

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Курсова робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФІВ**»

Виконав: студент 3-го року
навчання,

Освітньої програми «Прикладна
математика», 113
Спеціальності 113 Прикладна
математика

Баранник Олег Олександрович

Керівник Тимошкевич Л.М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст.
викладач

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«_____» _____ 20____ р.

Київ – 2023

ГРАФІК ПІДГОТОВКИ КУРСОВОЇ РОБОТИ ДО ЗАХИСТУ

Графік узгоджено « ___ » _____ 20__ р

| № з/п | Перелік робіт | Термін виконання етапу | Підпис наукового керівника | Дата ознайомлення наукового керівника | Примітка |
|-------|--|------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------|
| 1. | Отримання теми кваліфікаційної роботи. | 23.10.2022 | | | |
| 2. | Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи. | 01.11.2023 | | | |
| 3. | Розробка плану та структури роботи. | 15.01.2023 | | | |
| 4. | Робота з науковою літературою, опис основних означень. Дослідження результатів | 20.01.2023 | | | |
| 6. | Робота над текстовим оформленням результатів. | 03.04.2023 | | | |
| 7. | Попередній аналіз Виправлення помилок. | 08.05.2023 | | | |
| 8. | Захист кваліфікаційної роботи. | 23.05.2023 | | | |

Науковий керівник _____ (ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____ (ПІБ)

Зміст

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Вступ..... | 4 |
| 2 | Екстремальні характеристики графів | 5 |
| 2.1 | Основні означення теорії графів..... | 5 |
| 2.2 | Екстремальні характеристики графів | 7 |
| 2.3 | Деякі означення екстремальних характеристик графів | 8 |
| 2.4 | Незалежна множина та кліка графа, вершинне покриття графа .. | 9 |
| 2.5 | Хроматичне число та незалежне число..... | 11 |
| 2.6 | Алгоритм Брона-Кербоша..... | 11 |
| 2.6.1 | Приклад застосування алгоритму Брона-Кербоша..... | 12 |
| 2.7 | Розбір та розв'язування задач на екстремальні характеристики графа..... | 20 |
| 3 | Висновки..... | 36 |
| 4 | Список використаних джерел..... | 37 |

1 Вступ

Екстремальна теорія графів є однією зі стародавніх і водночас актуальних галузей математики, яка займається дослідженням екстремальних властивостей графів. Вибір цієї теми обґрунтовується її важливістю і широким спектром застосувань у наукових дослідженнях та практичних задачах.

Актуальність теми: графи використовуються для моделювання та вирішення різноманітних проблем у таких галузях як комп'ютерні науки, оптимізація, транспортні мережі, соціальні мережі, теорія кодування, теорія ігор та багато інших. Вивчення екстремальних властивостей графів дозволяє знайти оптимальні рішення, встановити межі ефективності та зрозуміти особливості їх структури.

Мета і завдання дослідження: аналіз і вивчення екстремальних властивостей графів, їх класифікація за різними параметрами, а також застосування отриманих знань у практичних сфері.

Об'єкт дослідження : різноманітні властивості графів, його екстремальні властивостей та рішення в задачах

Методи дослідження: математичні методи та логічні розрахунки для аналізу та моделювання графів, методи комбінаторних конструкцій, метод границь та нерівностей, доведення теорем, алгоритмічні методи для розв'язування практичних задач.

2 Екстремальні характеристики графів

2.1 Основні означення теорії графів

Граф - це абстрактна математична структура, що складається з множини вершин (вузлів) та множини ребер (зв'язків), що з'єднують вершини, і використовується для моделювання зв'язків між об'єктами. Графи є важливим інструментом в галузях, таких як теорія мереж, комп'ютерні науки, оптимізація, транспортні системи та багато інших. Приклад графа (рисунок 1), а саме орієнтованого графа

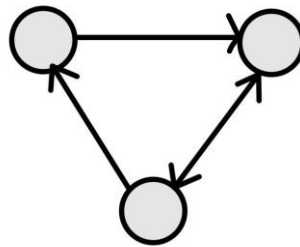


Рис. 1

Введемо основні означення.

Означення 1 Графом називаємо впорядкована пара $G = (V, E)$, де V – непорожня скінченна множина, E – множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів множини V . При цьому множина V називається *множиною вершин графа G* , а множина E називається *множиною ребер графа G* .

Означення 2. Вершини графа називаються *суміжними*, якщо вони з'єднані ребром.

Означення 3. Якщо вершина графа є кінцем деякого ребра, то ці вершина та ребро називаються *інцидентними*.

Означення 4 *Степінь вершини v* – кількість ребер інцидентних даній вершині. Позначається $deg v$.

Означення 5. *Порядок графа* – кількість вершин графа. Позначається $|G|$.

Означення 6. Неорієнтований граф G – пара множин (V, E) , де V — множина вершин, $E = V^{(2)}$ – множина ребер; позначають $G = (V, E)$.

Нехай існують вершини $v_1, v_2 \in V$. Традиційно ребра, які з'єднують такі дві вершини, записують за допомогою круглих дужок $v_1, v_2 \in E$.

Означення 7. Зображення графа $G = (V, E)$ за допомогою рисунка на площині називають діаграмою графа G . Вершини графа G бієктивно відповідають точки площини. Точки, що відповідають вершинам v і w , з'єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді й тільки тоді, коли v і w – суміжні вершини.

Означення 8. Граф без кратних ребер та петель називається простим.

Означення 9. Вершини $v_1, v_2 \in V$ в неорієнтованому графі називають суміжними, якщо існує ребро $e \in E$, яке з'єднує ці вершини.

Означення 10. Ребро $e \in E$ є інцидентним вершині v_1 та вершині v_2 , якщо воно їх з'єднує, тобто $e = v_1, v_2$.

Означення 11. Ребра e_1, e_2 в неорієнтованому графі називають суміжним, якщо ці ребра мають спільну вершину.

Означення 12. Породжений підграф графа називають інший граф, утворений з підмножини вершин графа разом з усіма ребрами, що з'єднують пари вершин з цієї підмножини.

Означення 13. Степенем $deg(v)$ вершини $v \in V$ називають кількість інцидентних їй ребер.

Означення 14. Дві довільні вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не є суміжними в графі G .

Означення 15. Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n , позначається C_n .

Означення 16. Граф називається зв'язним, якщо будь-яку пару його вершин можна з'єднати деяким маршрутом.

Означення 17. Граф без циклів називається ациклічним.

Означення 18. Ациклічний зв'язний граф називається деревом. Дерево є дводольним графом.

Означення 19. Граф $G = (V, E)$ називають повним, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E = V^{(2)}$). Повний граф із n вершинами позначають K_n .

Означення 20. Граф $G = (V, E)$ називається порожнім, якщо $V = \emptyset$.

Означення 21. Найбільше ціле число r , при якому $K^r \subseteq G$, називається щільністю $w(G)$ графа G .

Означення 22. Простий граф називається **регулярним**, якщо всі його вершини мають однаковий степінь. **Сильно регулярний** — граф, у якого кожна пара суміжних вершин має однаковий степінь та кожна пара несуміжних вершин має однаковий степінь.

Означення 23. Граф називається k -дольним ($k > 2$) якщо всі його вершини можна розбити на k частин (долей), що не перетинаються, так, що суміжні лише вершини з різних долей.

2.2 Екстремальні характеристики графів

В розділі екстремальної теорії графів є таке поняття як "екстремальні характеристики графів". Екстремальні характеристики графів відносяться до

властивостей, які виражаються в максимальних або мінімальних значеннях певного параметра в контексті графів

Наприклад, основними екстремальними характеристиками графів є:

1. Кількість ребер: Можна досліджувати графи з максимальною або мінімальною кількістю ребер в залежності від заданих обмежень
2. Хроматичне число: Це мінімальна кількість кольорів, необхідних для розфарбування вершин графа таким чином, щоб жодні дві суміжні вершини не мали однакового кольору.
3. Клікове число: Це максимальний розмір підграфа, в якому кожна вершина з'єднана з усіма іншими вершинами цього підграфа.
4. Границя Турана: Це максимальна кількість ребер в графі з n вершинами, що не містить певного типу підграфа.
5. Незалежне число : використовується для позначення максимальної кількості вершин у графі, які не з'єднані між собою ребром.

Додамо певні означенні теорії графів, які потребуватимуться для розгляду різних структур екстремальних властивостей графів

2.3 Деякі означення екстремальних характеристик графів

Означення 24. Нехай $P(n)$ позначає найбільшу кількість ребер в графах зі спадковою властивістю P та n вершин. Графи $G = (V; E)$ з спадковою властивістю P , для яких виконується $|E| = P|V|$ називаються **екстремальними** для цієї спадкової властивості.

Означення 25. Граф без циклів називається **ациклічним**, а ациклічний зв'язний граф називається **деревом**.

Означення 26. Клікою в неорієнтованому графі називається підмножина вершин, кожні дві з яких з'єднані ребром графа. Розмір кліки визначається числом вершин в ній.

Означення 27. Максимальна по розміру кліка — кліка найбільшої потужності. Всі максимальні по розміру кліки мають однакову потужність, яка позначається \bar{G} та називається **кліковим числом графа G** .

Означення 28. Множина l вершин називається **незалежною**, якщо між будь-якими двома її вершинами немає ребра. Протилежна незалежній множині множина — кліка.

Означення 29. Максимальна незалежна множина l_0 — незалежна множина, яка стає залежною при додаванні будь-якої вершини.

Означення 30. Максимальне число вершин, які складають незалежну множину — **число незалежності графа**.

2.4 Незалежна множина та кліка графа, вершинне покриття графа

[6] Незалежною множиною вершин графа називається будь-яка множина попарно не суміжних вершин, тобто множина вершин, що породжує порожній підграф. Незалежна множина називається найбільшою, якщо вона містить найбільшу кількість вершин.

Число вершин у найбільшій незалежній множині графа G позначається через $\alpha(G)$ та називається числом незалежності графа. Завдання про незалежну множину полягає в знаходженні найбільшої незалежної множини.

Клікою графа називається множина вершин, що породжує повний підграф, тобто множина вершин, кожні дві з яких суміжні. Число вершин у кліку найбільшого розміру називається кліковим числом графа і позначається через w

(G). Очевидно, завдання про незалежну множину перетворюється на завдання про кліку і навпаки простим переходом від даного графа G до доповнення до графу G , отже $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

Вершинне покриття графа – це множина вершин, де кожне ребро графа інцидентно хоча би до однієї з цих вершин. Найменша кількість вершин у вершинному покритті графа G позначається через $b(G)$ і називається числом вершинного покриття графа.

Приклад:

У графі (рисунок 2) найбільшою незалежною множиною є множина $\{1,3,4,7\}$, найбільшою клікою – множина $\{2,3,5,6\}$, найменшим вершинним покриттям – множина $\{2,5,6\}$.

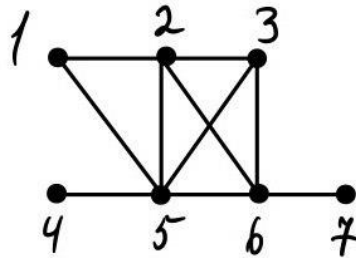


Рис. 2

Між завданнями про незалежну множину і про вершинне покриття є простий зв'язок.

Теорема 1 про незалежну множину та вершинне покриття. Нехай G – граф з множиною вершин V . Множина $U \subseteq V$ є вершинним покриттям графа G тоді і тільки тоді, коли $V - U$ – незалежна множина

З цієї теореми випливає, що $\alpha(G) + b(G) = n$ для будь-якого графа G з n вершинами.

2.5 Хроматичне число та незалежне число

Означення 41. Множина вершин графа називається незалежним, якщо жодні дві вершини цієї множини не з'єднані ребром. Підграф, породжений вершинами незалежної множини, є набором ізольованих вершин.

Тепер можна сказати, що хроматичне число $\chi(G)$ є таке найменше m , що множина всіх вершин графа G розпадається в диз'юнктне об'єднання $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_m =$ незалежних множин $V_1, V_2 \dots V_m$. Зрозуміло, що вказані незалежні множини — це і є кольори.

Означення 42. Незалежна множина називається максимальною за включенням, якщо при додаванні до нього будь-якої іншої вершини вона перестає бути незалежною.

Означення 43. Незалежна множина M називається максимальною за розміром, якщо не існує незалежної множини більшої потужності, ніж $|M|$. Зрозуміло, що всі максимальні за розміром незалежні множини мають однакову потужність; вона позначається $\alpha(G)$ і називаються числом незалежності графа G .

Означення 44. Мінімальне число k , для якого існує правильне розфарбування графа G називається хроматичним числом цього графа і позначається $\chi(G)$.

Означення 45. Мінімальним правильним розфарбуванням графа G називається правильне розфарбування для $k = \chi(G)$.

2.6 Алгоритм Брона-Кербоша

Алгоритм Брона-Кербоша є алгоритмом для знаходження всіх незалежних множин (незалежних клік) у графі. Основна ідея алгоритму полягає в пошуку усіх можливих незалежних множин, починаючи з порожньої множини і

розширюючи її вершинами, які ще не є сусідами вершин, що вже містяться в поточній множині.

Основні кроки алгоритму Брона-Кербоша:

1. Ініціалізувати поточну незалежну множину як порожню.
2. Для кожної вершини у графі:
 - Додати цю вершину до поточної незалежної множини.
 - Рекурсивно викликати алгоритм Брона-Кербоша для підграфу, що складається з вершин, які ще не є сусідами поточної вершини.
 - Після рекурсивного виклику, вилучити поточну вершину з незалежної множини.
3. Коли всі вершини були розглянуті, вивести знайдені незалежні множини.

Алгоритм Брона-Кербоша є рекурсивним і використовує зворотній пошук. Він перебирає всі можливі комбінації вершин, які утворюють незалежні множини. Під час рекурсивного виклику, алгоритм проходить через всі вершини, що ще не є сусідами поточної вершини, і продовжує розширювати незалежну множину. Коли всі вершини були розглянуті, алгоритм повертається назад і продовжує перебір інших комбінацій вершин

2.6.1 Приклад застосування алгоритму Брона-Кербоша

Дано простий граф, який має 4 вершини (рисунок 3). Знайдемо для нього число незалежності графа та найбільшу незалежну множину.

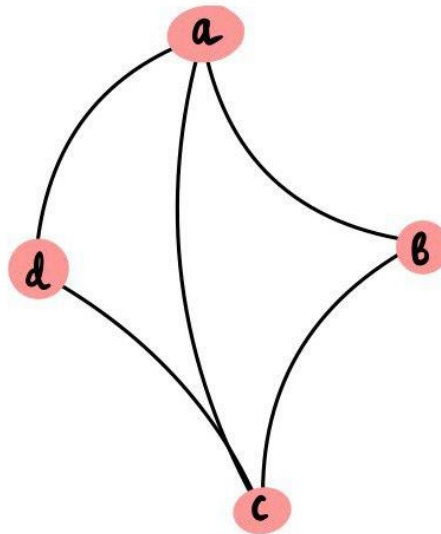


Рис. 3

Будемо використовувати алгоритм Брона-Кербоша, обирая піддерева графа та перераховуючи претендентів

Побудуємо модель для вирішення цієї задачі. У нас є граф, а моделлю вирішення цієї задачі є інший граф – підграфове кореневе дерево.

Розв'язання

Беремо вершину в першому рядку, коренем нашого дерева буде 4 піддерева з a, 4 піддерева з b, 4 піддерева з c, 4 піддерева з d. Ми маємо корневу вершину, тож будуємо повне дерево, маючи 4 вершини. Значить з нульової вершини корневого дерева в нас йдуть дуги a, де під ними виростає піддерево, від b, від c, від d. Так будемо організовувати наш процес, тож доки ми не побудуємо всі піддерева, які лежать під вершиною a, ми не перейдемо до b. Створимо початкову таблицю (таблиця 1)

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |

Таблиця 1

2 рядок. Так, перша вершина, яку ми обираємо та записуємо в комірку (таблиця 2). З усіх претендентів обираємо початкову, тобто a , тож записуємо a у другу комірку. Переходимо до наступної комірки – корекції множини Q^+ . Тож, поперше, видаляємо a , оскільки вона вже записана до комірки S_k , і нам треба відсікти безперспективні гілки, де вершини суміжні. Видаляємо b , видаляємо c , видаляємо d , бо вершина a суміжна з усіма вершинами цього графу. Тож залишилася лиш одна вершина a у комірці Q_k^- . У другому рядку бачимо ознаку максимальної незалежної множини, оскільки у нас $Q_k^+ \cap Q_k^- = \emptyset$. Це означає, що можемо додати значення до таблиці значень максимальних незалежних множин (таблиця 13).

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|--------------|---------|
| 1 | - | a, b, c, d | - |
| 2 | a | - | - |

Таблиця 2

3 рядок. Записуємо в першу комірку a , далі перебір з вершиною a закінчився, тож ми її видаляємо (таблиця 3). Оскільки S_k порожня множина, то ми знову повернулися на 0-вий рівень. На нульовому рівні проідентифікуємо вершини b, c, d , записавши до Q_k^+ третього рядку, а до Q_k^- , тобто заборонених вершин – запишемо a .

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|--------------|---------|
| 1 | - | a, b, c, d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b, c, d | a |

Таблиця 3

4 Рядок. Починаємо будувати дерево від вершини b . (додаємо b до S_k) (таблиця 4). Вершини b та c пішли з претендентів, лишилося, бо не суміжне з b . Тож до Q_k^+ записуємо d . Q_k^- -дивимосся на попередній рядок, там є вершина a . Оскільки a і b суміжні між собою, то вершину a треба видалити, оскільки ми спускаємося по рядочку, беремо S_q^- попереднього рівня (нульового рівня 3 рядок, а зараз ми на першому рівні 4 рядок), тож Q_k^- порожньо.

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |

Таблиця 4

5 рядок. Рухаємося вниз, до претендентів S_k додаємо d , відповідно з Q_k^+ ми d вилучаємо, бо ми його додали до незалежної множини (таблиця 5). Дивимосся Q_k^- , оскільки ми дивимосся зверху-вниз, то на попередньому рівні була порожня множина – вона так і залишиться. Маємо ознаки умови максимальної незалежної множини, тож додаємо до результатів таблиці (таблиця 13).

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |

Таблиця 5

6 рядок. Піднімаємося вище за b, d , b, d – це листочок у дереві (таблиця 6) . Із S_k ми d видаляємо. На попередньому рівні у Q_k^- було порожньо, але нам треба заповнити її вершиною, яку ми тільки-но видалили (тобто вершину d). І в q_k^+ залишається порожня множина, що означає, що ми повернулися до попереднього рівня (відповідно 4-му рядку, який має другий рівень, і ось тут був тільки претендент d у комірці Q_k^+ , яку ми тільки-но видалили в 6-му рядку, тому порожньо).

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |

Таблиця 6

7 рядок. Залишається тільки видалити вершину b з S_k , чим ми закінчили побудова піддерева, яке росте з вершини b (таблиця 7). Відповідно ми повернулися на нульовий рівень, Дивимося де наш попередній нульовий рівень (рядок три) , значить ми тільки-но використали вершину b , значить у якості претендентів у комірці Q_k^+ 7-го рядку залишаються c, d , а в Q_k^- якщо подивитися на відповідну комірку з 3-го рядку, то там було a , тож додаємо a . Також додаємо видалену b . Отже, в нас правильно записаний рядок 7, який характеризує повернення на нульовий рівень побудови нового піддерева з тих претендентів, які ми ще не використовували.

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |

| | | | |
|---|-----|-------|-----|
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |

Таблиця 7

8 рядок. Рухаємося аналогічно, обираємо в S_k вершину c . Оскільки c і d суміжні, то разом із c прибираємо з комірки $Q_k^+ d$ (таблиця 8). У множині Q_k^- залишаємо тільки ті вершини, які є не суміжними (b – це знеслася множина, котра на нульовому рівні, тобто 7 рядок, а ми зараз – на першому рівні) b – раніше вже записана вершина, c і a – суміжні, cb – суміжно, тож видаляємо з комірки Q_k^- обидві вершини a, b , залишилася порожня множина. У цьому рядку ще одна максимальна незалежна множина, яку додаємо до таблички (таблиця 13).

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |
| 8 | c | - | - |

Таблиця 8

9 рядок. Із S_k видаляємо c , чим повертаємося знову до нульового рівня, записуємо до Q_k^+ вершину d як останню вершину, з якої повинно рости

піддереву (таблиця 9). До Q_k^- записуємо a,b,c для яких ми вже перебираємо всі рішення, які мають сенс для цієї задачі, виокремлюючи потрібне

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |
| 8 | c | - | - |
| 9 | - | d | a,b,c |

Таблиця 9

10 рядок. До S_k додаємо d, з претендентів на Q_k^+ d прибираємо, залишаючи порожню множину, а з комірки Q_k^- серед a,b,c залишити ту вершину, яка є не суміжною, тобто залишаємо b. (таблиця 10)

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |
| 8 | c | - | - |
| 9 | - | d | a,b,c |

| | | | |
|----|---|---|---|
| 10 | d | - | b |
|----|---|---|---|

Таблиця 10

11 рядок. Із S_k видаляємо d, знову на нульовому рівні Q_k^+ , де кількість претендентів вичерпана, а до Q_k^- додамо усі 4 вершини – a,b,c,d , що є показником завершення роботи алгоритму. (таблиця 11)

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|----|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |
| 8 | c | - | - |
| 9 | - | d | a,b,c |
| 10 | d | - | b |
| 11 | - | - | a,b,c,d |

Таблиця 11

Таблиці з кінцевими результатами:

Таблиця 12:

| № | s_k | Q_k^+ | Q_k^- |
|---|-------|---------|---------|
| 1 | - | a,b,c,d | - |
| 2 | a | - | - |
| 3 | - | b,c,d | a |
| 4 | b | d | - |

| | | | |
|----|-----|-----|---------|
| 5 | b,d | - | - |
| 6 | b | - | d |
| 7 | - | c,d | a,b |
| 8 | c | - | - |
| 9 | - | d | a,b,c |
| 10 | d | - | b |
| 11 | - | - | a,b,c,d |

Таблиця 13:

| i | s_i |
|---|-------|
| 1 | a |
| 2 | b,d |
| 3 | c |

Тобто ми маємо три максимальні незалежні множини, дві множини одноелементні (1 і 3), і одна (2) множина двоелементна. Тоді число незалежності графа дорівнюватиме 2. Це максимальна кількість несуміжних вершин у цьому графі, яка є присутньою в найбільшій незалежній множині, у максимальній, яка за кількістю елементів є найбільшою. Отже, найбільша незалежна множина графа – 1 множина (b,d)

2.7 Розбір та розв'язування задач на екстремальні характеристики графа

1. Знайти число незалежності та хроматичне число графа:
а) K_n ; б) K_n ; n.

Розв'язання

А) За умовою ми маємо граф K_n , тобто повний граф на n вершинах. Для нашого розв'язку знадобиться певна модель. Нехай ми маємо граф K_5 (рисунок 4), тобто повний граф з 5-ма вершинами.

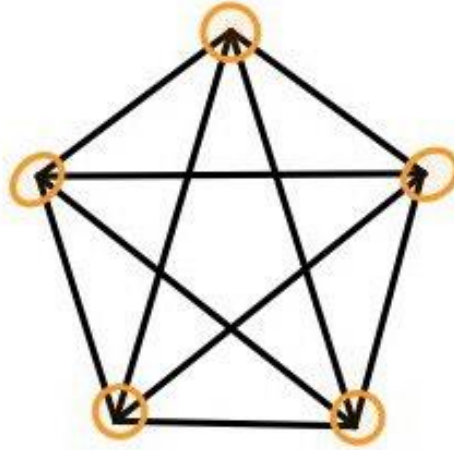


Рис. 4

Розглянемо перший пункт - число незалежності. За означенням повного графу будь-які дві вершини графа суміжні між собою, тож число незалежності дорівнюватиме 1.

Розглянемо другий пункт – хроматичне число. Скористаємося графічним способом, щоб знайти хроматичне число графу K_5 , де візьмемо граф K_5 (рисунок 4) і підпишемо його вершини (рисунок 5), де одному числу відповідає один колір, де суміжні вершини не повинні мати однакового кольору.

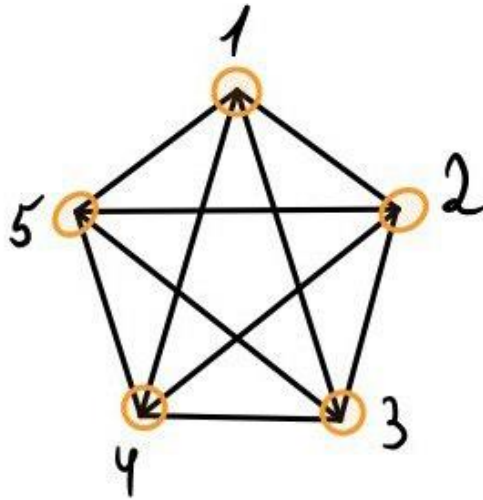


Рис. 5

Отже, можемо зробити висновок, що хроматичне число для повного графа дорівнюватиме кількості вершин графа, оскільки вони всі суміжні

Б) За умовою ми маємо повний дводольний граф $K_{n,n}$; $n..$ Для зручнішого візуального огляду представимо його як граф $K_{3,3}$ (рисунок 6)

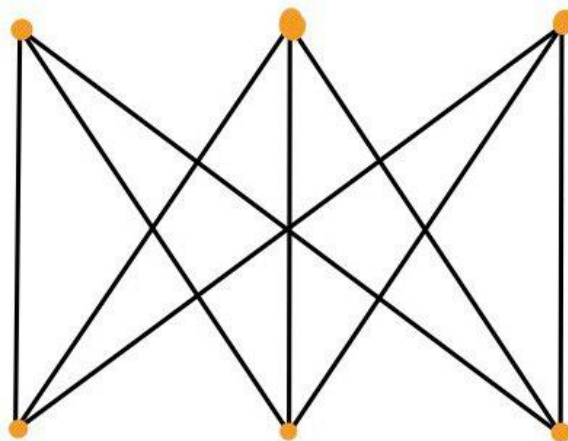


Рис. 6

Маємо другий пункт – хроматичне число. Скористаємося графічним способом, щоб знайти хроматичне число графу $K_{3,3}$, де візьмемо граф $K_{3,3}$ (рисунок 6) і підпишемо його вершини (рисунок 7) різними кольорами, які позначаються числами.

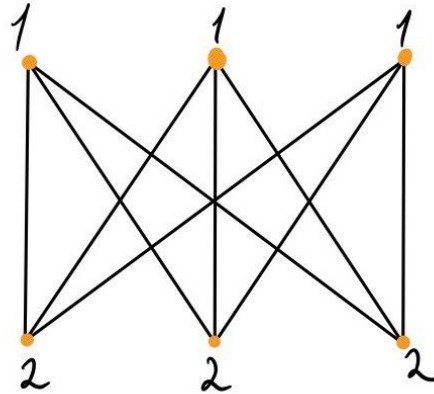


Рис. 7

Отже, хроматичне число графу $K_{n,n} : 2$, оскільки відношення верхньої частини графу до нижньої суб'єктивне.

Маємо перший пункт - число незалежності. Оскільки у верхній частині графа ми можемо вибрати вершини, які не мають суміжності між собою (за визначенням графу), ми можемо взяти n вершин, оскільки вони утворять незалежну множину. Проте, якщо ми спробуємо взяти $n + 1$ вершину, то завжди знайдуться дві вершини, які будуть суміжними одна з одною. Тому неможливо взяти більше ніж n вершин, що утворять незалежну множину.

2. Чи правильно, що максимальна за розміром незалежна множина є максимальною за включенням?

Розв'язання

Максимальна за розміром незалежна множина є максимальною за включенням. Це означає, що неможливо додати більше вершин до максимальної

за розміром незалежної множини без порушення умови незалежності. Отже, ця множина є максимальною і за розміром, і за включенням. Тож твердження є правильним.

3. Покажіть, що максимальна за включенням незалежна множина не обов'язково є максимальною за розміром, тобто потужність максимального за включенням незалежної множини може виявитися меншою за кількість незалежності.

Розв'язання

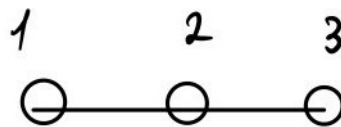


Рис. 8

Для графічного прикладу намалює граф (рисунок 8). В даному випадку, якщо ми розглядаємо середню вершину (вершину 2) (рисунок 9), то вона утворює максимально незалежну множину за включенням.

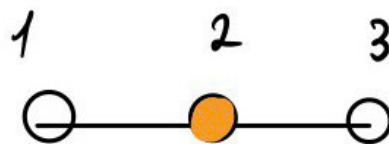


Рис. 9

Це означає, що немає інших вершин, які можна додати до цієї множини без утворення суміжності. Проте ця множина не є максимальною за розміром,

оскільки існує інша незалежна множина, яку можна утворити, обираючи дві крайні вершини (вершини 1 і 3) (рисунок 10), які не суміжні між собою.

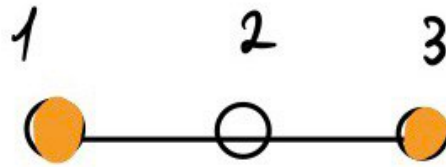


Рис. 10

Ця друга множина є максимальною за розміром. Важливо зазначити, що максимальна за розміром множина завжди буде максимальною за включенням, але навпаки це не обов'язковість

4. Безліч $D \subset V$ називається домінуючим, якщо будь-яка вершина з $V \setminus D$ з'єднана ребром з деякою вершиною з D . Покажіть, що максимальне за включенням незалежна множина є домінуючою.

Розв'язання

Нехай I буде максимальною за включенням незалежною множиною в графі $G = (V, E)$, де V є множиною вершин графа, а E - множиною його ребер.

Припустимо, існує вершина v з $V \setminus I$ (тобто вершина v не належить до множини I), яка не з'єднана жодним ребром з будь-якою вершиною з I . Оскільки I є незалежною множиною, це означає, що жодна вершина з I не має сусіда в множині $V \setminus I$, включаючи вершину v .

Тоді додамо вершину v до множини I без порушення умови незалежності. Це суперечить визначенню I як максимальної за включенням незалежної множини, тому не існує жодної вершини v з $V \setminus I$, яка була би не з'єднана жодним

ребром з множиною I . Це означає, що будь-яка вершина з $V \setminus I$ з'єднана ребром з деякою вершиною з I .

Отже, максимальна за включенням незалежна множина I є домінуючою множиною, оскільки кожна вершина з $V \setminus I$ з'єднана ребром з множиною I .

5. Доповненням графа G називається граф \bar{G} , вершинами якого є вершини G , а дві вершини суміжні тоді і лише тоді, коли вони не суміжні в G . Покажіть, що:

а) незалежна множина G є клікою \bar{G} і навпаки, кліка G є незалежною множиною \bar{G} ;

Нехай I є незалежною множиною в графі G . Тобто, жодні дві вершини з I не з'єднані ребром. У графі \bar{G} , дві вершини будуть суміжні, якщо вони не суміжні в графі G . Отже, жодні дві вершини з I не будуть суміжними в графі \bar{G} , що означає, що I є клікою в графі \bar{G} .

Нехай K є клікою в графі \bar{G} . Тобто, будь-які дві вершини з K є суміжними в графі \bar{G} . У графі G , дві вершини будуть суміжні, якщо вони не суміжні в графі \bar{G} . Отже, жодні дві вершини з K не будуть суміжними в графі G , що означає, що K є незалежною множиною в графі G .

Таким чином, незалежна множина в графі G є клікою в графі \bar{G} , і кліка в графі \bar{G} є незалежною множиною в графі G .

б)

$$\alpha(\bar{G}) = \omega(\bar{G}) = \alpha(G)$$

Показуємо, що $\alpha(\bar{G}) = \omega(\bar{G}) = \alpha(G)$, де $\alpha(G)$ позначає альфа-число графа G (максимальний розмір незалежної множини), $\omega(G)$ позначає омега-число графа G (максимальний розмір кліки), і $\alpha(\bar{G})$ позначає альфа-число графа \bar{G} (максимальний розмір незалежної множини)

За пунктом а), незалежна множина G є клікою \bar{G} , тому $\omega(G) \geq \alpha(\bar{G})$. З іншого боку, незалежна множина G є незалежною множиною \bar{G} , тому $\alpha(G) \geq \alpha(\bar{G})$. Отже, $\alpha(G) = \alpha(\bar{G})$.

За пунктом а), кліка \bar{G} в графі G є незалежною множиною $G\bar{G}$, тому $\alpha(\bar{G}) \geq \omega(G)$. З іншого боку, кліка G є клікою G , тому $\omega(G) \geq \omega(G)$. Отже, $\omega(G) = \omega(G)$.

б. Знайдіть число незалежності та хроматичне число графа Петерсена (рисунок 11).

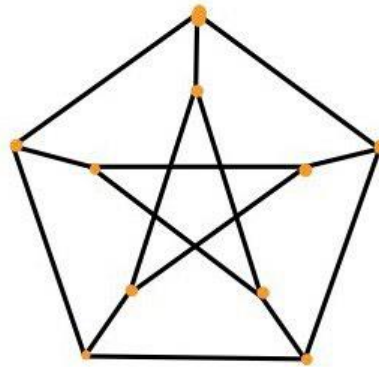


Рис. 11

Розв'язання.

Зобразимо на рисунку граф Петерсона (рисунок 11), тобто неорієнтований граф з 10 вершинами і 15 ребрами

Нехай ми розіб'ємо граф Петерсона на два цикли. Зовнішній цикл (рисунок 12) та внутрішній цикл (рисунок 13) матимуть вигляд:

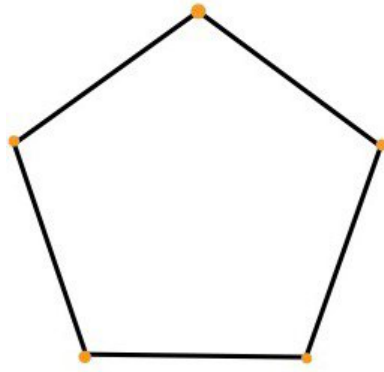


Рис. 12



Рис. 13

Пронумеруємо вершини зовнішнього (рисунок 14) та внутрішнього (рисунок 15) циклів:

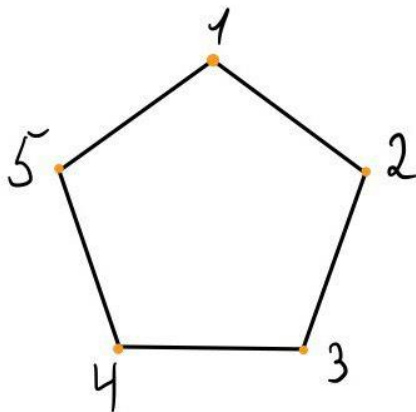


Рис. 14

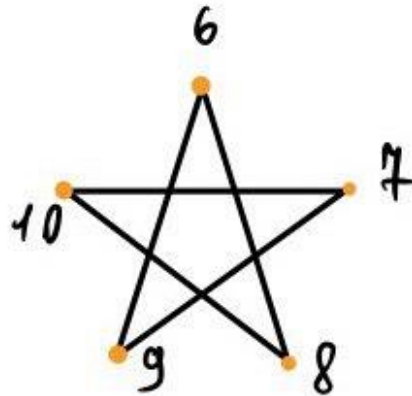


Рис. 15

Якщо у нас є внутрішня множина, вона може містити максимум дві вершини зовнішнього циклу, наприклад, дві вершини з множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а також максимум дві вершини з множини $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. При огляді цих циклів, ми можемо знайти дві суміжні вершини, що свідчить про те, що вони вже не є незалежними множинами. Таким чином, ми можемо обґрунтувати те, що максимум ми можемо вибрати 4 вершини: дві з внутрішньої та дві з зовнішньої частини. Ці 4 вершини утворюють множину незалежності.

Для того, щоб показати, що число незалежності становить 4, ми можемо навести приклад незалежної множини вершин на графі, яка складається з саме 4 вершин. Зобразимо граф (рисунок 16) з підписаними вершинами:

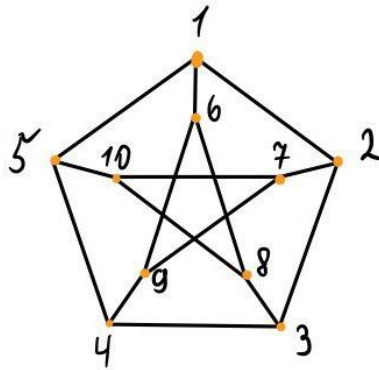


Рис. 16

Припустимо, що ми обираємо дві несуміжні вершини з зовнішнього циклу, наприклад, вершини 1 і 3 з множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тепер оберемо дві вершини з внутрішнього циклу, які не є суміжними. В цьому випадку, ці вершини це будуть вершини 9 і 10 (це єдиний варіант, оскільки після вибору пари вершин на зовнішньому колі, внутрішнє коло однозначно визначає пару вершин). Таким чином, ми обрали множину вершин: $\{1, 3, 9, 10\}$ (рисунок 17), яка складається з чотирьох вершин. Ця множина відповідає незалежній множині з максимальною кількістю вершин, тобто число незалежності дорівнює 4.

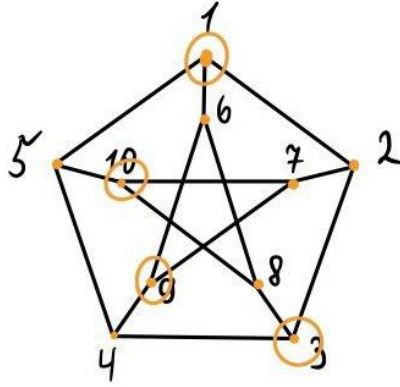


Рис. 17

Приклади інших вершин, які можна вибрати з зовнішнього циклу, включають (2,4), (2,5) та (3,5), тобто цей приклад (рисунок) – це не єдиний приклад.

Отже, ми отримуємо множину вершин $\{1, 3, 9, 10\}$, яка є прикладом незалежної множини з максимальною кількістю вершин. Таким чином, число незалежності нашого графа становить 4.

Оскільки цей граф містить цикл непарної довжини, то хроматичне число графу Петерсона дорівнюватиме 3. Можемо продемонструвати правильне розфарбування в три кольори графічно (рисунок 18)

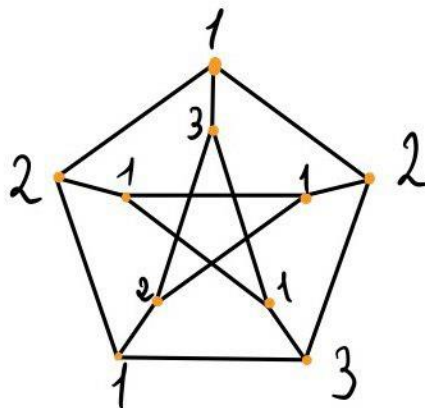


Рис. 18

7. Знайдіть число незалежності та хроматичне число графа (рисунок 19).

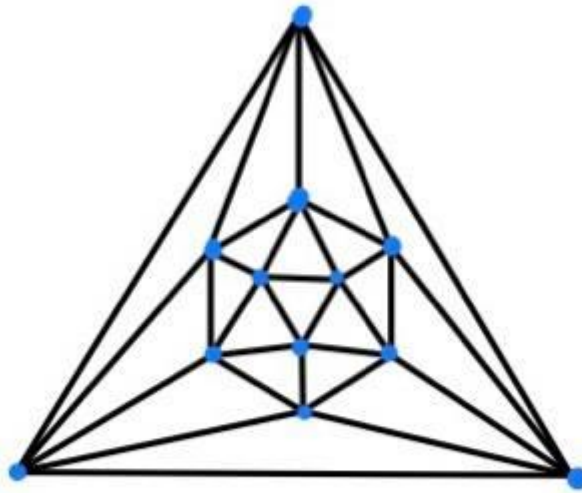


Рис. 19

Розв'язання

Пронумеруємо вершини нашого графу (рисунок 20).

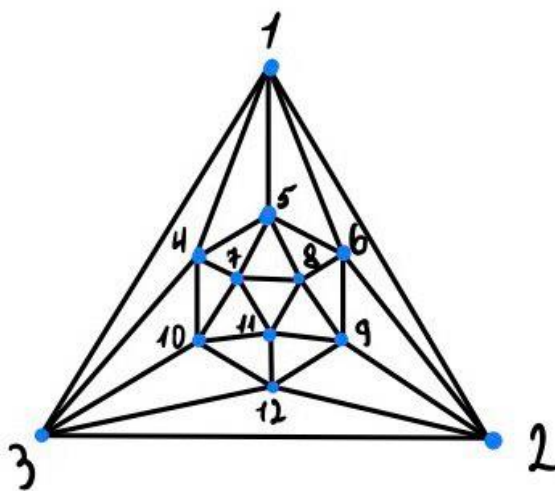


Рис. 20

Нехай візьмемо не суміжну вершину з зовнішнього циклу (вершини множини $\{1,2,3\}$)- це буде вершина номер 1. Тепер візьмемо вершину з середнього циклу (Множини $\{4,5,6,9,10,12\}$)- нехай 9, і візьмемо вершину з внутрішнього циклу (множини $\{7,8,9\}$) – нехай це буде 7 (рисунок 21).

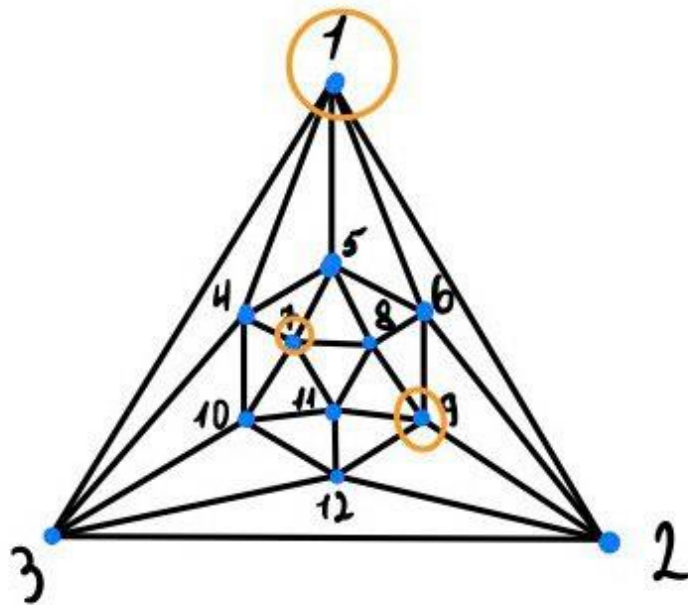


Рис. 21

Отже, отримуємо множину $\{1,3,9\}$. Тобто число незалежності нашого графа – це 3.

Хроматичне число: 4, зобразимо це (рисунок 22), розмалюємо даний граф:

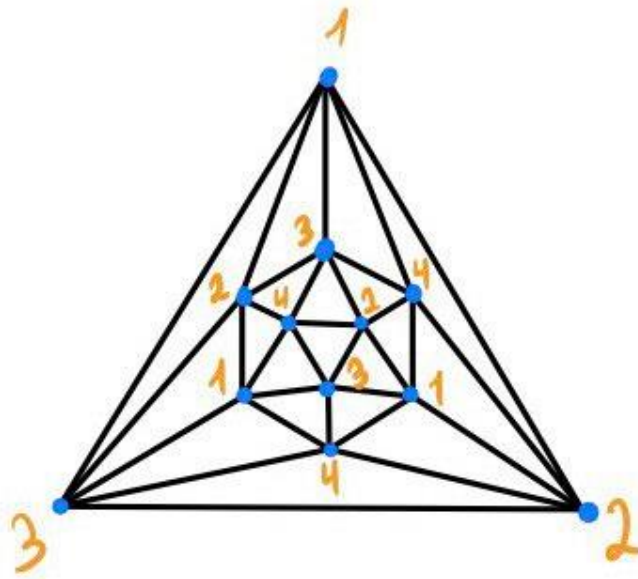


Рис. 22

8. На олімпіаду прийшло 2023 студенти, деякі з них знайомі між собою. Будемо говорити, що кілька попарно знайомих студентів утворюють організацію, якщо будь-який інший студент не знайомий із кимось із них. Доведіть, що можна розсадити всіх студентів на 90 аудиторій так, що в жодній аудиторії не сидітимуть всі представники якоїсь «організації».

Розв'язання

Доведемо індукцією до більш загального твердження: $2k$ аудиторій вистачить для того, щоб розсадити $n \leq k^2$ студентів. Тоді для отримання затвердження завдання достатньо підставити $k = 45$, оскільки $2023 \leq 2025 = 45^2$

База $k = 1, 2$. Оскільки $2k \geq k^2$ ми можемо посадити кожного студента в окрему аудиторію.

Нехай твердження доведено, коли кількість студентів не більша $(k-1)^2$. Доведемо твердження, коли кількість студентів не більша за k^2 . Розглянемо студентів v з максимальним числом d знайомих. Якщо $d \geq 2k - 2$, то посадимо v до однієї аудиторії, всіх його знайомих у другу, а тих, що залишилися $n - 1 - d \leq k^2 - 1 - (2k - 2) = (k-1)^2$ за припущенням індукції ми можемо розсадити в $2(k-1)$ аудиторій так, щоб у цих аудиторіях не очікувалося «організацій». У першій аудиторії лише одна людина, тому «організацій» там бути не може, у другій аудиторії немає «організацій», бо там немає v , але вона знайома з усіма з цієї аудиторії.

Якщо ж $d < 2(k - 1)$, то зауважимо, що нам свідомо вистачить $d+1 \leq 2k$ аудиторій. Виділимо $d + 1$ аудиторій і розсаджуватимемо студентів по черзі так, щоб жодні два знайомі не сиділи в одній аудиторії, тоді в одній аудиторії не утворюватимуться «організації» (студенти, що сидять в одній аудиторії, не знайомі один з одним). У кожного студента не більше ніж d знайомих, оскільки аудиторій $d+1$, завжди є аудиторія, де немає його друзів, куди ми його і посадимо.

9. Деякий граф правильно розфарбований у кольорів, причому його не можна правильно розфарбувати у меншу кількість кольорів. Доведіть, що в цьому графі існує шлях, вздовж якого зустрічаються вершини всіх k кольорів рівно один раз

Розв'язання

Кольори, які пофарбований граф, занумеруємо від 1 до k . Ті вершини кольору 2, які не є сусідами ні з якими вершинами кольору 1, перефарбуємо в колір 1. Нове забарвлення буде правильним, тому в ньому k кольорів. Значить, якісь вершини кольору 2 не перефарбовані і тому є сусідами з вершинами кольору 1. Аналогічно, вершини кольору 3, які не є сусідами з вершинами кольору 2, перефарбуємо в колір 2, і т.п. до останнього кольору

Після цього розглянемо якусь вершину кольору k . Вона не перефарбована, і тому є сусідом з вершиною кольору $k-1$. Ця вершина теж не перефарбована, оскільки інакше її початковий колір був би k , і вона не могла б бути сусідами з вершиною того ж кольору. Якщо вершина не перефарбована, то вона є сусідом з вершиною кольору -2 , і т. д. Продовжуючи цей процес, побудуємо шлях з вершин до квітів, які не були перефарбовані.

3 Висновки

У цій курсовій роботі я розглянув базові екстремальні характеристики графів. Висвітливши основні означення і складові характеристик, такі як число незалежності, хроматичне число, клікові числа, я проілюстрував їх практичне застосування в знаходженні екстремальних значень графів, вирішивши конкретні завдання, пов'язані зі знаходженням екстремальних значень цих характеристик для реальних графів. Зокрема, використавши алгоритм Брона-Кербоша, де показав його ефективність у вирішенні важливих задач, пов'язаних з екстремальною теорією графів.

4 Список використаних джерел

1. Трохимчук Р. М. Теорія графів: навч. посіб. К., 1998. 44 с.
2. Хромой Я. В. Збірник задач і вправ з математичної логіки / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1978.
3. Москальов. Введення в спектральну теорію графів, 2010.
4. Трохимчук Р.М. Дискретна математика у прикладах і задачах/ Трохимчук Р.М., Нікітченко М.С... – 248 с
5. Дискретна математика у прикладах та задачах (посилання потім)
6. Захарова Д.В. Теорія Графів / Захарова Д.В., 2012. – 39-40 с.
7. Smith J.H., Some properties of spectrum of a graph, in: Combinatorial structures and their application Gordon and Breach
8. A. Shapira, G. Rutenberg Extremal Graph Theory, 2016
9. Simonovits M. Introduction to Extremal Graph Theory. Budapest: Alfred Renyi Mathematical Institute, 2006.
10. McClintock J. Extremal Graphs Theory for Book-Embeddings. M. Sc. Thesis, University of Melbourne Department of Mathematics and Statistics, 2012.
11. Levenkova Natalya. Applications of graph theory to real-world networks // Mathematics&Statistics, Faculty of Science, 2014