

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСТЕРА
Курсова робота за спеціальністю "Прикладна математика"

Керівник курсової роботи
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач
Тимошкевич Л.М.

_____ (підпис)
«_____» _____ 2021р.
Виконала студентка
3-го року навчання
Когут М.В.
«_____» _____ 2021р.

Київ – 2021

Тема: Спектральна теорія графів Кокстера
Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	24.10.2020	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	01.11.2020	
3.	Аналіз літератури за темою роботи.	21.11.2020	
4.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	09.01.2021	
5.	Аналіз отриманих результатів керівником.	21.01.2021	
6.	Оформлення курсової роботи.	14.04.2021	
7.	Створення презентації до курсової роботи.	12.05.2021	
8.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Зміст

1	Вступ	3
2	Основні означення і твердження	4
2.1	Графи Костера	4
2.2	Злічені граfi Костера	6
2.3	Теорема Фробеніуса	7
3	Індекси злічених графів Кокстера	8
3.1	Теорема про індекс злічених графів	8
3.2	Індекси графів, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга	12
4	Класифікація злічених графів Кокстера за індексом	25
5	Висновки	27
6	Список літератури	28

1 Вступ

Теорія графів – популярний, але й досі не до кінця досліджений, розділ дискретної математики. Він використовується в багатьох сферах життя, які на перший погляд зовсім не схожі між собою. Це обумовлено тим, що визначення графу є досить загальним та абстрактним, тому у вигляді графу можна представити безмежну кількість об'єктів з повсякденного життя. Також графи можна легко візуалізувати, завдяки чому вони більш наглядні та з ними зручніше працювати.

Одним з напрямів теорії графів є спектральна теорія графів. Вона вивчає властивості графів за допомогою характеристичних многочленів, власних векторів та власних чисел матриць, що пов'язані з графами, наприклад, матриці суміжності. Тобто, досліджує зв'язок між спектральними та структурними ознаками графа.

Спектральна теорія графів знайшла застосування як в математичній галузі, так і в інших сферах життя. Наведемо кілька прикладів використання цього розділу. В квантовій хімії застосовується для виявлення зв'язку між структурою хімічної сполукою та спектральними властивостями її молекулярного графа. Також використовується в ІТ сфері, наприклад, при моделюванні комп'ютерних мереж чи обробці зображень.

Більш вузьким напрямом дослідження є спектральна теорія графів Кокстера. Ця тема є також актуальною, тому що теж знайшла своє застосування. Наприклад, вона використовується у класифікаційних теоремах таких алгебраїчних об'єктів, як напівпростих алгебр Лі або груп, які породженні відображеннями в гранях n -мірного багатогранника.

Мета моєї роботи – дослідити поняття та теореми спектральної теорії злічених графів Кокстера. Також розглянути на прикладах використання деяких теорем для знаходження індексів злічених графів Кокстера. До того ж знайти індекси графів, що раніше не досліджувалися.

2 Основні означення і твердження

2.1 Графи Костера

Означення 2.1. *Графом* називаємо сукупність $G = (V, R)$, де V – непорожня скінченна множина, R – множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів множини V . При цьому множина V називається *множиною вершин графа G* , а множина R називається *множиною ребер графа G* .

Означення 2.2. Вершини графа називаються *суміжними*, якщо вони з'єднані ребром.

Означення 2.3. Якщо вершина графа є кінцем деякого ребра, то ці вершина та ребро називаються *інцидентними*.

Означення 2.4. *Степінь вершини v* – кількість ребер інцидентних даній вершині. Позначається $dev\ v$.

Означення 2.5. *Порядок графа* – кількість вершин графа. Позначається $|G|$.

Означення 2.6. *Графом Кокстера $\mathbf{G}$* називаємо сукупність (G, f) , де G – граф, f – відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, які більші або дорівнюють 3, та символа ∞ . Будемо вважати, що граф G підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Для зручності будемо представляти граф Костера: підпорядкований граф з позначкою $f(e)$ над кожним ребром e . Прийнято не писати числа 3 над ребрами. Такі ребра будемо називати непозначеними, а ребра з позначкою більше 3 – позначеними.

Зауваження 2.1. Звичайні графи є підмножиною графів Кокстера: функція – відображення ребер в число 3.

Зауваження 2.2. Будемо називати граф Кокстера просто графом, якщо з контексту зрозуміло, що йдеться мова про графи Кокстера. Для позначення графа Кокстера використовується жирний шрифт.

Зауваження 2.3. Граф Кокстера будемо називати зв'язним, деревом, циклом і т.п., якщо підпорядкований граф задовільняє цим властивостям.

Означення 2.7. Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ – граф Кокстера. Граф $G_1 = (G_1, f_1)$ називається *підграфом* графа $\mathbf{G}$, якщо G_1 підграф G , і для довільного ребра e графа G_1 : $f_1(e) \leq f(e)$. Позначається $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$.

Означення 2.8. Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини графа Кокстера. Матриця суміжності $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, де $n = |\mathbf{G}|$ – порядок графа $\mathbf{G}$, а елементи матриці $a_{ij} = 2 \cos(\frac{\pi}{k})$, якщо $f(i, j) = k$, $a_{ij} = 2$, якщо $f(i, j) = \infty$, $a_{ij} = 0$, якщо вершини i та j не з'єднані ребром.

Отже, матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ буде симетричною, дійсною та містити нулі на головній діагоналі. Матриця суміжності залежить від порядку, в якому розглядаємо вершини. Якщо граф $\mathbf{G}$ скінченний, $|V| < \infty$, то $A(\mathbf{G})$ буде квадратною матрицею порядку $|V|$.

Сукупність усіх власних значень матриці – спектр матриці. Оскільки, матриця суміжності симетрична, то спектр буде дійсним. Розташуємо точки спектру λ_i в порядку спадання: $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = q_{\mathbf{G}}$.

Означення 2.9. Спектр графа – це спектр матриці суміжності $A(\mathbf{G})$. Позначається $\sigma(\mathbf{G})$.

Означення 2.10. Індекс графа – це максимальне власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$.

Означення 2.11. Характеристичним многочленом матриці суміжності будемо називати $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Приклад 2.1. Розглянемо на прикладі дані поняття.

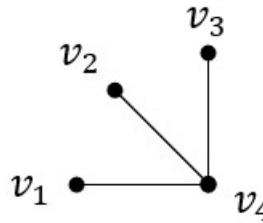


Рис.1

Матриця суміжності:

$$A(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичний многочлен:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\lambda^3 - (\lambda + \lambda)) + (-\lambda^2) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^4 - 3\lambda^2$$

Спектр графа:

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{3}, \lambda_4 = -\sqrt{3}$$

Індекс графа:

$$\lambda_G = \sqrt{3}$$

2.2 Зліченні графи Костера

Означення 2.12. Граф Кокстера називається *зліченим*, якщо він має зліченну множину вершин.

Для зручності записів позначимо $Fin(\mathbf{G})$ множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{G}$.

Для злічених графів $\mathbf{G}$ матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ буде нескінченною вправо та вниз.

Означення 2.13. Індекс зліченного графа – додатнє число або символ ∞ , яке визначається

$$ind \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma$$

Операції на злічених графах Костера.

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ – злічений граф Кокстера. Визначено три операції [5 - 7]:

1. *Операція видалення вершини.* У графі G виділемо вершину x . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де множина вершин $V_1 = V \setminus x$, а множину ребер отримуюмо шляхом видалення з R ребер, що інцидентні вершині x . Розглянемо функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1 . Тоді граф Кокстера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ видаленням вершини x та позначається $\mathbf{G} - x$.
2. *Операція видалення ребра.* У графі G виділемо ребро e . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де множина вершин $V_1 = V$ залишається незмінною, а множина ребер $R_1 = R \setminus e$. Розглянемо функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1 . Тоді граф Кокстера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ видаленням ребра e та позначається $\mathbf{G} - e$.
3. *Операція зменшення мітки на ребрі.* У графі G виділемо ребро e . Розглянемо функцію f_1 , яка тотожно рівна функції f на множині ребер $R \setminus e$, а на ребрі e визначається $f_1(e) < f(e)$. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G}_1 = (G, f_1)$ називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ зменшенням мітки на ребрі e .

Означення 2.14. Сформулюємо означення підграфа в термінах операцій над графами. *Підграфом* графа G називається граф, одержаний шляхом застосування операцій видалення вершини, ребра або зменшення мітки на ребрі графа G .

2.3 Теорема Фробеніуса

Означення 2.15. *Невід'ємна матриця* A – це матриця у якій всі елементи невід'ємні числа. Будемо позначати $A \geq 0$.

Означення 2.16. *Додатна матриця* A – це матриця у якій всі елементи додатні числа. Будемо позначати $A > 0$.

Аналогічно, *невід'ємний* та *додатний вектори* – це вектори з невід'ємними координатами та додатними координатами відповідно. Будемо позначати $x \geq 0$ невід'ємний вектор x та $x > 0$ – додатний.

Означення 2.17. *Розкладна* матриця A – це матриця у якій перестановкою рядків у деякому порядку, а потім стовпчиків у тому самому порядку можна отримати блочну матрицю вигляду $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ з квадратними матрицями на діагоналі. *Нерозкладна* матриця – в іншому разі.

Теорема 2.1. (Фробеніуса) [1, 3, 4, 7] Невід'ємна нерозкладна матриця A завжди має додатне власне значення r . r задовільняє наступним властивостям:

1. r – простий корінь характеристичного рівняння;
2. модулі всіх інших власних значень не перевищують r ;
3. власному числу r відповідає власний додатний вектор.

До того ж, якщо A має k власних значень, які за модулем дорівнюють r , то ці числа всі різні між собою та є коренями рівняння $\lambda^k - x^k = 0$. Якщо розглядати весь спектр матриці A як систему точок на комплексній площині, то він відображається на себе при повороті на кут $2\pi/k$.

Якщо $k > 1$, то перестановкою рядків у деякому порядку, а потім стовпчиків у тому самому порядку можна звести матрицю A до "циклічного" вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця A імпритивна, якщо $k > 1$. Число k – індекс імпритивності матриці A . В іншому разі матриця A – примітивна.

Твердження 2.1. [1, 4, 7] Матриця суміжності графа нерозкладна тоді і тільки тоді, коли граф – зв’язний.

Матриця суміжності довільного графа – невід’ємна, тому всі властивості невід’ємних матриць зберігається для матриць суміжності, зокрема теорема Фробеніуса. Також вона симетрична і як результат всі власні значення – дійсні числа. Отже, з **теореми 2.1** впливає теорема про спектральні властивості зв’язного графа.

Теорема 2.2. (Фробеніуса для матриці суміжності) [1, 4, 7] Нехай $\mathbf{G}$ – зв’язний граф. $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – власні значення графа в порядку не зростання. Тоді:

1. Індекс графа додатній ($\lambda_{\mathbf{G}} > 0$);
2. Модуль довільного власного значення не перевищує індекс графа ($\forall i : |\lambda_i| \leq \lambda_{\mathbf{G}}$);
3. Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ дорівнює 1 (отже геометрична кратність також рівна 1);
4. Існує додатній власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_{\mathbf{G}}$ (цей вектор буде називатися вектором Перрона- Фробеніуса);
5. Якщо $-\lambda_{\mathbf{G}}$ – власне значення, то його алгебраїчна кратність дорівнює 1 (отже геометрична кратність також рівна 1).

3 Індекси злічених графів Кокстера

3.1 Теореми про індекс злічених графів

Твердження 3.1. [5 – 7] $\mathbf{G}$ – злічений зв’язний граф. При видаленні вершини, або ребра графа $\mathbf{G}$ індекс не збільшується. При зменшенні мітки на ребрі графа $\mathbf{G}$ індекс строго зменшується.

Доведення. Розглянемо доведення окремо для кожної операції [5, 7]:

1. Операція видалення вершини. Зафіксуємо вершину x графа $\mathbf{G}$. $\mathbf{G} - x \subset \mathbf{G}$, тоді $Fin(\mathbf{G} - x) \subset Fin(\mathbf{G})$. Отже,

$$ind(\mathbf{G} - x) = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G} - x)} ind \Gamma \leq \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma = ind \mathbf{G}$$

Отже, індекс графа при видаленні вершини не збільшується.

2. Операція видалення ребра. Зафіксуємо ребро e графа $\mathbf{G}$. $\mathbf{G} - e \subset \mathbf{G}$, тоді $Fin(\mathbf{G} - e) \subset Fin(\mathbf{G})$. Отже,

$$ind(\mathbf{G} - e) = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G} - e)} ind \Gamma \leq \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma = ind \mathbf{G}$$

Отже, індекс графа при видаленні ребра не збільшується.

3. Операція зменшення мітки на ребрі. Зафіксуємо ребро $e = \{v_1, v_2\}$ графа $\mathbf{G}$. Нехай граф $\mathbf{G}_1$ – граф, отриманий з $\mathbf{G}$ шляхом зменшення мітки на ребрі e . Тоді матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ відрізняється від матриці $A(\mathbf{G}_1)$ двома симетричними відносно діагоналі елементами: другим елементів у першому рядку та першим елементом у другому рядку. $\lambda_{\mathbf{G}}$ – індекс графа $\mathbf{G}$ та ν – додатний власний вектор $A(\mathbf{G})$, що відповідає цьому індексу. Аналогічно, ω – додатний власний вектор $A_{\mathbf{G}_1}$, що відповідає $\lambda_{\mathbf{G}_1}$, індексу графа $\mathbf{G}_1$. Елементи матриці $A_{\mathbf{G}}$ не менше, ніж елементи $A_{\mathbf{G}_1}$, тоді $A_{\mathbf{G}}\nu \geq A_{\mathbf{G}_1}\nu$ і виконуються строгі нерівності для координат: $(A_{\mathbf{G}}\nu)_1 > (A_{\mathbf{G}_1}\nu)_1$ і $(A_{\mathbf{G}}\nu)_2 > (A_{\mathbf{G}_1}\nu)_2$. З попередніх нерівностей випливає $(A_{\mathbf{G}}\nu, \omega) > (A_{\mathbf{G}_1}\nu, \omega)$. Тоді $\lambda_{\mathbf{G}}(\nu, \omega) = (\lambda_{\mathbf{G}}\nu, \omega) = (A_{\mathbf{G}}\nu, \omega) > (A_{\mathbf{G}_1}\nu, \omega) = (\nu, A_{\mathbf{G}_1}\omega) = (\nu, \lambda_{\mathbf{G}_1}\omega) = \lambda_{\mathbf{G}_1}(\nu, \omega)$. Скорочуємо нерівність на додатне число (ν, ω) і отримуємо $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}_1}$. Отже, індекс графа при зменшенні мітки на ребрі строго зменшується.

□

Наслідок 3.1. [5 – 7] Нехай $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ – злічені графи. $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$. Тоді $ind \mathbf{G}_1 \leq ind \mathbf{G}_2$

Твердження 3.2. [5 – 7] Індекс зліченного графа рівен супремуму індексів його компонент зв'язності.

Доведення. [5 – 7] Нехай $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \sqcup \mathbf{G}_2 \sqcup \dots$, де $\mathbf{G}_i$ – компоненти зв'язності, а символ $\sqcup$ – диз'юнктивне об'єднання (об'єднання множин, що попарно не перетинаються). Розглянемо довільний скінченний підграф Γ графа $\mathbf{G}$. Має місце розклад $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \dots$, де $\Gamma_i \subset \mathbf{G}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Γ – скінченний, тому тільки скінченна кількість $\Gamma_i \neq \emptyset$. Отже, $ind \mathbf{G} = \sup_{\Gamma} ind \Gamma = \sup_{\Gamma} \sup_{i \in \mathbb{N}} ind \Gamma_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\Gamma} ind \Gamma_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\Gamma_i} ind \Gamma_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} ind \mathbf{G}_i$. □

Далі графи, які будемо розглядати, вважатимемо зв'язними.

Теорема 3.1. [5 – 7] Нехай $\mathbf{G}$ – злічений граф, $\{\mathbf{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

1. $\mathbf{G}_n \subset \mathbf{G}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$.

Тоді $\text{ind } \mathbf{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n$.

Доведення. [5 – 7] Розглянемо довільний скінченний підграф Γ графа $\mathbf{G}$. За умовою 2. $\Gamma \in \mathbf{G}_k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Тоді $\text{ind } \Gamma \leq \text{ind } \mathbf{G}_k$. Тоді $\sup_{\Gamma} \text{ind } \Gamma \leq \sup_{\Gamma} \text{ind } \mathbf{G}_n$. Оскільки $\mathbf{G}_n$ – скінченні підграфи $\mathbf{G}$, то $\sup_{\Gamma} \text{ind } \Gamma \geq \sup_{\Gamma} \text{ind } \mathbf{G}_n$. Отже $\text{ind } \mathbf{G} = \sup_{\Gamma} \text{ind } \Gamma = \sup_n \text{ind } \mathbf{G}_n$. За умовою 1. $\text{ind } \mathbf{G}_n \leq \text{ind } \mathbf{G}_{n+1}$. Послідовність $\{\text{ind } \mathbf{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ неспадна, тому вона має границю (можливо, ∞), і $\sup_n \text{ind } \mathbf{G}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n$. $\square$

Наслідок 3.2. [5 – 7] Нехай $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2$ – злічені граfi, $\{\mathbf{G}_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \{\mathbf{G}_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовності скінченних підграфів $\mathbf{G}^1$ і $\mathbf{G}^2$ відповідно. Нехай ці послідовності задовольняють умовам:

1. $\mathbf{G}_n^1$ ізоморфний $\mathbf{G}_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{G}_n^1 \subset \mathbf{G}_{n+1}^1, \mathbf{G}_n^2 \subset \mathbf{G}_{n+1}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^1 = \mathbf{G}^1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^2 = \mathbf{G}^2$.

Тоді $\text{ind } \mathbf{G}^1 = \text{ind } \mathbf{G}^2$.

Доведення. [5, 7] З теоремою 3.1 випливає, що $\text{ind } \mathbf{G}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n^1$ та $\text{ind } \mathbf{G}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n^2$. $\mathbf{G}_n^1$ і $\mathbf{G}_n^2$ ізоморфні, тому $\text{ind } \mathbf{G}_n^1 = \text{ind } \mathbf{G}_n^2$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n^2$. Отже, $\text{ind } \mathbf{G}^1 = \text{ind } \mathbf{G}^2$. $\square$

Розглянемо кілька прикладів знаходження індексу зліченого графа.

Приклад 3.1. $\mathbf{A}_{\infty}$ – нескінченний вправо ланцюг [5 – 7].



Рис.2

При обчисленні індекса цього зліченного графа як підграф $\mathbf{G}_n$ можна обрати граф $\mathbf{A}_n$, який утворено першими n вершинами. Індекс цього графа відомий[1] і дорівнює

$$\text{ind } \mathbf{A}_n = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тому

$$\text{ind } \mathbf{A}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\pi}{n+1} = 2 \cos 0 = 2$$

Отже,

$$\text{ind } \mathbf{A}_\infty = 2$$

Приклад 3.2. $\mathbf{D}_\infty$ – нескінченний вправо ланцюг з розгалуженням [5 – 7].

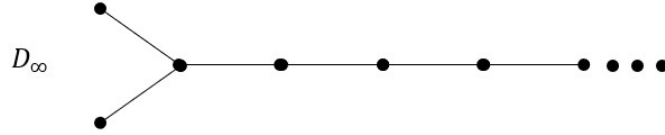


Рис.3

При обчисленні індекса цього зліченного графа як підграф $\mathbf{G}_n$ можна обрати граф $\mathbf{D}_n$ $n \geq 4$, який утворено першими n вершинами. Індекс цього графа відомий[1] і дорівнює

$$\text{ind } \mathbf{D}_n = 2 \cos \frac{\pi}{2(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тому

$$\text{ind } \mathbf{D}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\pi}{2(n-1)} = 2 \cos 0 = 2$$

Отже,

$$\text{ind } \mathbf{D}_\infty = 2$$

Приклад 3.3. $\mathbf{A}_\mathbb{Z}$ – нескінченний в обидві сторони ланцюг [5 – 7].



Рис.4

При обчисленні індекса цього зліченного графа як підграф $\mathbf{G}_n$ можна обрати граф $\mathbf{A}_n$, який утворено першими n вершинами. Такий самий підграф $\mathbf{G}_n$ обирався для $\mathbf{A}_\infty$. Тому

$$\text{ind } \mathbf{A}_\mathbb{Z} = \text{ind } \mathbf{A}_\infty = 2$$

Отже,

$$\text{ind } \mathbf{A}_{\mathbb{Z}} = 2$$

Приклад 3.4. $\mathbf{B}_{\infty}$ – нескінченний вправо ланцюг [6, 7].



Рис.5

При обчисленні індекса цього зліченного графа як підграф $\mathbf{G}_n$ можна обрати граф $\mathbf{B}_n$ $n \geq 2$, який утворено першими n вершинами. Індекс цього графа відомий[2] і дорівнює

$$\text{ind } \mathbf{B}_n = 2 \cos \frac{\pi}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тому

$$\text{ind } \mathbf{B}_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\pi}{2n} = 2 \cos 0 = 2$$

Отже,

$$\text{ind } \mathbf{B}_{\infty} = 2$$

3.2 Індеси графів, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга

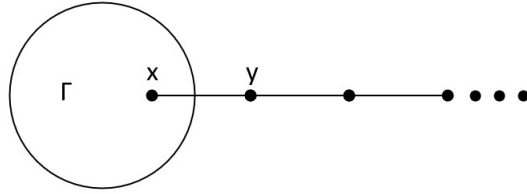


Рис.6

Граф $\mathbf{G}$ складається з скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$, нескінченного ланцюга та ребра $\{x, y\}$, що з'єднує їх. Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар $(\mathbf{\Gamma}, x)$.

Теорема 3.2. [6, 7] Нехай злічений граф $(\mathbf{\Gamma}, x)$ складається з скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$ та нескінченного ланцюга. Тоді:

1. Якщо $(\mathbf{\Gamma}, x) \in \{\mathbf{A}_{\infty}, \mathbf{D}_{\infty}, \mathbf{B}_{\infty}\}$, то $\text{ind}(\mathbf{\Gamma}, x) = 2$;

2. Якщо $(\Gamma, x) \notin \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{D}_\infty, \mathbf{B}_\infty\}$, то $ind(\Gamma, x) > 2$ та є максимальним коренем рівняння

$$\frac{P_{\Gamma-x}(\lambda)}{P_\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Алгоритм знаходження індексу графа $\mathbf{G}$, що складається зі скінченного графа Γ та нескінченного ланцюга, за допомогою **теорема 3.2**:

1. Знайти характеристичні многочлени графів Γ та $\Gamma - \mathbf{x}$: $P_\Gamma(\lambda)$, $P_{\Gamma-\mathbf{x}}(\lambda)$.
Маємо рівняння $\frac{P_{\Gamma-x}(\lambda)}{P_\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$;
2. Для зручності зробити заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Тоді $\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \mu$. Підставити значення у рівняння $\frac{P_{\Gamma-x}(\lambda)}{P_\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$. Отримуємо рівняння з одним невідомим μ ;
3. У рівнянні з пункту 2 знайти максимальне значення μ ;
4. Знайти λ , підставивши μ у заміну з пункту 2. Це значення λ і є шуканим індексом графа $\mathbf{G}$.

Розглянемо кілька прикладів знаходження індексів графів, що складається зі скінченного графа Γ та нескінченного ланцюга.

Приклад 3.5. Знайдемо індекс графа $T_{1,1,1,\infty}$ (рис.7) [7].

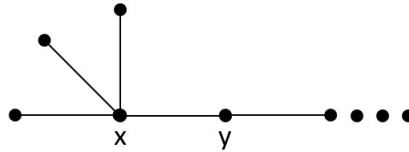


Рис.7

Нехай Γ рівний графу на рис.8.

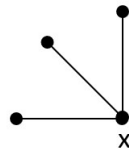


Рис.8

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

Знаходження характеристичного многочлена графа Γ було розглянуто в прикладі 2.1.

$$P_{\Gamma} = \lambda^4 - 3\lambda^2$$

$$P_{\Gamma-x} = \lambda^3$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_{\Gamma}} = \frac{\lambda^3}{\lambda^4 - 3\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 3} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 3} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} - 1} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 - \mu^2 + 1} = 1$$

$$\mu^4 - 2\mu^2 = 0$$

$$\mu^2(\mu^2 - 2) = 0$$

$$\mu = \sqrt{2}$$

4. Отже,

$$\lambda = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Індекс графа $T_{1,1,1,\infty}$:

$$ind T_{1,1,1,\infty} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12132$$

Лема 3.1. [7] Нехай $\mu = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ та $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$, тоді $\lambda = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

Доведення. [7]

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2(1 + \sqrt{5})}} = \\ &= \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{2(1 + \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{2(1 + \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(7 + 3\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}} = \\ &= \sqrt{\frac{-8 - 4\sqrt{5}}{-4}} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}\end{aligned}$$

□

Приклад 3.6. Знайдемо індекс графа H_∞ (рис.9) [7].

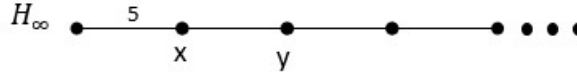


Рис.9

Нехай Γ рівний графу H_2 на рис.10.

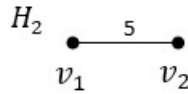


Рис.10

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$\begin{aligned}A(\Gamma) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \cos \frac{\pi}{5} \\ 2 \cos \frac{\pi}{5} & 0 \end{pmatrix} \\ P_\Gamma(\lambda) &= |\lambda I - A(\Gamma)| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \cos \frac{\pi}{5} \\ -2 \cos \frac{\pi}{5} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (-2 \cos \frac{\pi}{5})^2 \\ &= \lambda^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} \\ P_{\Gamma-x}(\lambda) &= |\lambda| = \lambda\end{aligned}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_{\Gamma}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + 2\mu^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} \mu^2 + 1} = 1$$

$$\mu^4 + \mu^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} \mu^2 = 0$$

$$\mu^2(\mu^2 + 1 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{5}) = 0$$

$$\mu = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1}$$

$$\mu = \sqrt{4 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 - 1}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

4. Отже, за лемою 3.1:

$$\lambda = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

Індекс графа **G**:

$$ind H_{\infty} = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2,05817$$

Приклад 3.7. Знайдемо індекс графа F_∞ (рис.11) [7].

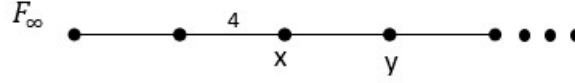


Рис.11

Нехай Γ рівний графу F_3 на рис.12.

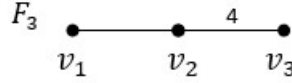


Рис.12

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \cos \frac{\pi}{4} \\ 0 & 2 \cos \frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\Gamma(\lambda) = |\lambda I - A(\Gamma)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \cos \frac{\pi}{4} \\ 0 & -2 \cos \frac{\pi}{4} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{4} \lambda - \lambda =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda$$

$$A(\Gamma - x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\Gamma-x}(\lambda) = |\lambda I - A(\Gamma - x)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_\Gamma} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3 - 3\lambda} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2 - 1}{\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^3 - 3\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2 - 1}{\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^3 - 3\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1}{\mu^3 + \frac{1}{\mu^3}} = \mu$$

$$\frac{\mu^4 + \mu^2 + 1}{\mu^6 + 1} = 1$$

$$\mu^6 - \mu^4 - \mu^2 = 0$$

$$\mu^2(\mu^4 - \mu^2 - 1) = 0$$

$$\mu^4 - \mu^2 - 1 = 0$$

$$\mu^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

4. Отже, за лемою 3.1:

$$\lambda = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

Індекс графа **G**:

$$\text{ind } F_\infty = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2,05817$$

Також розглянемо кілька прикладів, знаходження індексів графів, що не були досліджені раніше.

Приклад 3.8. Знайдемо індекс графа **G**, що складається з зірчатого скінченного графа $K_{1,n}$ та нескінченного ланцюга(рис.13).

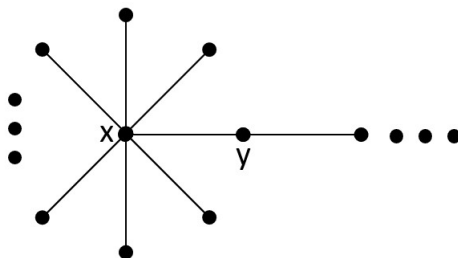


Рис.13

Нехай Γ рівний графу $K_{1,n}$ на рис.14.

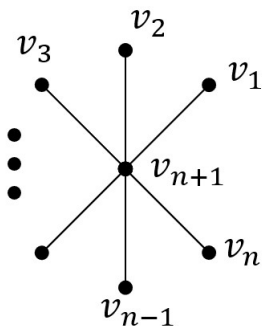


Рис.14

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$A(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{\Gamma}(\lambda) &= |\lambda I - A(\Gamma)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \frac{n}{\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^n \left(\lambda - \frac{n}{\lambda} \right) = \lambda^{n+1} - n\lambda^{n-1} \end{aligned}$$

$$P_{\Gamma-x}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_{\Gamma}} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n+1} - n\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - n} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - n} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + (2 - n)\mu^2 + 1} = 1$$

$$\mu^4 - (1 - n)\mu^2 = 0$$

$$\mu^2 + 1 - n = 0$$

$$\mu = \sqrt{n - 1}$$

4. Отже,

$$\lambda = \sqrt{n - 1} + \frac{1}{\sqrt{n - 1}} = \frac{n}{\sqrt{n - 1}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind \mathbf{G} = \frac{n}{\sqrt{n - 1}}$$

Приклад 3.9. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$, що складається з зірчатого скінченного графа $K_{1,n}$ з позначкою 4 на одному ребрі та нескінченного ланцюга(рис.15).

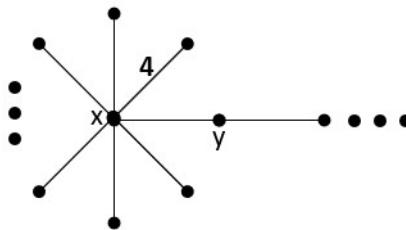


Рис.15

Нехай Γ рівний графу $K_{1,n}$ з позначкою 4 на одному ребрі на рис.16.

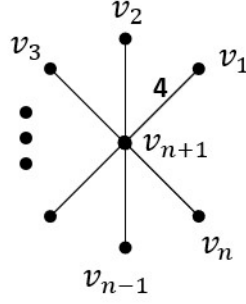


Рис.16

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$\begin{aligned}
 A(\Gamma) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \cos \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 \cos \frac{\pi}{4} & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 P_{\Gamma}(\lambda) &= |\lambda I - A(\Gamma)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \frac{n+1}{\lambda} \end{vmatrix} = \\
 &= \lambda^n \left(\lambda - \frac{n+1}{\lambda} \right) = \lambda^{n+1} - (n+1)\lambda^{n-1} \\
 P_{\Gamma-x}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n
 \end{aligned}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_{\Gamma}} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n+1} - (n+1)\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - n - 1} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n - 1} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - n - 1} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 1 - n} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + (1 - n)\mu^2 + 1} = 1$$

$$\mu^4 - n\mu^2 = 0$$

$$\mu^2 - n = 0$$

$$\mu = \sqrt{n}$$

4. Отже,

$$\lambda = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

$$ind \mathbf{G} = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

Приклад 3.10. Знайдемо індекс графа $\mathbf{G}$, що складається з зірчатого скінченного графа $K_{1,n}$ загального виду, з позначками $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ на ребрах та нескінченного ланцюга (рис.17).

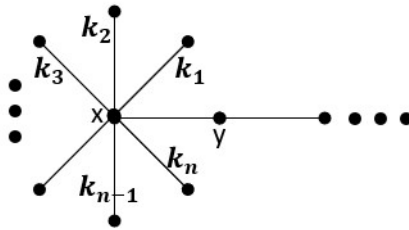


Рис.17

Нехай Γ рівний графу $K_{1,n}$ з позначками $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ на ребрах на рис.18.

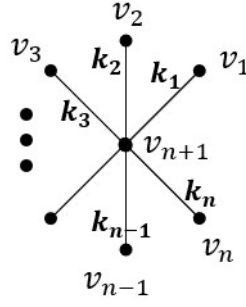


Рис.18

Тоді

1. Знайдемо характеристичні многочлени:

$$\begin{aligned}
 A(\Gamma) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \cos \frac{\pi}{k_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \cos \frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \cos \frac{\pi}{k_n} \\ 2 \cos \frac{\pi}{k_1} & 2 \cos \frac{\pi}{k_2} & \dots & 2 \cos \frac{\pi}{k_n} & 0 \end{pmatrix} \\
 P_{\Gamma}(\lambda) &= |\lambda I - A(\Gamma)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{k_1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -2 \cos \frac{\pi}{k_n} \\ -2 \cos \frac{\pi}{k_1} & -2 \cos \frac{\pi}{k_2} & \dots & -2 \cos \frac{\pi}{k_n} & \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{k_1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -2 \cos \frac{\pi}{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -2 \cos \frac{\pi}{k_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \frac{4}{\lambda} \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} \end{vmatrix} = \lambda^n \left(\lambda - \frac{4}{\lambda} \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} \right) = \\
 &= \lambda^{n+1} - 4 \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}
 \end{aligned}$$

$$P_{\Gamma-x}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{P_{\Gamma-x}}{P_{\Gamma}} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n+1} - 4\lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

2. Зробимо заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$.

Маємо:

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}} = \mu$$

3. Знайдемо максимальне значення μ

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{(\mu + \frac{1}{\mu})^2 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}} = \mu$$

$$\frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}} = \mu$$

$$\frac{\mu^2 + 1}{\mu^4 + 1 + (2 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i})\mu^2} = 1$$

$$\mu^4 + (1 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i})\mu^2 = 0$$

$$\mu^2 + 1 - 4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} = 0$$

$$\mu = \sqrt{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} - 1}$$

4. Отже,

$$\lambda = \sqrt{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} - 1} + \frac{1}{\sqrt{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} - 1}} = \frac{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}}{\sqrt{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} - 1}}$$

Індекс графа $\mathbf{G}$:

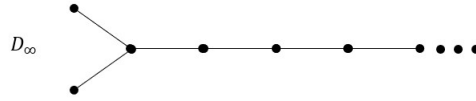
$$ind \mathbf{G} = \frac{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i}}{\sqrt{4 \sum_{i=1}^n \cos^2 \frac{\pi}{k_i} - 1}}$$

4 Класифікація злічених графів Кокстера за індексом

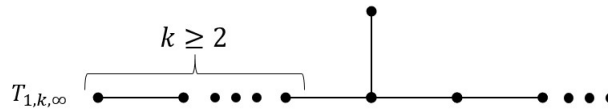
Дана теорема дає повну класифікацію злічених графів Кокстера у проміжку $[2, \sqrt{\sqrt{5} + 2}]$

Теорема 4.1. [6, 7] Нехай $\mathbf{G}$ – злічений зв’язний граф Кокстера, то

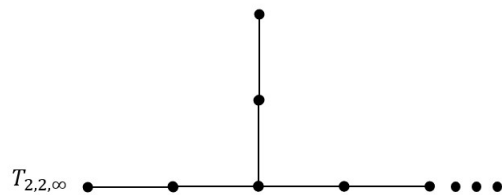
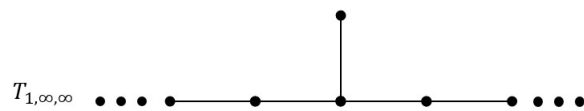
1. $ind \mathbf{G} \geq 2$
2. Якщо $ind \mathbf{G} = 2$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



3. Якщо $ind \mathbf{G} \in (2; \sqrt{\sqrt{5} + 2})$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



4. Якщо $ind \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$, то $\mathbf{G}$ – граф виду:



5 Висновки

В другому розділі курсової роботи розглянуто основні поняття спектральної теорії графів і їх застосування на прикладі. Також представлено означення зліченного графа Кокстера та опис операцій на цих графах. Окрім того зроблено огляд таких понять, як невід’ємна, додатна, розкладна матриці та теореми Фробеніуса для матриць суміжності.

В третьому розділі наведені основні теореми, необхідні для обчислення індексу графів, та їх застосування на прикладах. Більш детально розглянуто знаходження індексу графів, що складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга. Зокрема, на основі теореми створено алгоритм розрахунку індексу таких графів. Представлено обчислення деяких раніше досліджених індексів графів та розглянуто індекси графа, що до цього не знаходились.

В четвертому розділі наведена теорема про класифікацію злічених графів Кокстера у проміжку $[2, \sqrt{\sqrt{5} + 2}]$ без доведення.

6 Список літератури

1. *Москалева Ю.П., Самойленко Ю.С.*, Введение в спектральную теорию графов, Киев, Центр учебной литературы, 2007.
2. *Goodman F.M., P. de la Harpe, Jones V.F.R.*, Coxeter Graphs and Towers of Algebras, Springer Verlag New York, 1989.
3. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов, теория и применение, Киев, “Наукова думка”, 1984
4. *Самойленко Ю.С., Тимошкевич Л.М.*, Про спектральну теорію графів Кокстера, “У світі математики” 15 (2009), №3, с.14-24.
5. *Коротков А.С., Самойленко Ю.С.*, Про індекси злічених графів, “У світі математики” 18 (2012), №3, с.7-17.
6. *Коротков А.С., Тимошкевич Л.М.*, Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України, 2013, №12, с. 19–24
7. *Тимошкевич Л.М.*, Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера, Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 160 с.