слова: мультикласифікація, розподілений вихідний код, вичерпний код, матриця кодових слів, багатошаровий персептрон.

Вирішення проблем класифікації у різних предметних областях вимагає досліджень з розробки нових ефективних методів, алгоритмів та систем. Для багатьох практичних задач число класів об'єктів, які класифікуються, більше, ніж 2. Зокрема, у задачах медичної діагностики числом класів є кількість можливих діагнозів в області захворювання, при розпізнаванні рукописних символів кількість класів задається відповідно до розмірності алфавіту, що використовується, у задачах класифікації текстів класи задаються відповідно до обраного профілю класифікації, наприклад за тематикою, стилем написання (авторством) тощо.