

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота
освітній рівень - магістр

на тему: **«Моделювання просторово-часової динаміки чисельності
біологічних видів, що взаємодіють між собою»**

Виконала: студентка 2-го року

Спеціальності
114 Інженерія програмного
забезпечення

Марчук Іоанна Юріївна

Керівник: Дутка В. А.,
кандидат техн. наук, доцент

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«____» _____ 20__ р.

Київ-20_____

Зміст

Анотація	2
ВСТУП	4
1. Міграція Тварин.....	5
2. Модель взаємодії двох біологічних видів.....	7
3. Математична модель	8
4. Коротке описання розробленої комп'ютерної програми	11
5. Апробація комп'ютерної програми	12
6.1. Моделювання просторово-часової взаємодії двох видів із постійною здатністю їх до міграції.	19
6.2. Моделювання просторово-часової взаємодії двох видів із суттєво нелінійною здатністю їх до міграції.	28
Висновки	36
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	37

Анотація

Проблема просторово-часової взаємодії біологічних видів має важливе значення в багатьох областях біології, екології, медицини, суспільства. З цією проблемою пов'язані питання поширення видів або населення на певній території (ареалі), питання забезпечення видів ресурсами до життя, поширення вірусних захворювань і т.д. Для успішного проживання на певному ареалі, зокрема, на всій планеті, важливим аспектом цієї проблеми є прогнозування взаємодії біологічних видів. Одним з інструментів такого прогнозування є математичне моделювання.

Математичне моделювання набуває все більшого значення в багатьох областях біології протягом останніх двох десятиліть.

Особливо актуальним стає моделювання процесу міграції. Міграція людей, міграція тварин, міграція бактерій - все це було під щільним дослідженням вчених, які в свою чергу збирали всі ці дані для поліпшення умов існування. Надалі ці дослідження перейшли у розріз математичних моделей. Це було зроблено для покращення процесу аналізу впливаючих факторів, що саме і як впливає на розвиток популяції або її вимирання. З процесом міграції біологічних видів тісно пов'язаний процес міграції клітин а отже і пандемій. Питання для вирішення яких підходить моделювання просторово-часової динаміки чисельності біологічних видів:

- Проблемами в екології (відстежування і прогнозування поведінки видів)
- Продовольчі кризи (моделювання тваринного та рослинних видів, поширення рослин і як наслідок поширення виду, та навпаки)
- Проблема поширення епідемії серед видів.

В роботі вибиралась реалістична модель взаємодії двох біологічних видів які знаходяться на одній території (чи в одній області). Характерна є така закономірність - періодичні зміни їх численності. І тому в зв'язку з цим

вибрана модель, яка описує взаємодію цих видів і розв'язком цієї моделі є стійкий граничний цикл. Види співіснують не тільки в часі, а і в просторі, тому вирішено було моделювати розвиток їх чисельності в певній просторовій області.

Оскільки такого типу моделі є нелінійні і розв'язки їх шукати аналітично неможливо у просторі і часі, тому в даній роботі розв'язок такої моделі шукається чисельно шляхом розробки відповідної комп'ютерної програми у середовищі COMSOL.

Дана дипломна робота несе практичний характер, а саме через аналіз та порівняння з вже існуючими моделями була побудована модель у межах дипломної роботи, що може бути використана для моделювання біологічного руху: поширення хвиль популяцій, епідемій і т.п.

ВСТУП

Спостерігаючи за історією людського розвитку і векторів розвитку - міграція є важливим компонентом демографічного розвитку, аж ніяк не менше ніж смертність або народжуваність[1]. Якщо спочатку йшлося про локальні переміщення в безпосередній близькості від центру переміщень, печери або хатини в рамках необхідних для існування полювання або збирання. Потім далі під час Великого переселення народів (германські племена, угорці, болгари, тюрки та ін.) - міграція стала головною в розвитку цих народів і заселення територій. Що було причиною міграції? Перш за все, боротьба за ресурси, ресурси постійно змінювались, в умовах нерівномірного зростання людських популяцій [1]. Смертність, народжуваність і міграційні процеси в реальному житті були і є досить переплетені. У розвиток цілих країн і народів міграції займає важливе місце, крім уже є дещо для нас основоположних елементів. Навіть наш сучасний світ можна поділити на три категорії країн: держави, в історії яких міграція - дуже значний вплив на чисельність і динаміку населення, країни в яких міграція не чинила значного впливу на розвиток населення, нарешті, та країни в яких мала велике значення внутрішня колонізація [1-2].

Міграція відбувається через географічні диспропорції попиту та пропозиції робочої сили. Там, де робочої сили недостатньо, заробіток вищий. У регіонах, де багато робочої сили, заробіток нижчий або незначний. Міграція дає можливість покращити матеріальний добробут і багатство людей [1-2]. Коли люди переїжджають у регіони з більш високим рівнем доходу, потоки капіталу відбуваються в зворотному напрямку або в райони, де робоча сила дешева. Міграція здебільшого виникає з країн, які відстають у модернізації. Модернізація, як видається, надзвичайно руйнівна для деяких країн. Чим сучасніша країна, тим дешевше надходить робоча сила іммігрантів. У модернізованих країнах суспільства швидко трансформуються. Традиційні форми зайнятості зникають [1-4].

1. Міграція Тварин

Міграція Тварин так само схожа на міграцію людей. Тільки на відміну від людей яких в якості рабів (посилання) вивозили з Африки в інші країни. Звірі могли мігрувати тільки по причинах пошуках кращих умов життя [5].

Стандартними причинами міграцій тварин є:

1. Нашестя. Типові для регіонів з нестабільними кліматичними умовами, а також можуть бути викликані важкою екологічною катастрофою, дефіцитом продовольства, перенасиченням особин на квадратному кілометрі.
2. Розмноження
3. Клімат, тривалість світлового дня. Різноманітність і якість їжі для різних тварин визначається кліматичними зонами, температурними умовами.
4. Періодичність. Деякі тварини мігрують в залежності від фази місяця.

Міграція - широко поширене явище серед тварин.

За останні десятиліття величезна кількість була зібрана емпіричних даних для картування міграційних маршрутів, щоб описати моделі міграції, наприклад швидкість і час, використання пунктів зупинки в дорозі, а також для характеристики індивідуальні відмінності в міграційних стратегіях. Паралельно емпіричні розробки, значна частина теорія міграції сформована. Аналітичні моделі використовуються для отримання оптимальних рішень в одній подорожі [6]. Складні моделі одиночних подорожей, засновані на динамічних програмування, може досліджувати ефекти стохастичності в умовах пошуку їжі або польоту [6] просунуті моделі вивчають розміщення міграції в річному циклі [7]. Незважаючи на ці емпіричні та теоретичні досягнення, наша здатність передбачати міграційні рухи тварин все ще обмежена. Проте, глибоке розуміння його закономірностей і процесів стає все більш актуальним. важливість, як для антропогенних інтересів, таких як авіаційна безпека, поширення інфекційних захворювань, шкідників і

інвазивних видів, а також для збереження самих мігрантів. Знищення середовища існування та зміна клімату становлять серйозну загрозу для мігруючих видів, оскільки вони призводять не тільки до втрати середовища існування, але супутнього збільшення відстані між відповідними місцями або невідповідності часу між джерелами їжі у віддалених місцях. Моделі, які досліджують причини, наслідки, детермінанти та еволюцію міграційної поведінки, можуть суттєво покращити наше розуміння руху тварин, що має принципове значення для будь-яких зусиль із збереження [7].

2. Модель взаємодії двох біологічних видів

Першу математичну модель взаємодії двох біологічних видів запропонував В. Вольтерра, яка має назву “модель Лотки-Вольтерри” [8, 9].

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 uv, \\ \frac{dv}{dt} = -a_2 v + b_2 uv, \end{cases} \quad (1)$$

що описує взаємодію двох біологічних видів за схемою “жертва-хижак”. Тут $u(t)$ – чисельність (або густота чисельності) “жертви”, $v(t)$ – чисельність (або густота чисельності) “хижака”, a_1, b_1, a_2, b_2 – додатні коефіцієнти. Член $b_1 uv$ описує частину чисельності «жертви», яку знищує (вилучає) «хижак», а член $b_2 uv$ описує частину чисельності «жертви», яку використовує («поїдає») «хижак» для збільшення чисельності своєї популяції. Ця модель описує зміну в часі чисельностей двох біологічних видів і має автоколивальні розв’язки в околі стаціонарної точки (стану) типу “центр”, що має біологічну інтерпретацію: практично величини чисельностей видів на їхньому ареалі співіснування мають коливальний характер.

Проте ця модель має суттєвий недолік – вона є досить чутливою, а, отже, нестійкою до випадкових збурень чисельностей видів: її розв’язки суттєво залежать від початкових умов. Така поведінка розв’язків не зовсім коректно описує реальні процеси взаємодії біологічних видів, що проживають на певній території. Крім цього, величина членів $b_1 uv$ і $b_2 uv$, що описують знищення і поїдання “жертви”, при зростанні чисельності «жертви» також нескінченно зростають. Це не відповідає дійсності, так як спроможність «хижака» до знищення «жертви» є обмеженою.

3. Математична модель

Тому цю модель необхідно було вдосконалювати таким чином, щоб отримана нова модель не мала вказаних недоліків [10, 11]. Одним з таких варіантів удосконалення моделі є модель [10]

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \rho_1 \frac{u}{u+k} v - \gamma u^2, \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha v + \alpha \rho_2 \frac{u}{u+k} v. \end{cases} \quad (2)$$

Тут враховується внутрішньовидова конкуренцію “жертви” (член “ $-\gamma u^2$ ” в першому рівнянні) і насичення “хижака” (член із множником $\frac{u}{u+k}$, який означає обмеженість знищення “хижаком” “жертви” при великих значеннях $u(t)$), k – додатна стала. Розв’язки моделі (2) в околі нетривіальної стаціонарної точки (стану) не залежать від збурення початкових умов і з плином часу набувають автоколивального характеру, а саме, в околі цієї точки система (2) має стійкий граничний цикл. Це дає змогу достовірно описувати в часі реальні процеси взаємодії біологічних видів.

При моделюванні взаємодії біологічних видів на ареалі їх існування (на поверхні чи в просторі) функції u і v крім залежності від часу є функціями також просторових координат $u(x, y, z, t)$ і $v(x, y, z, t)$, а до системи (2) потрібно включити іще дифузійні члени $\operatorname{div}(D_1(u)\operatorname{grad} u)$ і $\operatorname{div}(D_2(v)\operatorname{grad} v)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(u)\operatorname{grad} u) + u - \rho_1 \frac{u}{u+k} v - \gamma u^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}(D_2(v)\operatorname{grad} v) - \alpha v + \alpha \rho_2 \frac{u}{u+k} v, \end{cases} \quad (3)$$

де $D_1(u)$ і $D_2(v)$ – коефіцієнти дифузії (поширення) густоти чисельності “жертви” і “хижака” відповідно. В загальному випадку коефіцієнти дифузії можуть бути також функціями координат точки дослідження.

При моделюванні взаємодії видів у 2-вимірній області G на площині в прямокутній декартовій системі координат Oxy система (3) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_1(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u - \gamma u^2 - \rho_1 \frac{u}{u+k} v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_2(v) \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \alpha v + \alpha \rho_2 \frac{u}{u+k} v. \end{cases} \quad (4)$$

Коли розглядається взаємодія видів при наявності причин для підвищеної активності їх міграції, що спричиняє рух особин видів у вигляді хвилі (популяційні хвилі) [12, 13], тоді залежність коефіцієнтів дифузії $D_1(u)$ і $D_2(v)$ є степеневою функцією від густоти популяцій [12]:

$$D_1(u) = A_1 u^{n_1}, \quad D_2(v) = A_2 v^{n_2}, \quad (5)$$

де n_1 і n_2 – показники степенів, A_1 і A_2 – невід’ємні сталі. Коефіцієнти дифузії для даного біологічного виду можуть бути нульовими, якщо особини цього виду не мають здатності до поширення [9].

Для моделі (4) потрібно задати початкові та граничні умови. Початкові умови мають вигляд

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad v(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (6)$$

де $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ – задані невід’ємні функції координат x і y токи області G .

Граничні умови описують взаємодію видів із зовнішнім по відношенню до області G середовищем. Граничні умови відсутності взаємодії із зовнішнім відносно області G середовищем формуються заданням нульових потоків особин цих видів через межу області:

$$D_1 \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad D_2 \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}$ – означає похідну функції u в напрямі зовнішньої нормалі до межі області в даній точці межі. Якщо через частину Γ_1 границі області G

відбувається заселення цієї області особинами обох видів, то граничні умови для описання цього процесу можуть мати вигляд

$$D_1 \frac{\partial u}{\partial n} = q_1(u, x, y, t), \quad (8)$$

$$D_2 \frac{\partial v}{\partial n} = q_2(v, x, y, t), \quad (9)$$

де $q_1(u, x, y, t)$ і $q_2(v, x, y, t)$ – задані величини потоків особин одного і другого виду відповідно через межу Γ_1 всередину області G . Якщо заселення області відбувається особинами тільки одного виду, то відповідна величина потоку особин другого виду через межу Γ_1 дорівнює нулю.

Слід зазначити, що побудована описаним вище природним чином нелінійна математична модель вигляду (4), (5), яка описує популяційні хвилі в процесі просторово-часової взаємодії біологічних видів, у доступних літературних джерелах відсутня. Отримання розв'язку цієї моделі для просторової області складної конфігурації сучасними аналітичними методами на даний час неможливе. Тому в даній дипломній роботі знаходження розв'язку моделі (4), (5) проводиться чисельним методом скінченних елементів у середовищі програмного комплексу COMSOL.

4. Коротке описання розробленої комп'ютерної програми

Для знаходження чисельного розв'язку нелінійної моделі (4), (5) з відповідними початковими і граничними умовами було розроблено комп'ютерну програму в середовищі COMSOL 5.3. Для цього було використано підмодулі **∇^2 Heat Equation (hreq)** модуля **Au Mathematics**. З допомогою цих модулів розроблено комп'ютерну програму. Просторову область розбиваємо на скінченні елементи. Для стійкості і збіжності чисельного розв'язку необхідно дотримуватися відомого співвідношення між кроком по часі Δt та діаметром Δh найдрібнішого скінченного елемента розбиття просторової області при численному розв'язанні рівнянь параболічного типу

$$\Delta t \leq C \Delta h^2, \quad (10)$$

де C – додатна стала, величина якої залежить від величин коефіцієнтів дифузії, градієнтів шуканого розв'язку і т. і.. При комп'ютерному розв'язанні конкретної моделі ця стала визначається експериментально.

5. Апробація комп'ютерної програми

Перевірку працездатності розробленої комп'ютерної програми було проведено шляхом розв'язання за допомогою цієї програми математичної моделі взаємодії виду рослиноїдних із видом рослин, представленої в роботі [14. Sanshez and ...]. Ця модель складається із системи двох нелінійних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = p \left(1 - \frac{p}{K} \right) - m_1 \frac{ph}{p+s}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = D \nabla^2 h - \eta y + m_2 \frac{ph}{p+s}, \end{cases} \quad (11)$$

де через $p(x, y, t)$ позначено густоту виду рослин, а через $h(x, y, t)$ – густоту виду рослиноїдних. Дослідження взаємодії цих видів проводиться в прямокутній області G , зображеній на рис. 1.

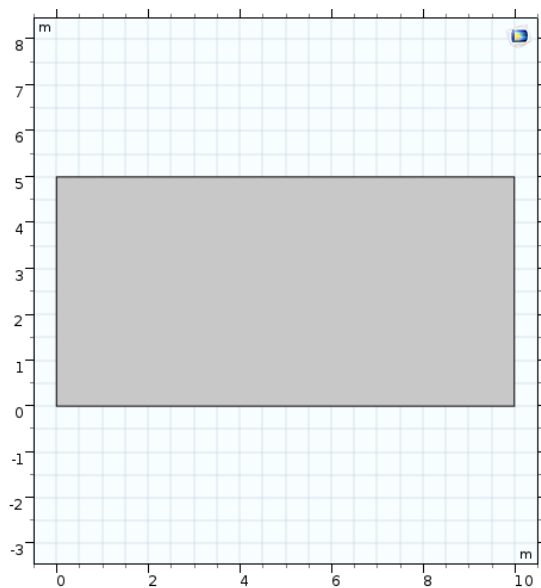


Рис. 1. Просторова область дослідження взаємодії двох видів.

Початкові умови для системи (11) мають вигляд

$$p(x, y, 0) = R(1 + 0.2 \sin(x + y) \cos(x - y)), \quad (12)$$

$$h(x, y, 0) = W(1 + 0.4 \sin(2x)). \quad (13)$$

Граничні умови на всій межі області G задаються у вигляді нульових потоків густоти чисельностей біологічних видів

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, \\ D \frac{\partial h}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

що має біологічну інтерпретацію як відсутність взаємодії цих видів із зовнішнім середовищем за межами їх ареалу. Обчислення виконано для таких значень параметрів: $R = 0,364$; $W = 1,11$; $D = 6$; $K = 2$; $m_1 = m_2 = s = 1$; $\eta = 0,25$.

На рис. 2 наведено візуалізацію початкових умов, отриману за допомогою розробленої COMSOL-програми.

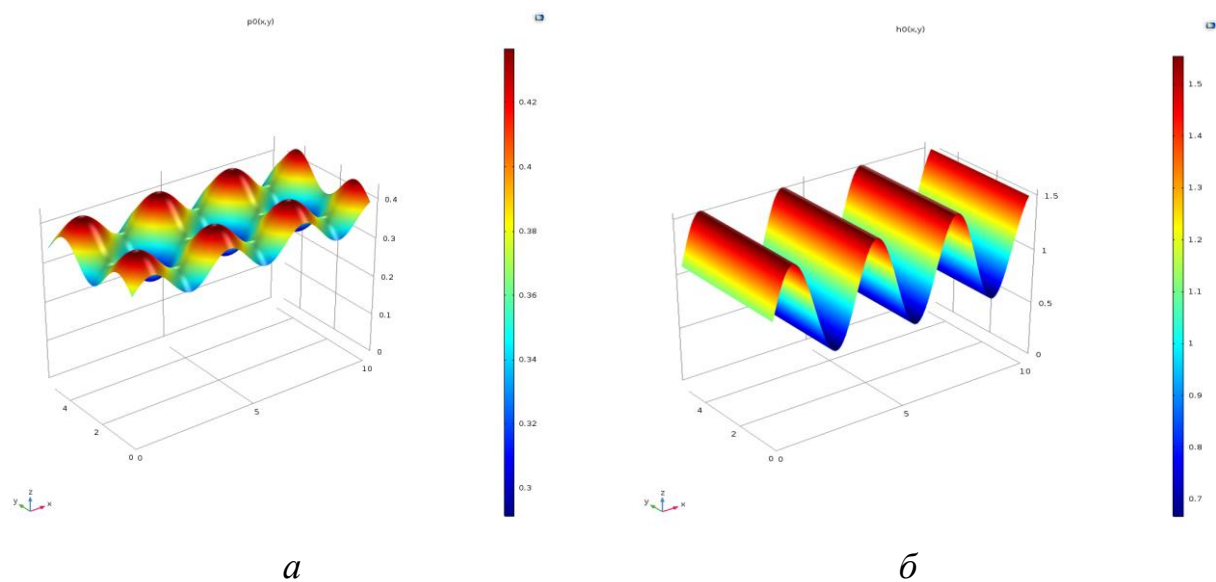


Рис. 2. Початкові умови: *a* – (12), *б* - (13).

На рис. 3 показано розбиття двовірної області на скінченні елементи: $50 \cdot 25 = 1250$ внутрішніх прямокутних елементів і 150 граничних елементів, величина кроку розбиття дорівнює $\Delta h = 10/50 = 0.2$. Крок по часі Δt був вибраний рівним 0,001.

На рис. 4 наведено розподіл густоти виду рослиноїдних і виду рослин в початковий момент часу і в момент часу 0,772 із статті [14 Sanshez...], а на рис. 5 і 6 обчислені дані в ці ж самі моменти часу. Видно, що обчислені

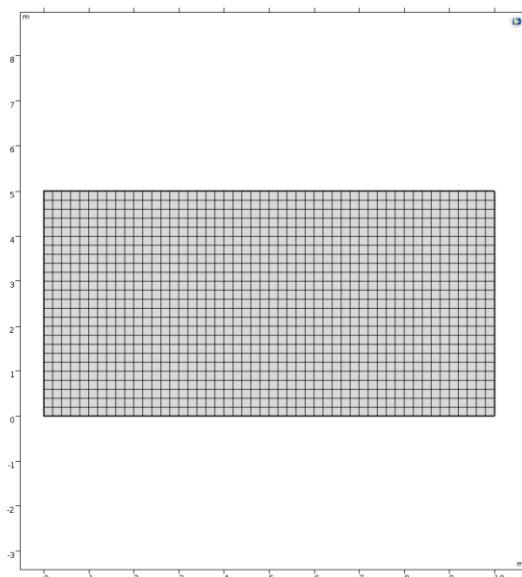


Рис. 3. Розбиття області на скінченні елементи: $50 \cdot 25 = 1250$ внутрішніх елементів і 150 граничних елементів.

початкові умови за допомогою розробленої COMSOL-програми відрізняються від даних роботи [14]. Слід зазначити, що наведені в [14] початкові умови для виду рослин співпадають із наведеними в [14] результатами в момент часу 0,772.

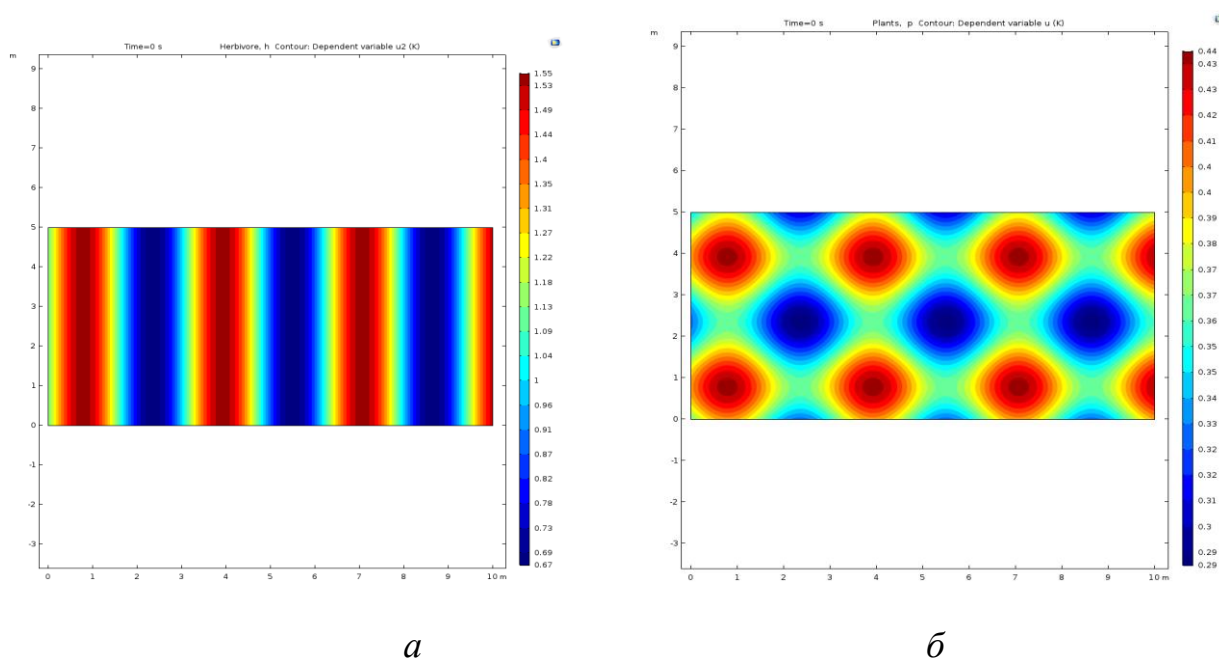


Рис. 4. Картини розподілу обчислених густоти виду рослиноїдних (а) і виду рослин (б) в початковий момент часу $t = 0$.

При порівнянні отриманих результатів (рис. 5 і рис. 7) із результатами роботи [14] (рис. 6 і рис. 8) видно, що різниця між ними знаходиться в межах 5...10 %, що свідчить про їх добре взаємоузгодження. Звідси випливає, що отримані чисельні результати добре узгоджуються із результатами роботи [14]. Це свідчить про придатність розробленої комп'ютерної програми для моделювання процесу просторово-часової взаємодії біологічних видів.

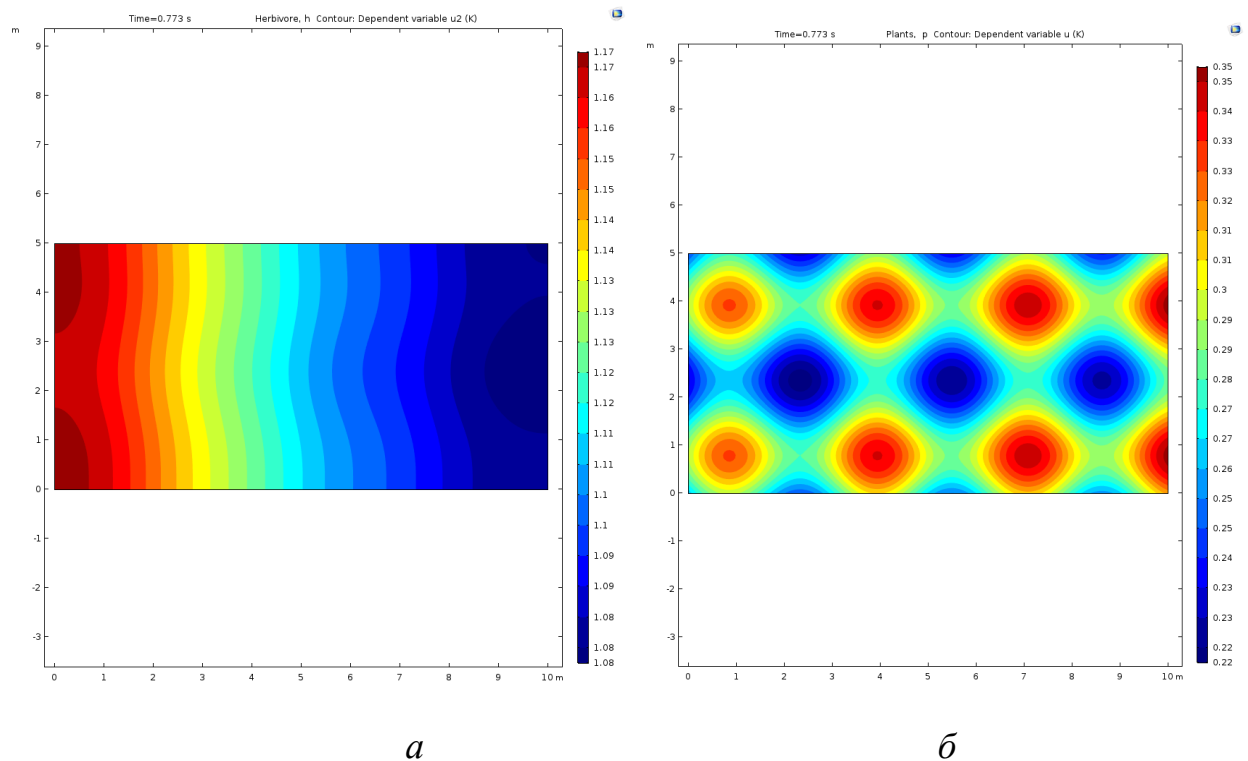


Рис. 5. Картини розподілу обчислених густоти виду рослиноїдних (а) і виду рослин (б) рослин в момент часу $t = 0,773$.

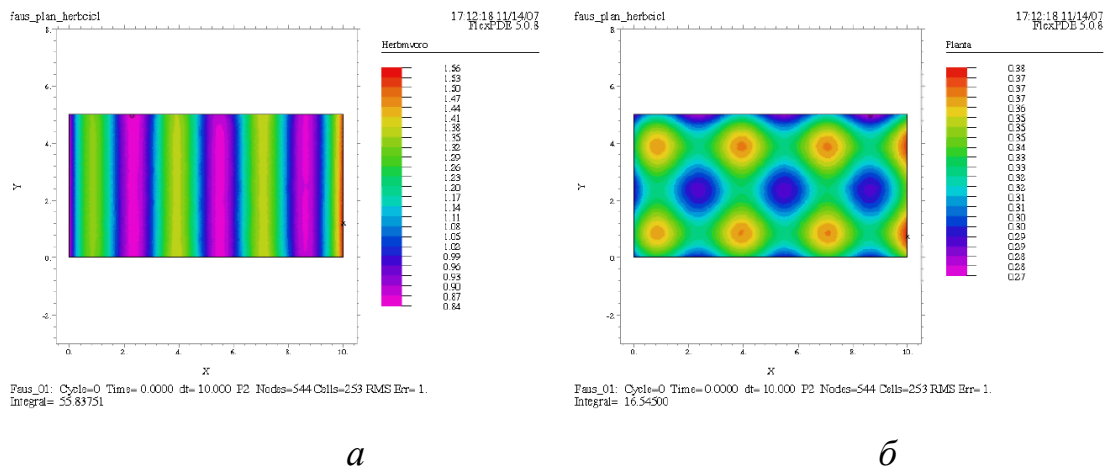


Рис. 6.1

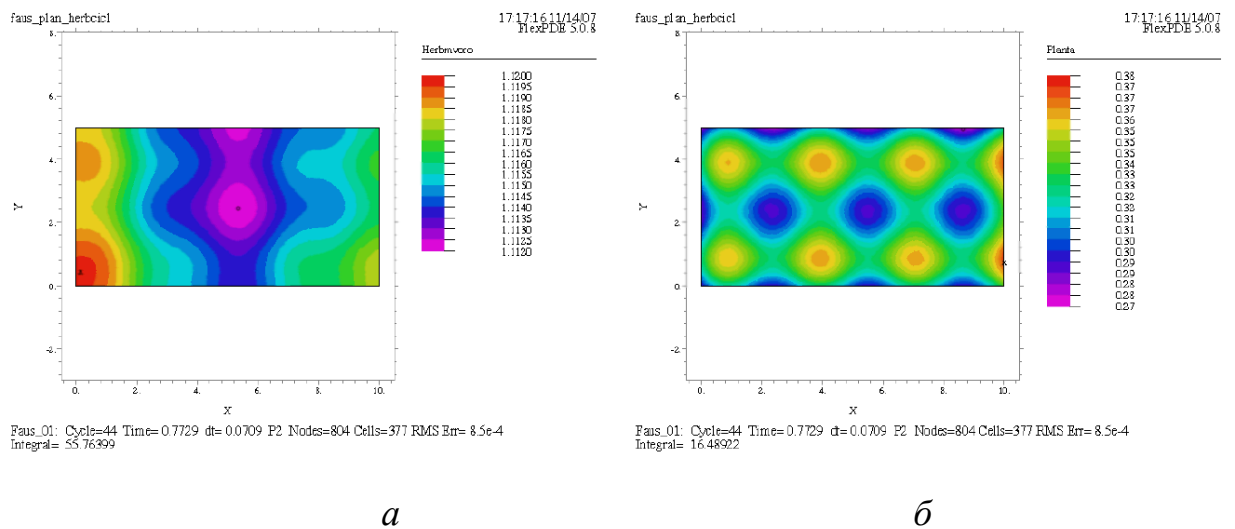


Рис. 6.2

Рис. 6.1 а,б та Рис. 6.2 а,б Картини розподілу густоти виду рослиноїдних і виду рослин в початковий момент часу $t = 0$ і в момент часу $t = 0,77$ (із статті [14]).

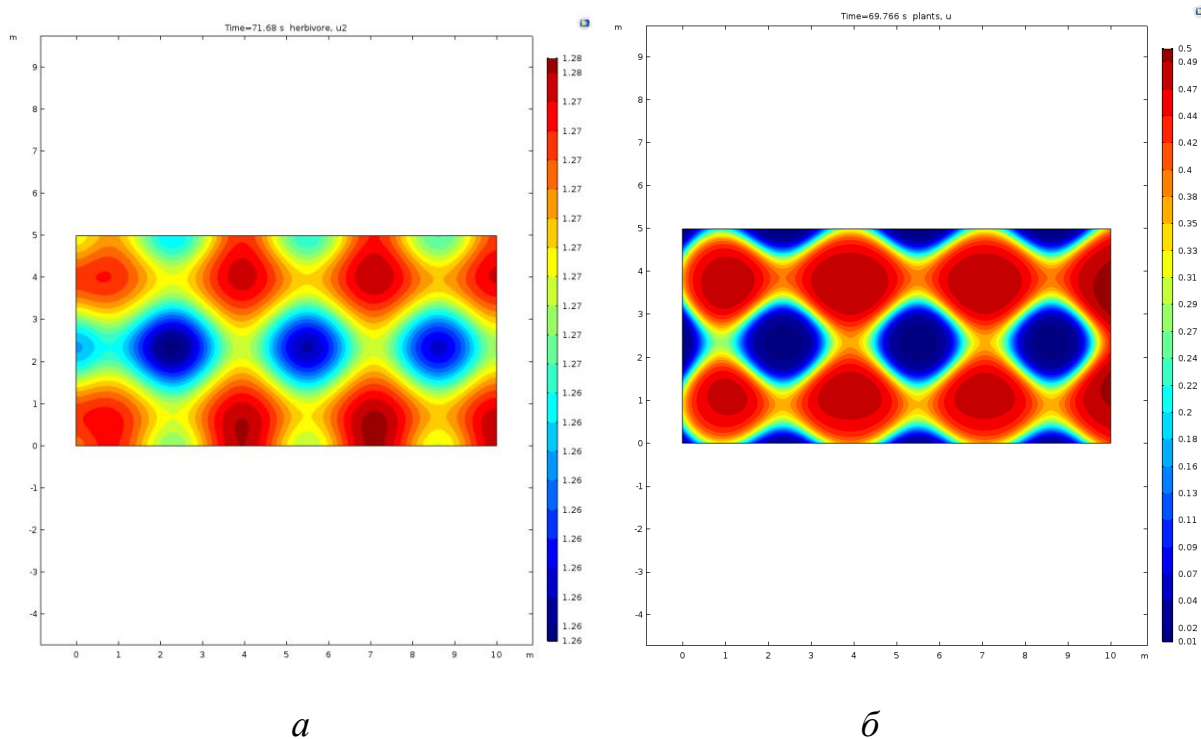
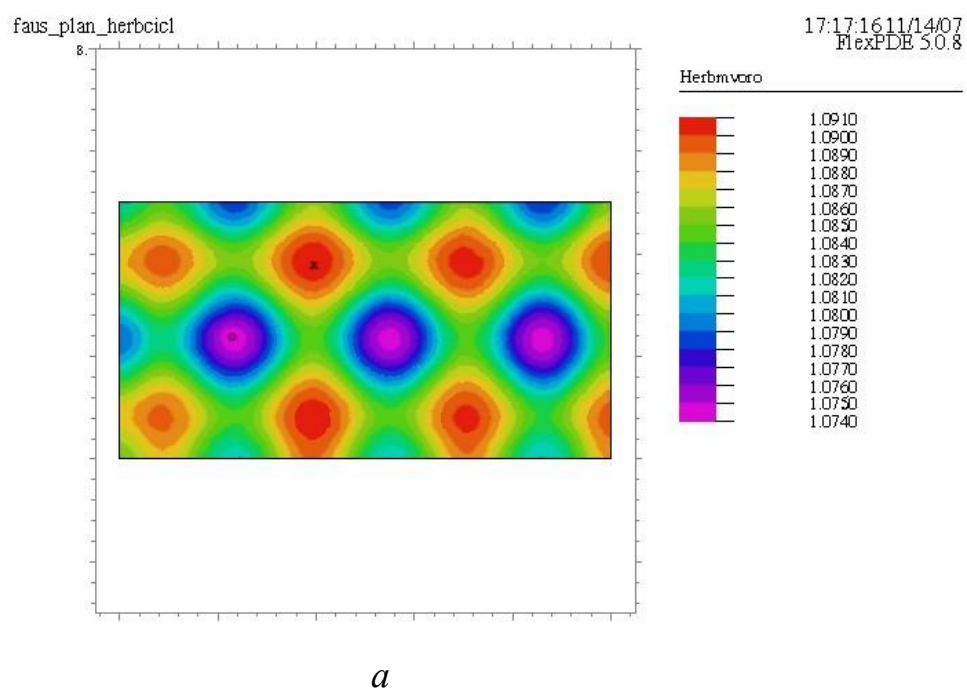


Рис. 7. Обчислений розподіл густоти виду рослиноїдних (*a*) в момент часу $t = 71,68$ і виду рослин (*б*) в момент часу $t = 69,76$.



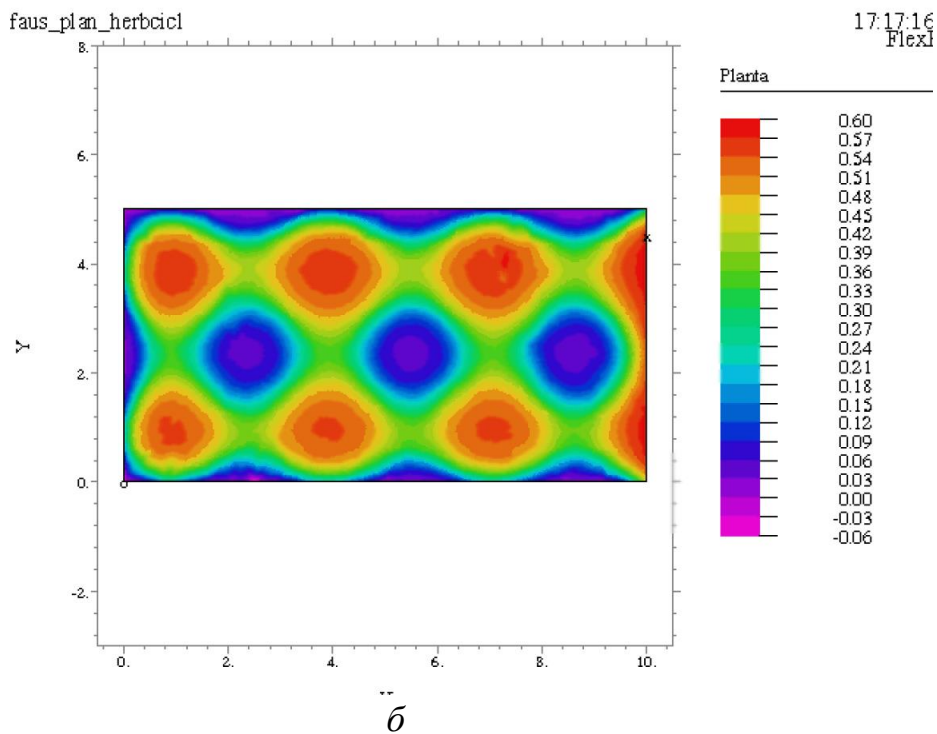


Рис. 8. Розподіл густоти виду рослиноїдних (a) в момент часу $t = 71,63$ і виду рослин (b) в момент часу $t = 69,74$ (стаття [14]).

Слід зауважити, що наведені результати роботи [14] (рис. 8б) свідчать про те, що вони отримані при похибці, яка не менша ніж 10 % (від'ємні значення «-0,06» густоти виду рослин становлять 10 % від їх максимуму «0,60»). Ці від'ємні значення густоти виду рослин не мають біологічної інтерпретації, а, скоріш за все, лежать в межах похибки обчислень авторів роботи [14].

Таким чином, розроблена комп'ютерна програма в середовищі COMSOL придатна для моделювання просторово-часової взаємодії біологічних видів.

6.1. Моделювання просторово-часової взаємодії двох видів із постійною здатністю їх до міграції.

Спочатку було виконано моделювання просторово-часової взаємодії двох видів типу «жертва-хижак» із постійною здатністю до міграції обох видів. В цьому випадку коефіцієнти дифузії обох видів є сталими величинами. Модель має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_1(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u - \gamma u^2 - \rho_1 \frac{u}{u+k} v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_2(v) \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \alpha v + \alpha \rho_2 \frac{u}{u+k} v; \end{cases} \quad (15)$$

$$D_1(u) = 0,5, \quad D_2(v) = 0,5, \quad (16)$$

початкові умови у вигляді круглих «сходинок»

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad v(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (17)$$

де

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} u_0, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_1, \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > r_1, \end{cases} \quad \psi(x, y) = \begin{cases} v_0, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2, \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > r_2, \end{cases} \quad (18)$$

де $u_0 = 2,1$; $v_0 = 0,5$; $r_1 = 2$; $r_2 = 1$.

Граничні умови описують взаємодію видів із зовнішнім по відношенню до області G середовищем і мають вигляд:

$$D_1 \frac{\partial u}{\partial n} = q_1(u, x, y, t), \quad (19)$$

$$D_2 \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (20)$$

де

$$q_1(u, x, y, t) = \begin{cases} F_0, & x = 0, 0 \leq y \leq y_1, \\ 0, & x = 0, y > y_1, \end{cases} \quad (21)$$

$F_0 = 0,1$; $y_1 = 2$; крім того, $q_1(u, x, y, t) = 0$ на решті границі області G .

За допомогою граничних умов (19), (21) в цій моделі виконується моделювання процесу безпосереднього заселення області G особинами «жертви» із зовнішнього середовища через межу $\Gamma_1 = \{x = 0; 0 \leq y \leq y_1\}$.

Нижче наведено ілюстрації чисельного розв'язку математичної моделі просторово-часової взаємодії двох видів типу «жертва-хижак» із постійною здатністю до міграції обох видів (рис. 9 – рис. 21). Із картин розподілу густо-

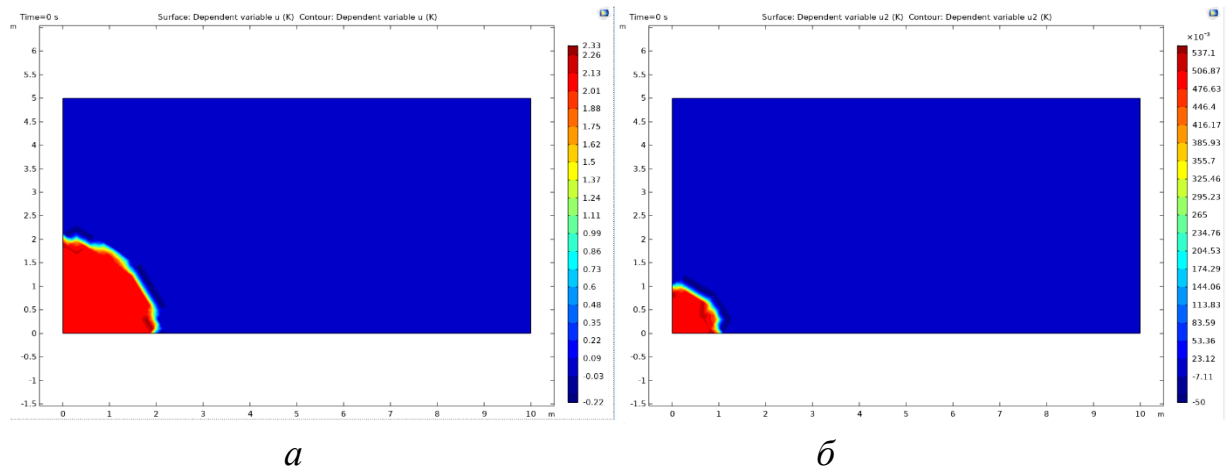


Рис. 9. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 0$.

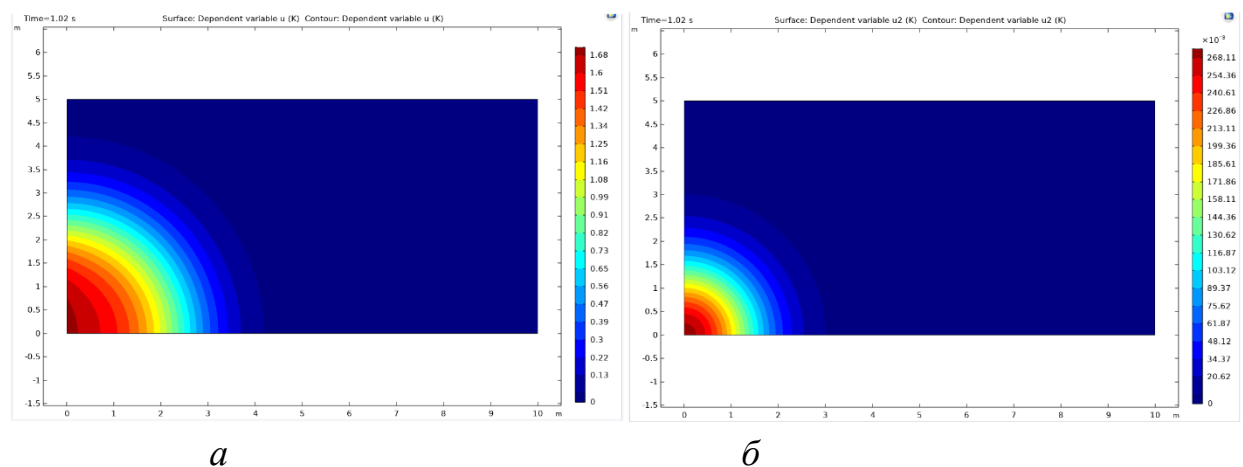


Рис. 10. Розподіл густоти виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 1,02$.

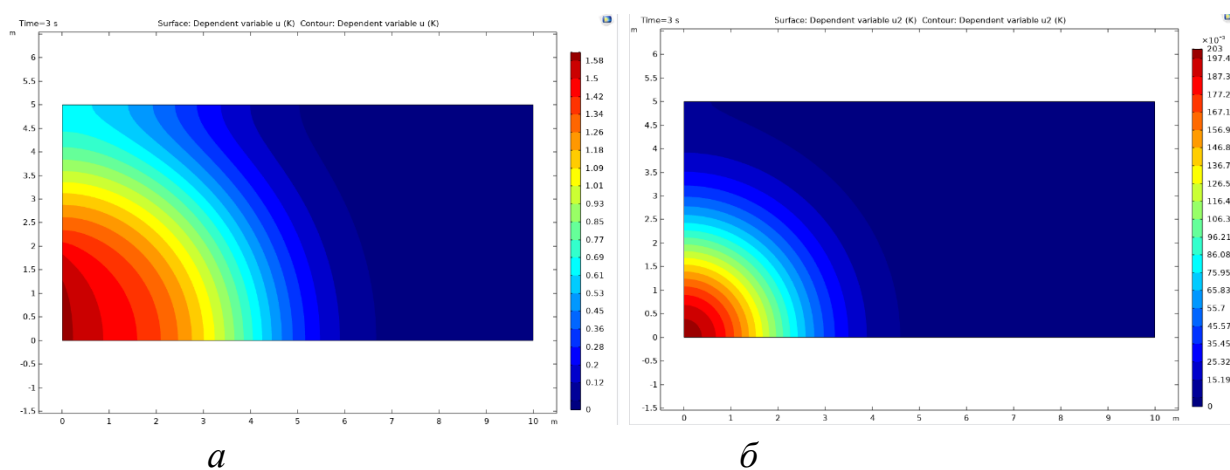


Рис. 11. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (а) і виду «хижака» (б) в момент часу $t = 3$.

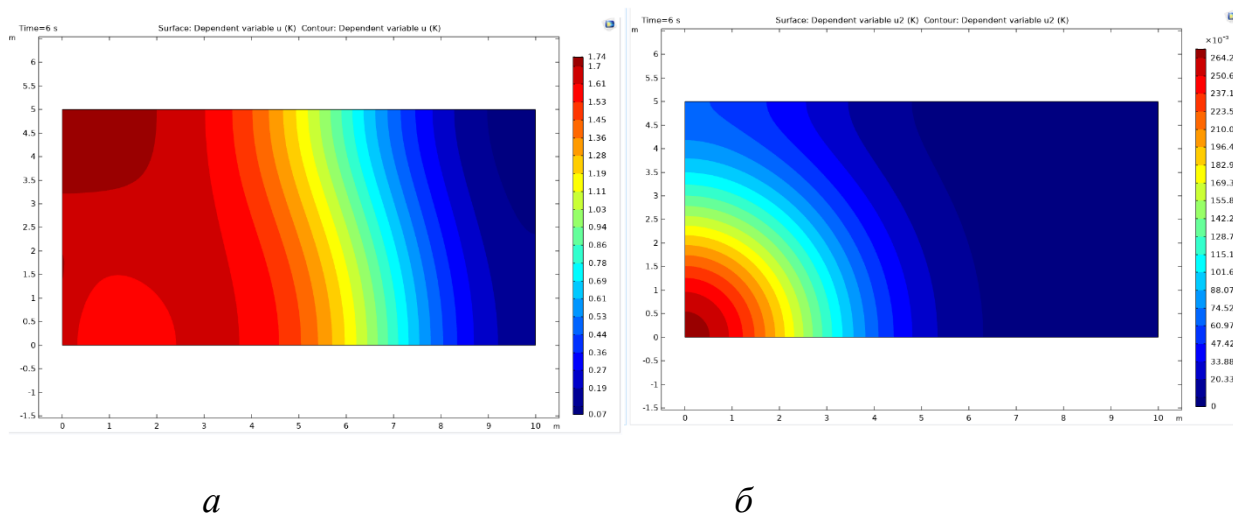


Рис. 12. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (а) і виду «хижака» (б) в момент часу $t = 6$.

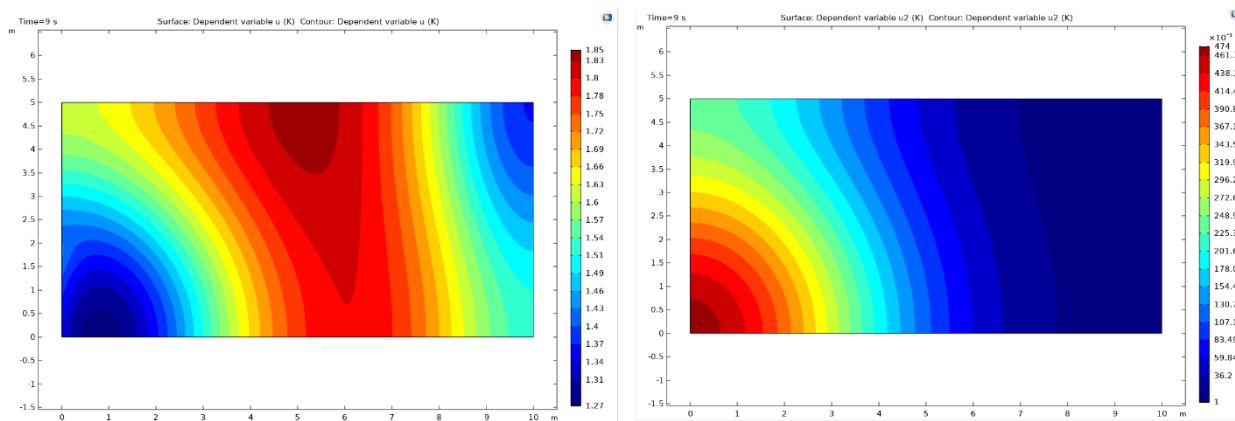
*a**б*

Рис. 13. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 9$.

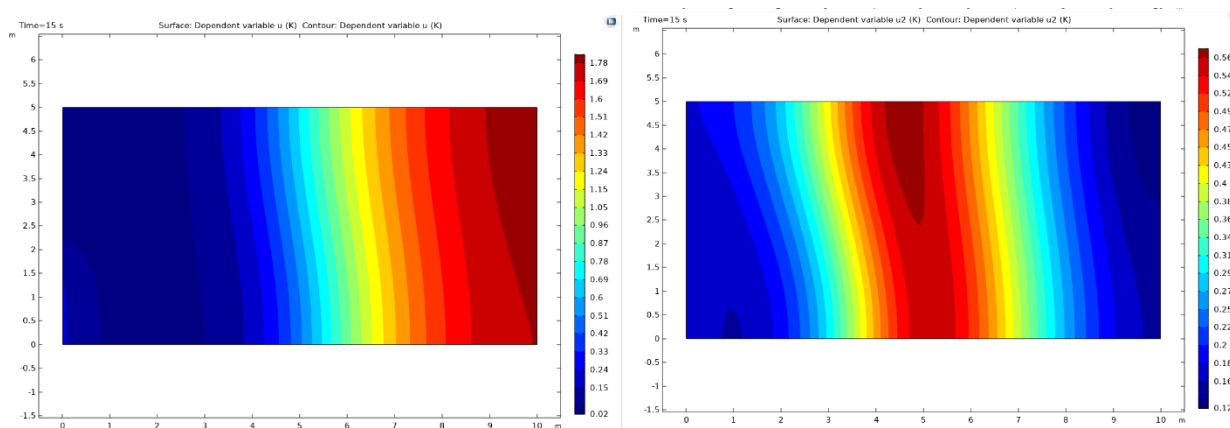
*a**б*

Рис. 14. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 15$.

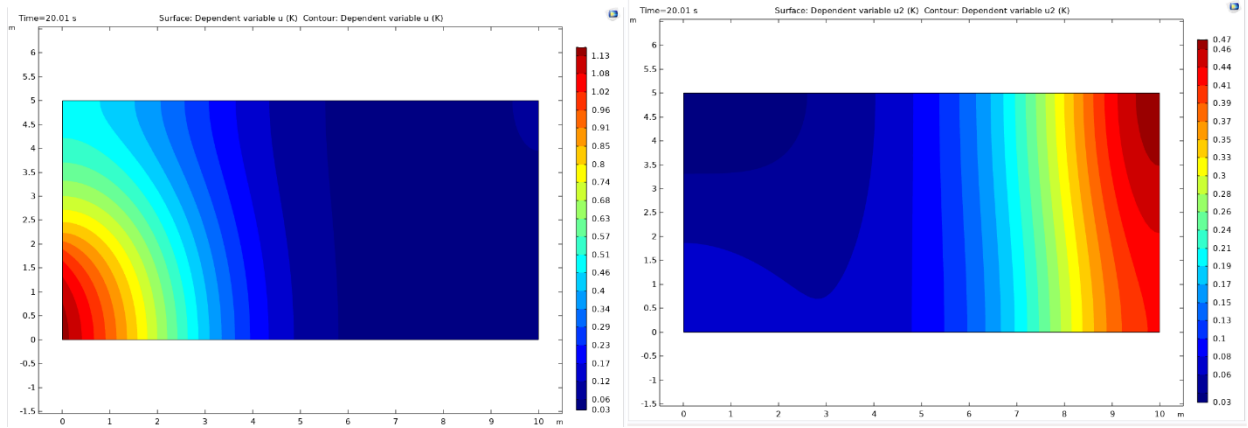
*a**б*

Рис. 15. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 20,01$.

ти чисельності видів (рис. 9 – рис.18) та із графіків часової зміни чисельності видів у характерних точках просторової області G видно, що після певного часу $t_{\text{мп}}$ від початку взаємодії видів чисельності видів виходять на майже періодичний режим. Як видно із рис. 19 – 21, ця величина часу $t_{\text{мп}} \approx 50$. Така поведінка розв'язку є характерна якраз для даної моделі, котра при відсутності здатності видів до міграції має розв'язком стійкий граничний цикл. Причому, як видно із графіків на рис. 19 – 21, після виходу розв'язку на

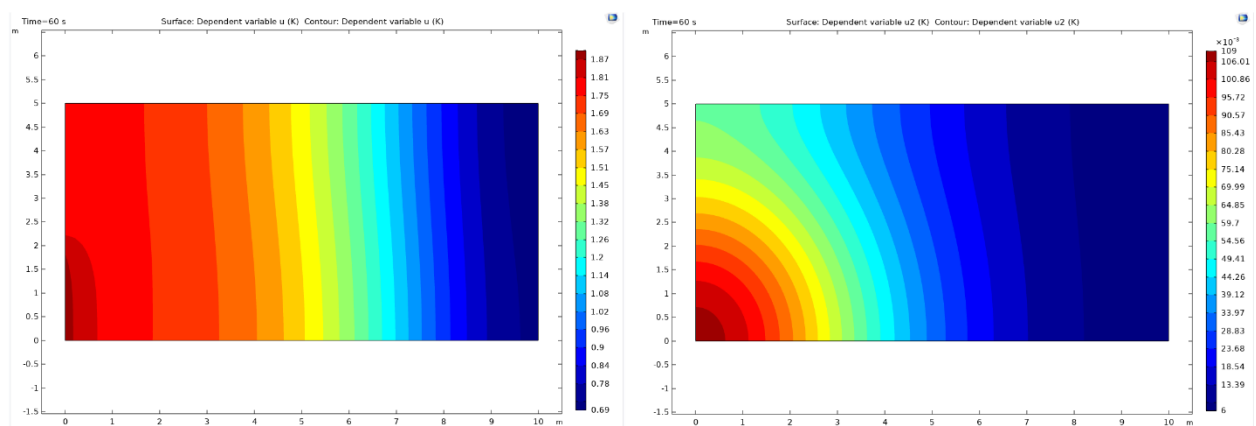
*a**б*

Рис. 16. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 60$

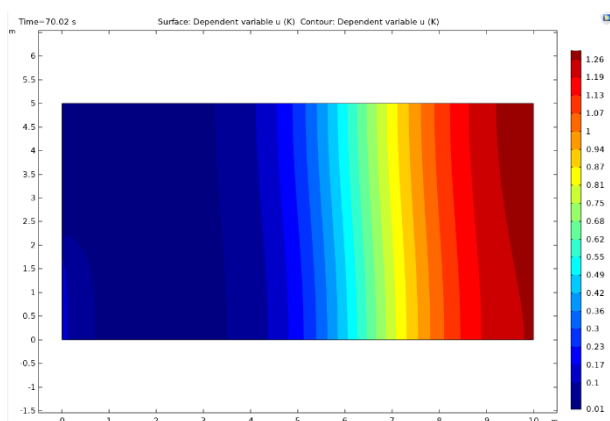
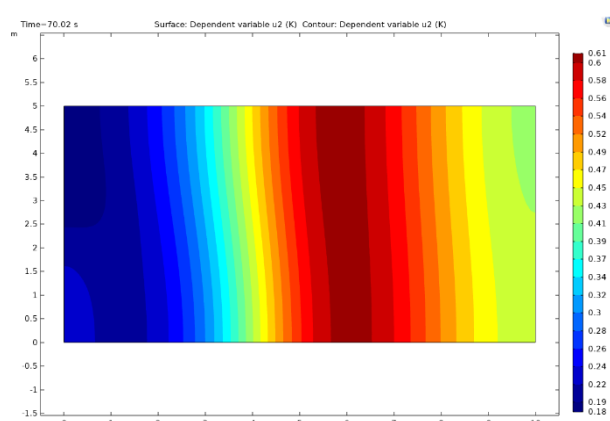
*a**б*

Рис. 17. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 70,02$

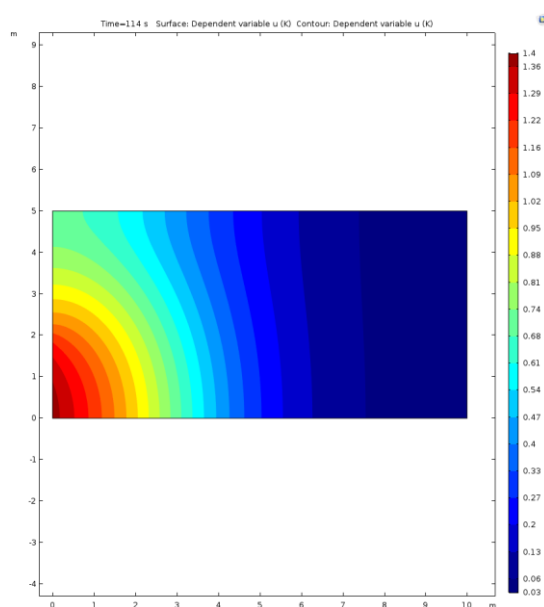
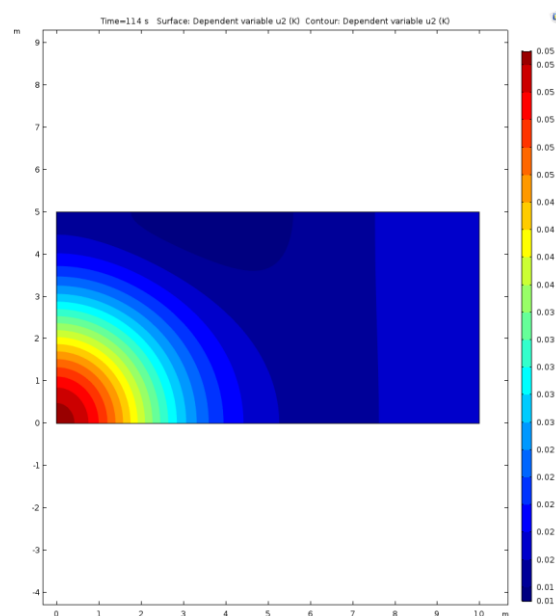
*a**б*

Рис. 18. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 114$ с.

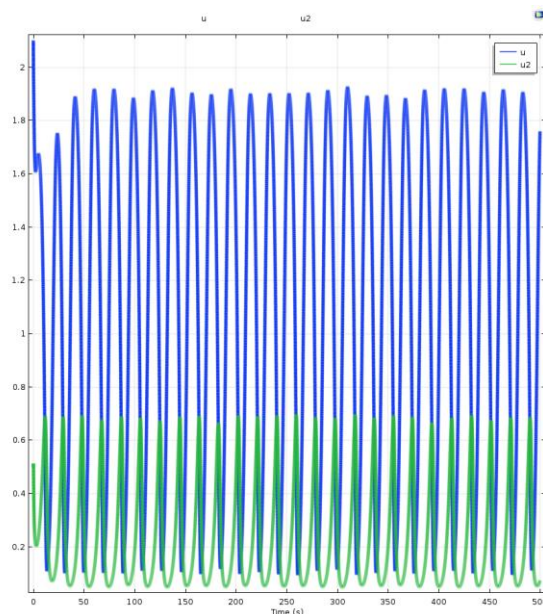
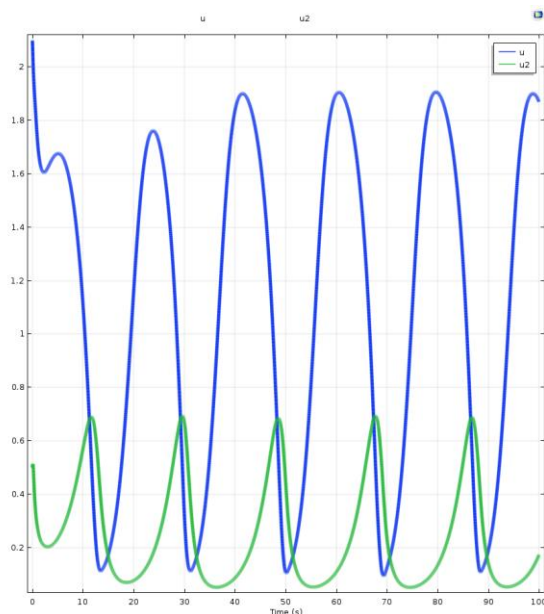


Рис. 19. Графік розв'язку системи $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ в точці з координатами $(x, y) = (0; 0)$.

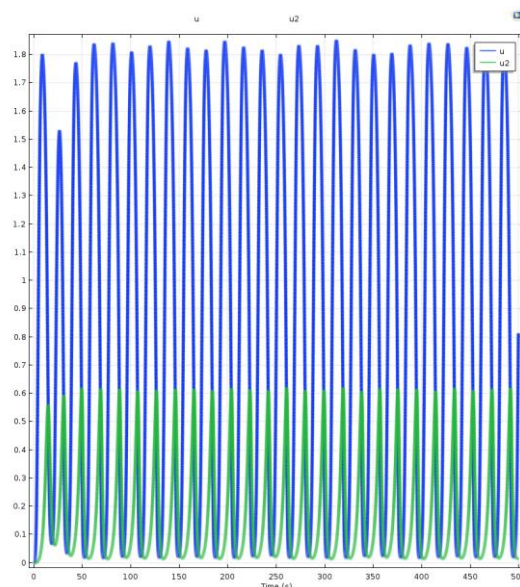
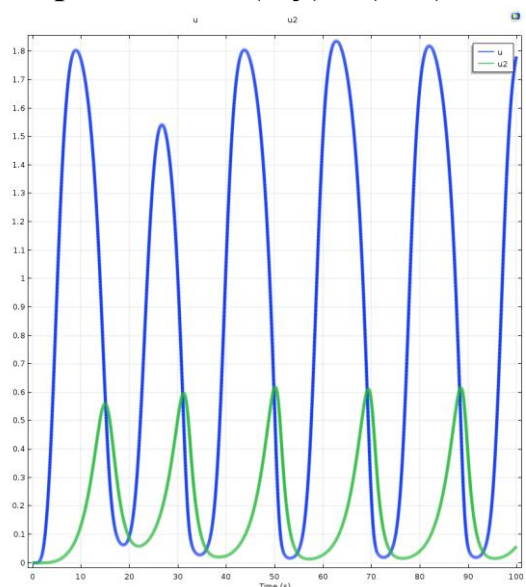


Рис. 20. Графік розв'язку системи $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ в точці з координатами $(x, y) = (5; 2,5)$.

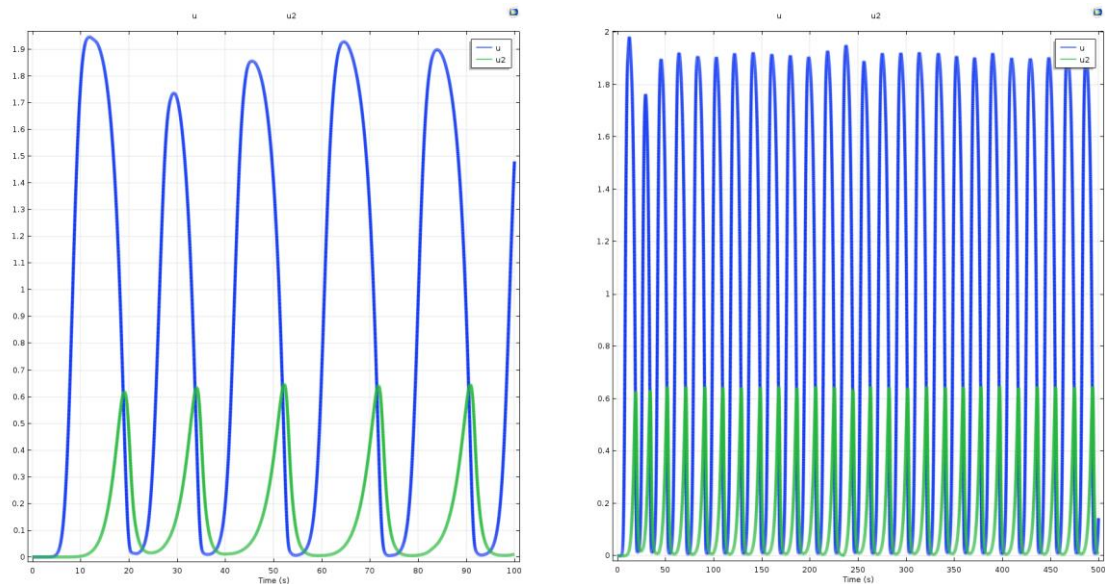


Рис. 21. Графік розв'язку системи $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ в точці з координатами $(x, y) = (10; 5)$.

майже періодичний режим, коливання густоти чисельності видів в різних точках області G відбувається із зсувом по часі та із різною амплітудою.

Як впливає з картин розподілу густоти чисельності видів (рис. 10-18) в області G і з графіків розподілу чисельності видів вздовж діагоналі OA ($O(0;0)$, $A(10;5)$) області G , розподіл чисельності видів є неоднорідним протягом всього часу їх взаємодії.

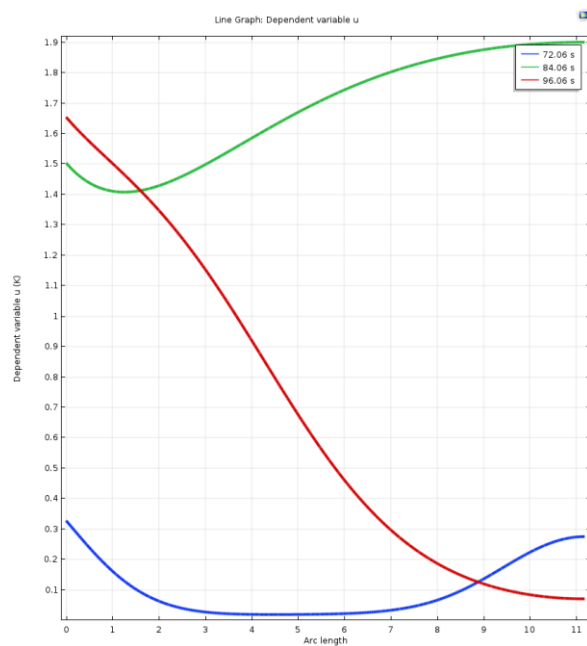
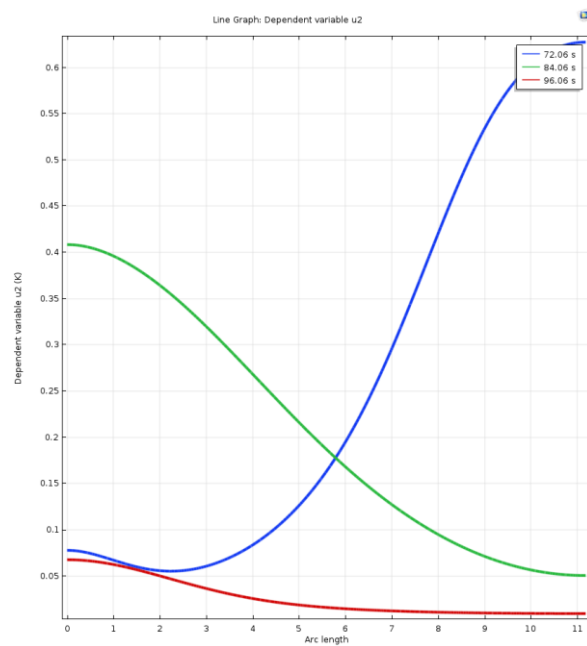
*a**б*

Рис. 22. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) вздовж діагоналі OA ($O(0;0)$, $A(10;5)$) області G в різні моменти часу.

6.2. Моделювання просторово-часової взаємодії двох видів із суттєво нелінійною здатністю їх до міграції.

Нижче наведено ілюстрації чисельного розв'язку математичної моделі просторово-часової взаємодії двох видів типу «жертва-хижак» із суттєво нелінійною здатністю їх до міграції. Така здатність до міграції проявляється в умовах дії факторів, що спричиняють виникнення популяційних хвиль [13]. В цьому випадку коефіцієнти дифузії можуть бути степеневими функціями

$$D_1(u) = A_1 u^{n_1}, \quad D_2(v) = A_2 v^{n_2}, \quad (22)$$

де $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $A_1 = A_2 = 1$.

Модель складається із рівнянь (15), (17)-(21) та із виразів для коефіцієнтів дифузії (22).

Нижче на рис. 22 – рис. 30 наведено ілюстрації чисельного розв'язку даної математичної моделі. Видно, що порівняно із випадком постійної здатності видів до міграції, в даному випадку розподіл чисельності видів в області їх проживання є значно більше неоднорідним і має характер рухомих хвиль. Причому, як і в попередньому випадку, після певного часу $t_{\text{мп}}$ від початку взаємодії видів, чисельності видів виходять на майже періодичний режим в кожній точці області G . Однак, як видно із графіків на рис. 31 – 33,

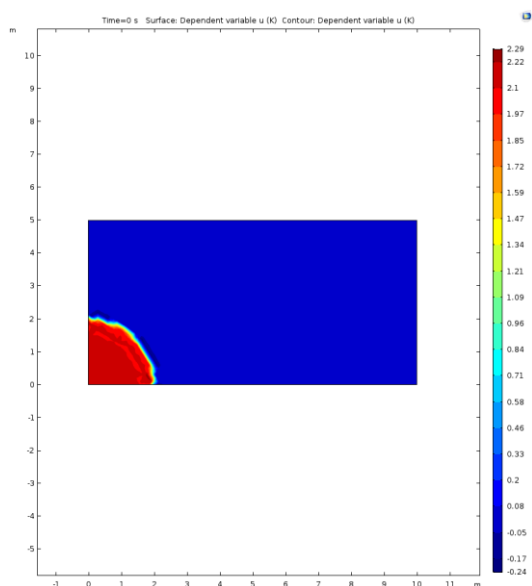
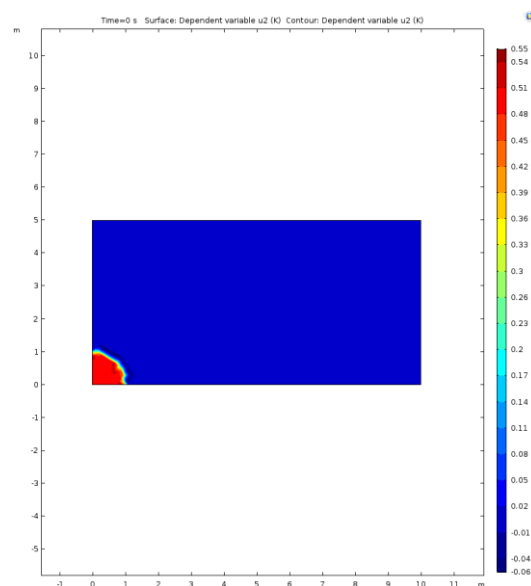
*a**б*

Рис. 23 Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 0$.

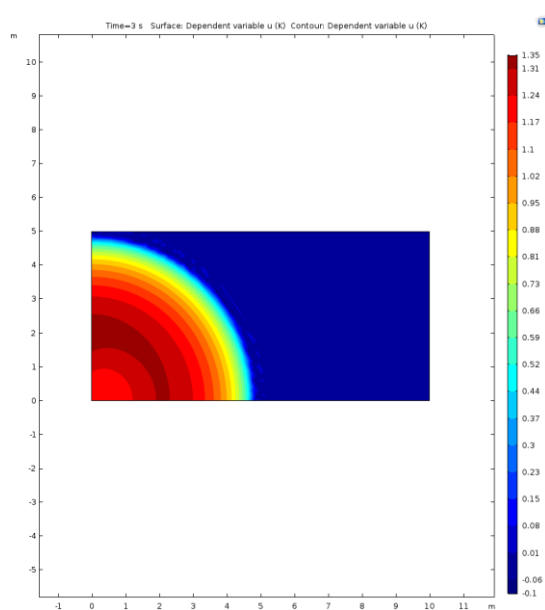
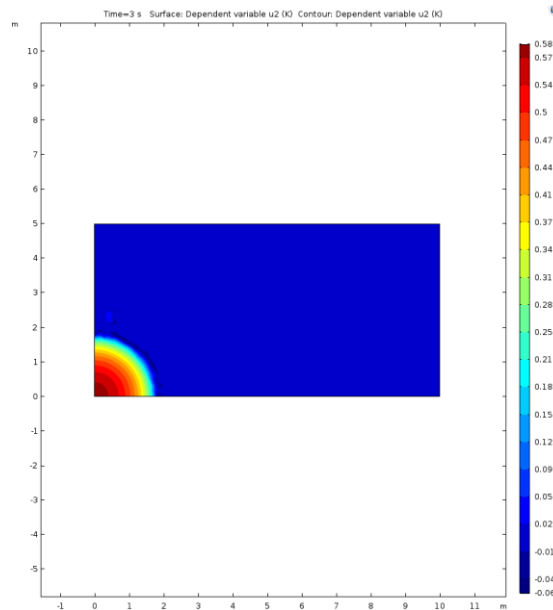
*a**б*

Рис. 24. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 3$

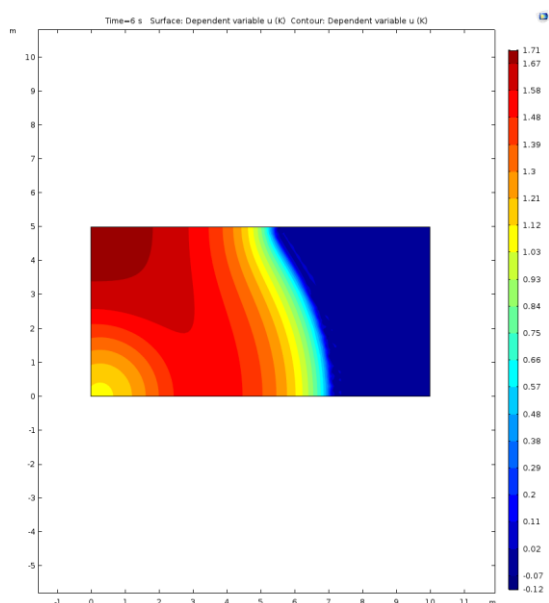
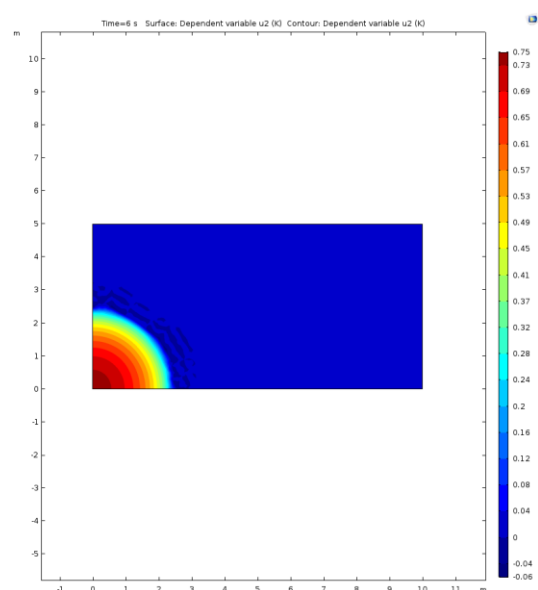
*a**б*

Рис. 25. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 6$.

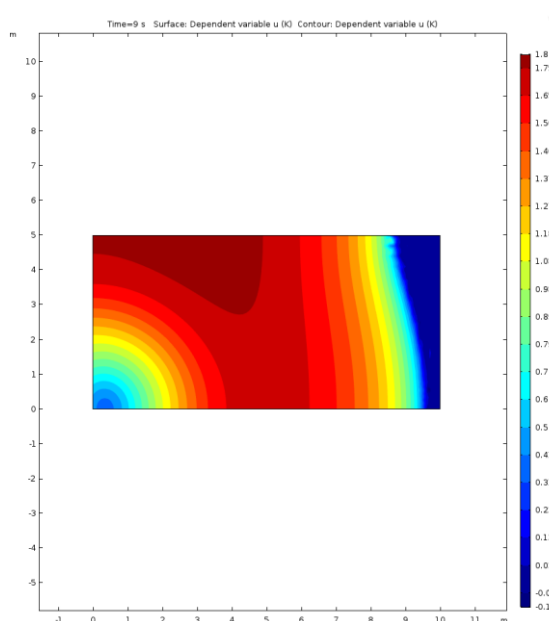
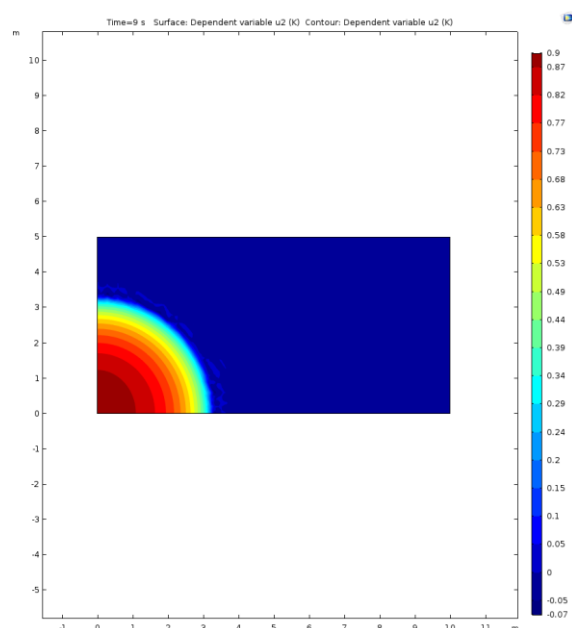
*a**б*

Рис. 26. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 9$.

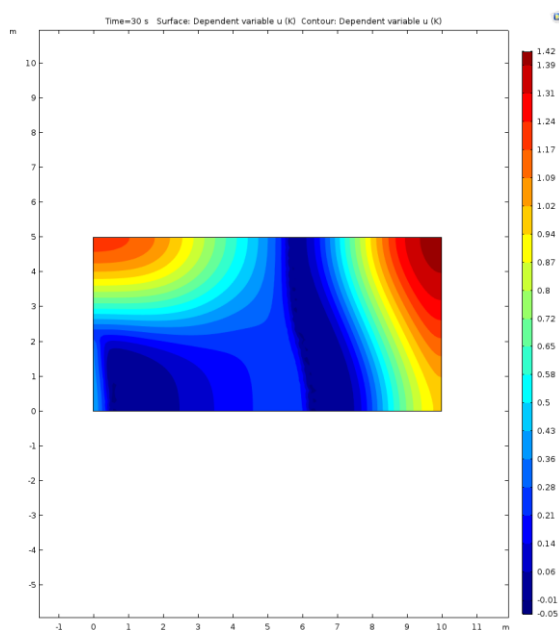
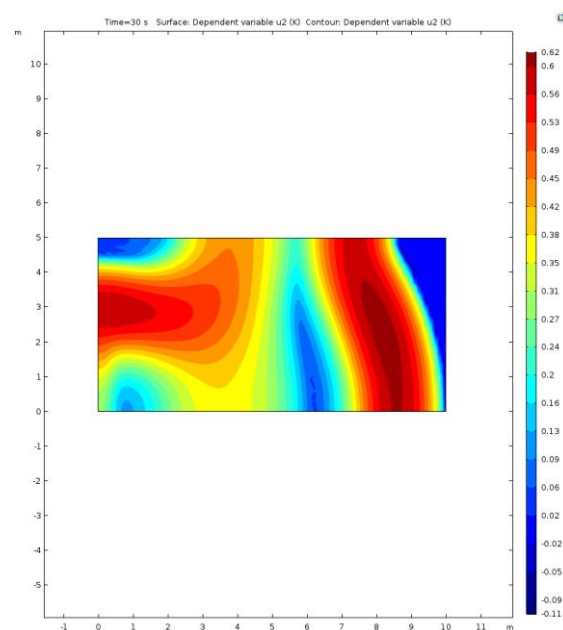
*a**б*

Рис. 27. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 30$.

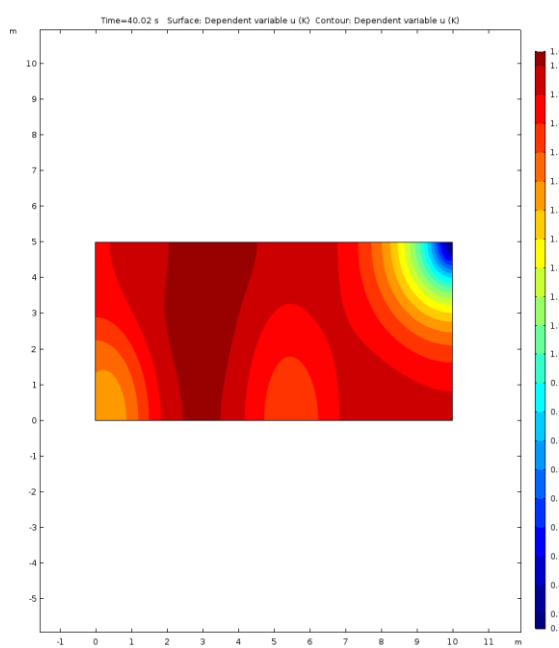
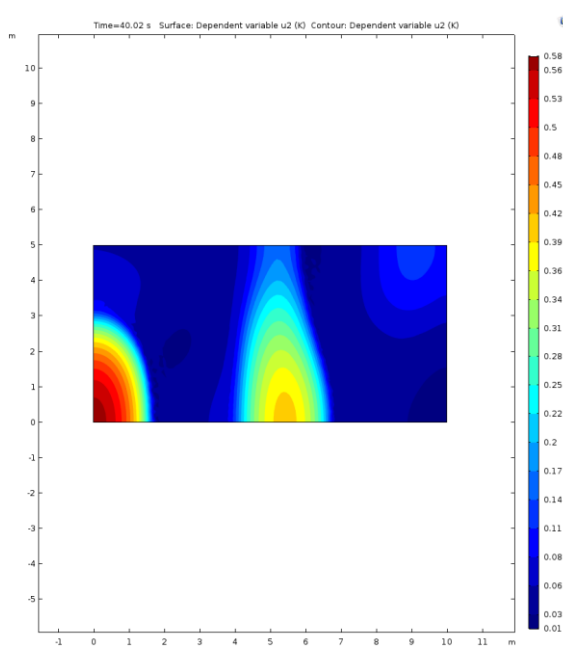
*a**б*

Рис. 28. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (*a*) і виду «хижака» (*б*) в момент часу $t = 40,02$.

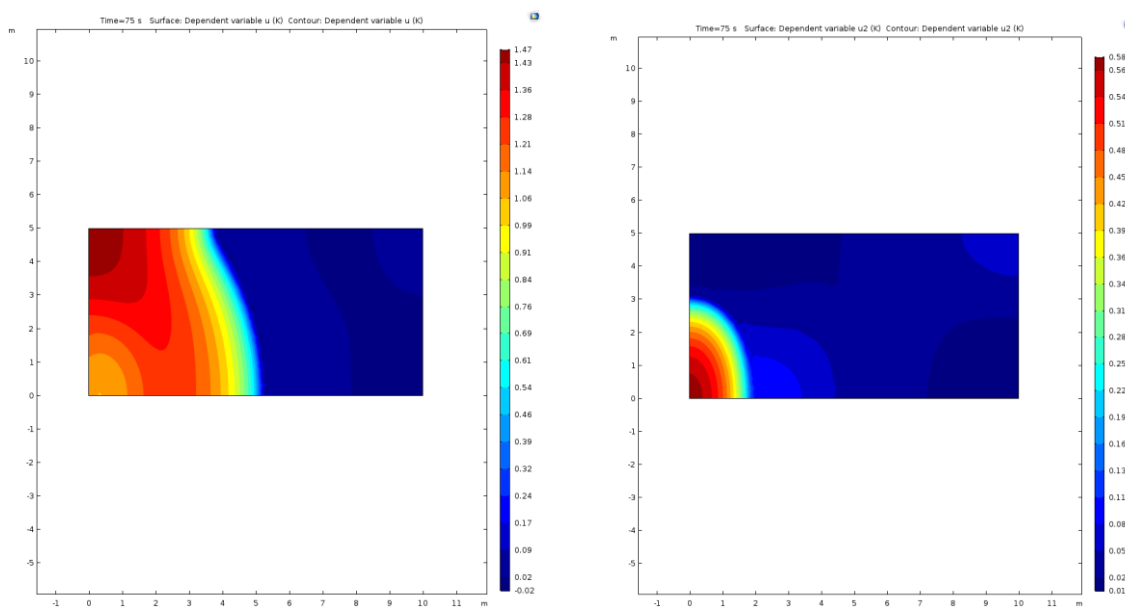
*a**б*

Рис. 29. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (а) і виду «хижака» (б) в момент часу $t = 75$.

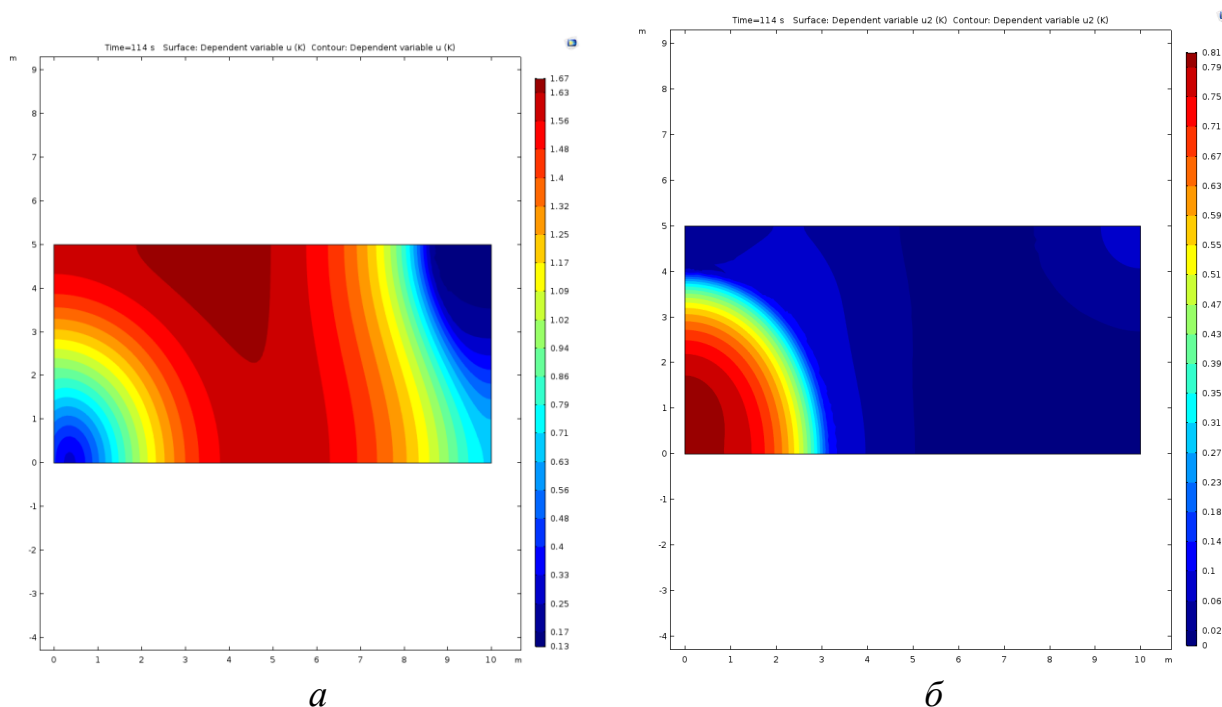
*a**б*

Рис. 30. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (а) і виду «хижака» (б) в момент часу $t = 114$.

при нелінійній здатності видів до міграції, величина $t_{\text{мп}}$ є значно більша – майже в 4 рази ($t_{\text{мп}} \approx 200$), порівняно із випадком постійної здатності видів до міграції. Як і в попередньому випадку, при виході розв’язку на майже періодичний режим, коливання в часі розв’язку в кожній точці області G відбувається із зсувом у часі і певною амплітудою.

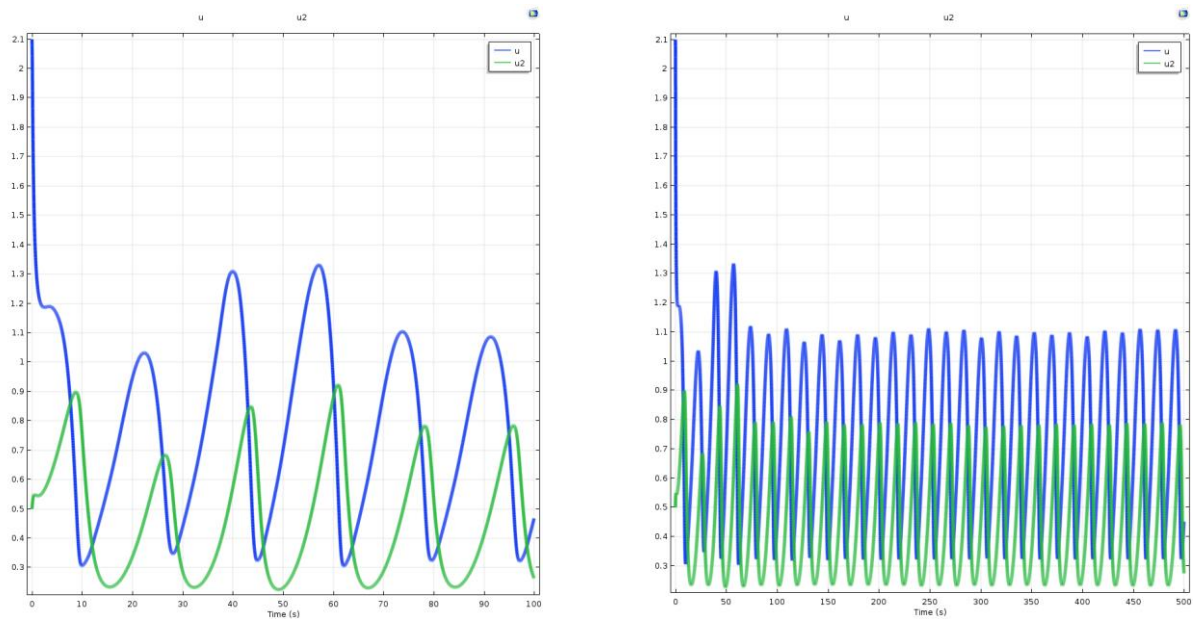


Рис. 31. Графік розв’язку ($u(0;0; t)$, $v(0;0; t)$) системи в точці з координатами (0;0)

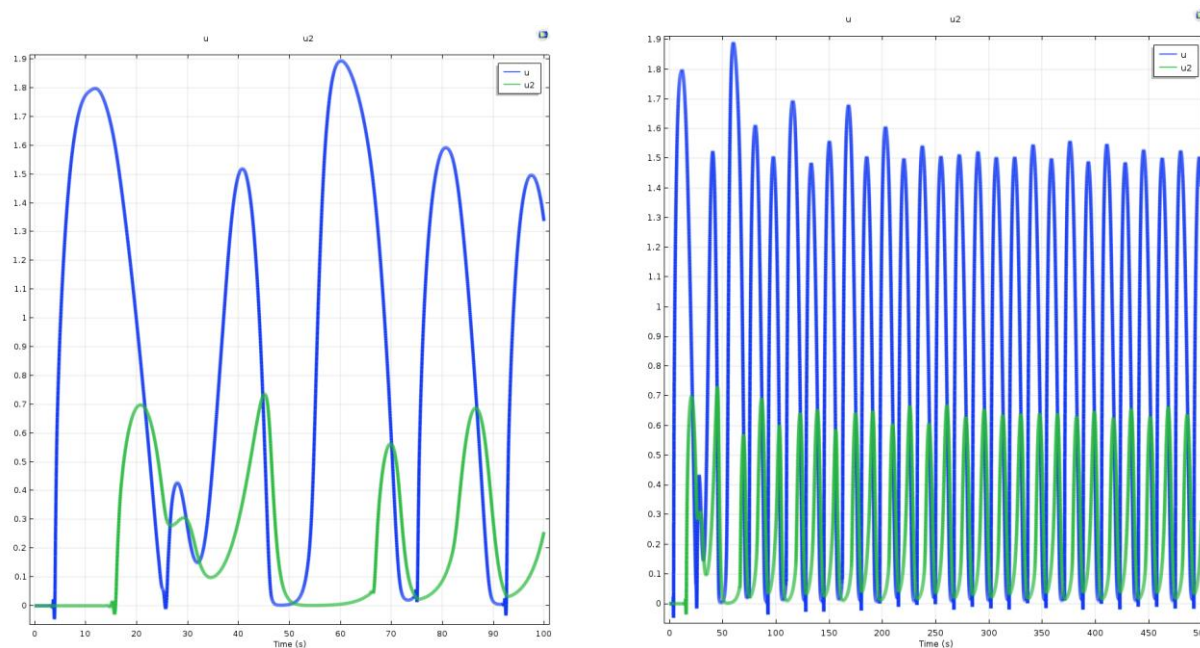


Рис. 32. Графік розв'язку системи $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ в точці з координатами $(x, y) = (5; 2,5)$.

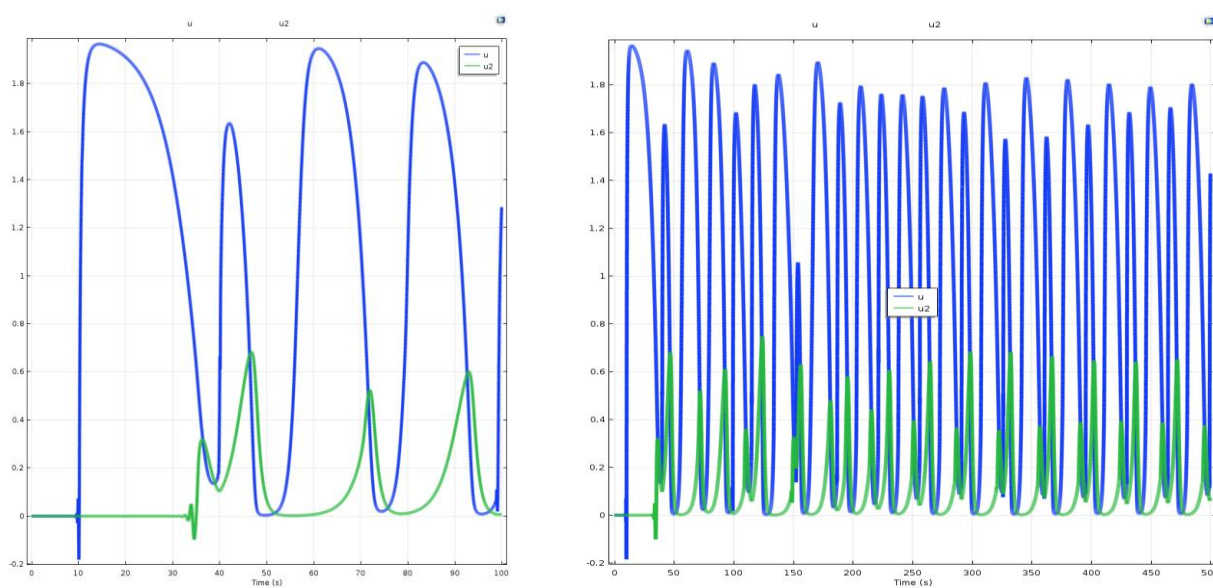


Рис. 33. Графік розв'язку $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ системи в точці з координатами $(x,y)=(10; 5)$.

Нижче на рис. 34 наведені графіки розв'язків моделі вздовж діагоналі області G від початку координат до точки з координатами (l_x, l_y) в різні моменти часу.

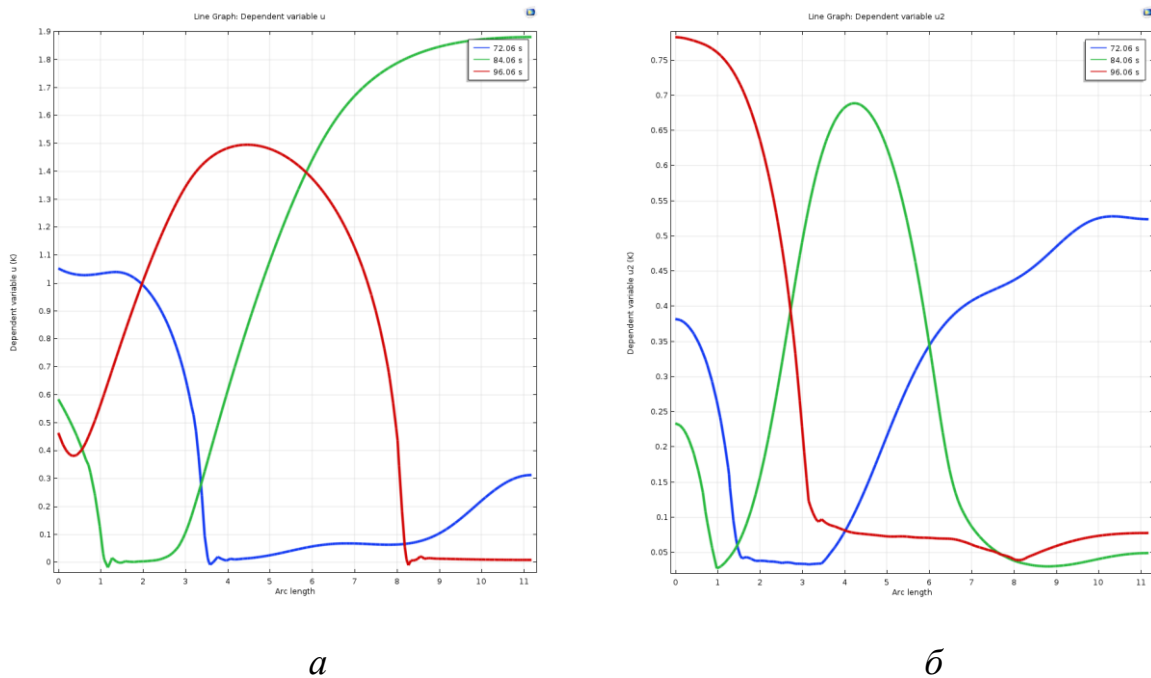


Рис. 34. Розподіл густоти чисельності виду «жертви» (а) і виду «хижака» (б) вздовж діагоналі OA ($O(0;0)$, $A(10;5)$) області G в різні моменти часу.

Видно, що розподіл густоти чисельності видів є суттєво неоднорідним і має характер рухомої хвилі густоти видів. Очевидно, що на такий характер розв'язку впливає нелінійна здатність видів до міграції. Порівняно із випадком постійної здатності видів до міграції (рис. 22), нелінійна здатність видів до міграції приводить до якісно іншого розподілу їх густоти чисельності на ареалі їх поширення.

Висновки

Побудовано математичну модель просторово-часової взаємодії видів з урахуванням різного типу здатності їх до міграції. Розроблено комп'ютерну програму в середовищі COMSOL для чисельного розв'язання моделі.

Отримано чисельні розв'язки моделі для двох різних випадків здатності видів до міграції: 1) із постійною здатністю видів до міграції і 2) із нелінійною відносно чисельності виду здатністю до міграції. Показано, що у другому випадку час виходу розв'язку на майже періодичний режим в 4 рази більший порівняно із першим випадком, а розподіл густоти чисельності видів по області їх існування у другому випадку значно більший, ніж у першому. Розроблену модель та комп'ютерну програму можна використовувати для прогнозування просторово-часової взаємодії біологічних видів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Прибыткова И. М. Основы демографии. Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Ирина Михайловна Прибыткова., 1995.
2. Прибыткова И. М. Социология: теория, методы, маркетинг / Ирина Михайловна Прибыткова., 1999.
3. Hille B. Ionic channels of excitable membranes., 1992.
4. Imoto K. Ion channels: molecular basis of ion selectivity., 1993.
5. Фатеев К. Я. Миграции зверей / Константин Яковлевич Фатеев., 1969.
6. Gwinner E. Optimal Bird Migration: The Relative Importance of Time, Energy, and Safety / Eberhard Gwinner., 1982.
7. The consequences of climate-driven stop-over sites changes on migration schedules and fitness of Arctic geese [Електронний ресурс]. – 2008. – Режим доступу до ресурсу: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2656.2008.01381.x>.
8. Britton N. F. Essential Mathematical Biology. - Springer-Verlag London Limited, 2003. – 335 p.
9. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition). – N.Y., Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 551 p.
10. Базыкин А. Д. Биофизика взаимодействующих популяций, М., Наука, 1985. – 181 с.
11. Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. - 1972. - Вып. 25. - С. 100–106.
12. Murray J.D. Mathematical Biology. II. An Introduction (Third Edition). – N.Y., Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 551 p.
13. Белотелов Н. В., Лобанов А. И. Популяционные модели с нелинейной диффузией. // МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. – 1997. – Т.9. - 12. – С. 43 – 56.

14. Faustino Sanchez-Gardufio and Victor F. Brena-Medina Spatio-temporal dynamics of a three interacting species mathematical model inspired in physics // Biological Physics, Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics. - 2008. - №3. - C. 115-132.