

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ДИНАМІЧНИЙ ХАОС: СИМУЛЯЦІЯ, СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ»**

Виконала: студентка 4-го року
навчання

освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Харченко Олександра Сергіївна

Керівник: Щестюк Н.Ю.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
кафедри математики

Рецензент: Івасюк Д.Я.
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

« ____ » _____ 20 ____ р.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., д.ф.-м.н.
Б. В. Олійник

_____ (підпис)
„_____” _____ 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи

студенту 4-го курсу, факультету інформатики Харченко Олександрі Сергіївні
Тема: «Динамічний хаос: симуляція, статистичний аналіз»

План кваліфікаційної роботи:

Індивідуальне завдання

Зміст

Анотація

Вступ

1. Розглянути моделі динамічного хаосу та виконати їх симуляцію;
2. Зробити статистичний аналіз моделей;
3. Порівняти отримані результати з білим шумом

Висновки

Список літератури

Дата видачі „_____” _____ 2021 р. Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Тема: «Динамічний хаос: симуляція, статистичний аналіз»

Календарний план виконання роботи:

№	Назва етапу роботи	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Примітка
1.	Отримання завдання кваліфікаційної роботи.	17.10.2021		
2.	Ознайомлення з темою роботи.	25.10.2021		
3.	Робота з науковою літературою, опрацювання основних означень.	21.11.2021		
4.	Розробка комп'ютерної симуляції моделей, робота над текстовим оформленням перших двох розділів.	01.03.2022		
5.	Дослідження кореляційної структури кожної хаотичної моделі.	01.04.2022		
6.	Порівняння властивостей розглянутих хаотичних систем і "білого шуму". Робота над текстовим оформленням третього розділу роботи.	01.05.2022		
7.	Створення слайдів для презентації та написання презентації.	01.06.2022		
8.	Аналіз отриманих результатів з керівником, та попередній захист кваліфікаційної роботи.	14.06.2022		
9.	Корегування роботи за результатами попереднього захисту.	20.06.2022		
10.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.07.2022		

Студент _____

Керівник _____

“ _____ ”

ЗМІСТ

Анотація.....	5
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. Моделі динамічного хаосу.....	8
1.1 Математичний хаос.....	8
1.2 Нелінійні хаотичні моделі.....	9
РОЗДІЛ 2. Опис і симуляція хаотичних моделей.....	11
2.1 Логістичне відображення.....	11
А. Симуляція.....	11
Б. Статистичний аналіз моделі.....	16
2.2 Модель Бернуллі.....	20
А. Симуляція.....	20
Б. Статистичний аналіз моделі.....	22
2.3 Палатне відображення.....	25
А. Симуляція.....	25
Б. Статистичний аналіз моделі.....	28
2.4 Відображення корня.....	31
А. Симуляція.....	31
Б. Статистичний аналіз моделі.....	32
РОЗДІЛ 3. Порівняння з білим шумом.....	36
3.1 Симуляція білого шуму.....	36
3.2 Порівняння моделей з білим шумом.....	38
ВИСНОВКИ.....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	42

Анотація

Кваліфікаційну роботу присвячено огляду нелінійних хаотичних моделей. За допомогою комп'ютерної симуляції демонструється залежність поведінки таких систем від початкових значень параметрів. До кожної моделі застосовується описова та вивідна статистика, а також досліджується їхня кореляційна структура. Після цього здійснюється порівняння властивостей розглянутих хаотичних систем та “білого шуму”.

Ключові слова: нелінійні хаотичні моделі, білий шум.

ВСТУП

Велика кількість нетривіальних систем реального світу є нелінійними динамічними моделями. Одним з типів нелінійних динамічних систем є хаотичні системи. Вони можуть дотримуватися простих правил та містити малу кількість взаємодіючих частин, але такі системи є чутливими до своїх початкових умов. Попри свою детерміновану простоту, ці системи з часом можуть мати дуже непередбачувану поведінку. Детермінований хаос спостерігається в біології, фізиці, а також у різних економічних та фінансових процесах.

Метою дослідження є розглянути моделі динамічного хаосу, зробити їх статистичний аналіз та порівняти отримані результати з білим шумом.

Дана мета зумовила наступне наукове завдання:

1. Зробити симуляцію хаотичних моделей.
2. Виконати описову та вивідну статистику.
3. Зробити симуляцію білого шуму.
4. Порівняти хаотичні моделі з білим шумом.

Об'єктом дослідження є нелінійні хаотичні моделі.

Предметом дослідження є хаос у динамічних моделях.

Для поставленої в роботі мети використано методи візуалізації даних та статистичні методи.

Дана робота складається з трьох розділів. Матеріал 1-го та 2-го розділу спирається на дослідження Ширяєва [1, 216-222]. Всі моделі та їх візуалізація

розроблені в Python. Код до кожної з моделей можна переглянути у додатку до роботи.

РОЗДІЛ 1. Моделі динамічного хаосу

1.1 Математичний хаос

Перед тим як дати строге визначення математичного хаосу розглянемо деякі означення, які потрібні будуть у майбутньому.

Означення 1.1. Функція $f: J \rightarrow J$ називається топологічно транзитивною, якщо для $\forall U, V$ – відкритих підмножин J , $\exists k > 0: f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ [2, 49]

Означення 1.2. Функція $f: J \rightarrow J$ має чутливість до початкових умов, якщо $\exists \delta > 0: \forall x \in J, \forall U_r(x), \exists y \in U_r(x) \text{ і } n \geq 0: |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ [2, 49]

Означення 1.3. Точка x є фіксованою для f , якщо $f(x) = x$. Точка x називається періодичною з періодом n , якщо $f^n(x) = x$ [2, 18]

Існує багато можливих визначень хаосу в динамічних системах деякі сильніші або слабші за наше. Ми обрали наступне означення, оскільки його можна застосовувати до великої кількості прикладів.

Означення 1.4. Нехай V – множина. Функція $f: V \rightarrow V$ називається хаотичною на V , якщо [2, ст. 50]:

- 1) f має чутливу залежність до початкових умов.
- 2) f топологічно транзитивна.
- 3) періодичні точки щільні в V , тобто кожна відкрита множина містить періодичну точку.

1.2 Нелінійні хаотичні моделі

Досі для опису еволюції послідовностей $h = (h_n)$, де $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ та S_n – значення "ціни" в момент часу n , ми користувалися гіпотезою, що ці величини мають стохастичну природу, тобто $S_n = S_n(w)$, $h_n = h_n(w)$ будуть випадковими величинами. Вони задані на деякому ймовірнісному просторі, що моделюють статистичну невизначеність станів "природи" [1, 216].

З іншого боку відомо, що навіть найпростіші нелінійні детерміновані системи типу

$$x_{n+1} = f(x_n; \lambda) \text{ або } x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}; \lambda),$$

де λ – деякий параметр, можуть породжувати послідовності (x_0, x_1, \dots) , поведінка яких доволі схожа з поведінкою стохастичних послідовностей (при відповідних умовах).

Ця обставина ставить питання про те, чи не є деякі економічні чи фінансові ряди насправді не стохастичні, а хаотичні. Тобто це ті, що описуються детермінованими нелінійними системами, які можуть призводити до ефектів, що спостерігаються при статистичному аналізі фінансових даних. Протягом тривалого часу уявлення про хаос асоціювалось з припущенням, що в системі необхідно збудження великої кількості ступенів свободи [3, 989]. Це припущення сформулювалося під впливом понять статистичної механіки – рух кожної частинки в газі майже передбачуваний, але поведінка системи, що складається з величезної кількості частинок, надзвичайно складна і тому деталізований динамічний підхід втрачає сенс. Звідси виникає потреба в статистичному аналізі. Дії та справедливність застосування статистичних законів, не обмежуються лише складними системами з великою кількістю

ступенів свободи. Повністю детермінованим системам з невеликим числом ступенів свободи також притаманна випадкова поведінка. Це відбувається при появі параметрів експоненційної нестійкості руху при деяких значеннях, а не через зовнішній шум або складність системи. Динаміка систем, що викликана такого роду нестійкістю, називається динамічною стохастичністю або динамічний хаосом. Значення досліджень в цій сфері грають фундаментальну роль і показують природу випадкових процесів [3, 990].

Наведемо деякі приклади нелінійних хаотичних систем, щоб дати уявлення про їхню поведінку, а також про питання як визначити чи породжена дана реалізація стохастичною чи хаотичною системою.

Для прогнозу майбутньої зміни цін нас цікавить питання наскільки прогнозованими будуть нелінійні хаотичні моделі. У цій роботі буде показано, що ситуація не дуже оптимістична, бо не дивлячись на детермінований характер, поведінка траєкторій хаотичних систем може сильно змінюватися в залежності від точності визначення початкових даних та значень параметра λ [1, 217].

РОЗДІЛ 2. Опис і симуляція хаотичних моделей

2.1 Логістичне відображення

А. Симуляція

Розглянемо так зване логістичне відображення

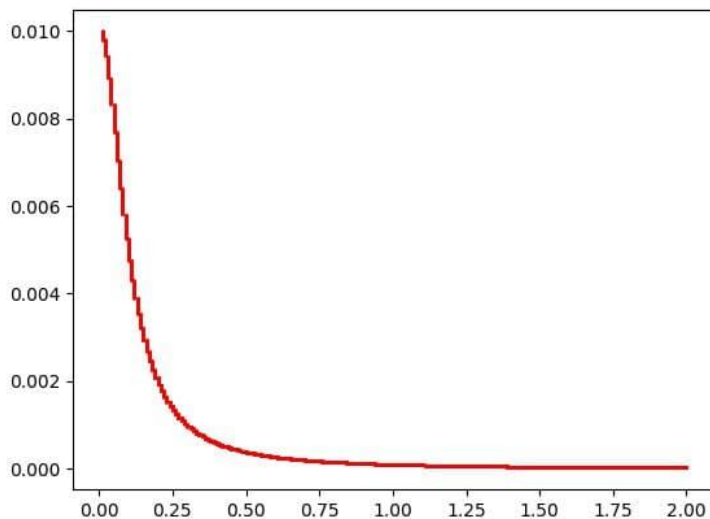
$$x \rightarrow Tx \equiv \lambda x(1 - x)$$

і породжену ним нелінійну динамічну систему

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad n \geq 1, \quad 0 < x_0 < 1$$

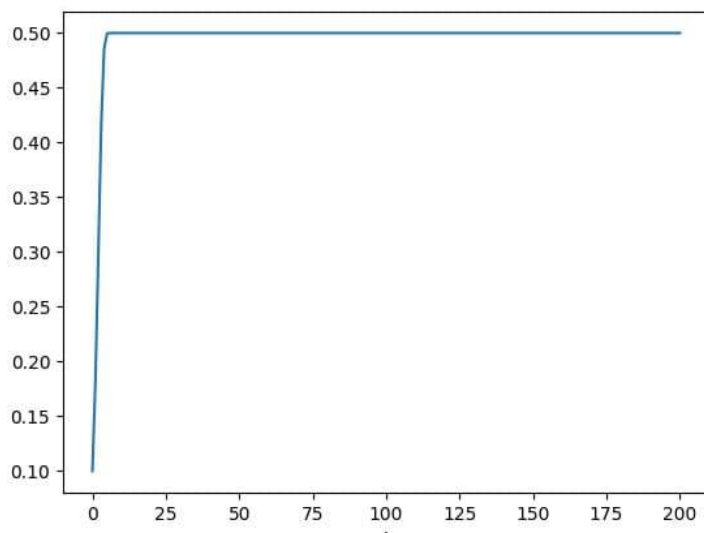
Це відображення було введено для опису еволюції популяцій в середовищі з обмеженим запасом їжі, де x_n – значення відносно чисельності населення в дискретний момент часу t , а λ являє собою швидкість зростання. Рівень популяції в будь-який момент часу є функцією параметра швидкості зростання та рівня населення попереднього часового кроку. Якщо швидкість зростання встановлена занадто низько, то популяція вимре з часом. Більш високі темпи зростання можуть знизитися до стабільного значення або коливатися через низку демографічних підйомів і спадів. [4, 3]

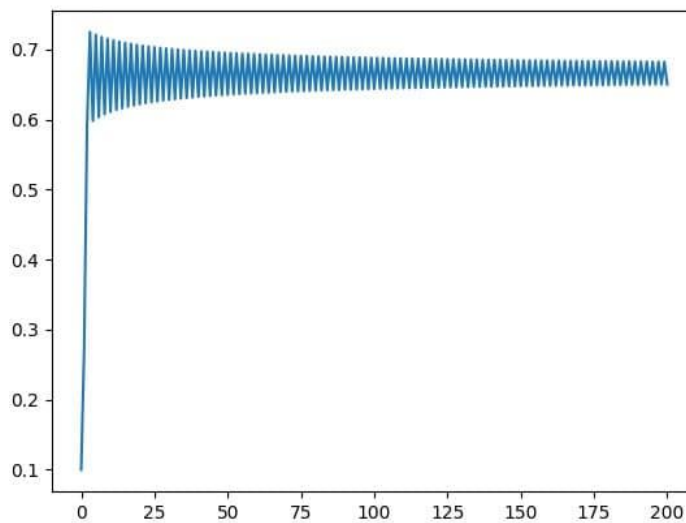
Змоделюємо це відображення в Python, при $\lambda = 1$

Рисунок 1.1 Випадок $\lambda = 1$

Для значень $\lambda \leq 1$ рішення $x_n = x_n(\lambda)$ збігається до 0, при $n \rightarrow \infty$ при всіх $0 < x_0 < 1$. Тому стан $x_\infty = 0$ можна розглядати як єдиний стійкий стан, до якого збігаються всі значення x_n при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо випадки при $\lambda = 2; 3; 3.5; 4$

Рисунок 1.2 Випадок при $\lambda = 2$

Рисунок 1.3 Випадок при $\lambda = 3$

При $\lambda = 2$ значення x_n збігаються до $\frac{1}{2}$ (рис. 1.2). Таким чином, у цьому випадку також існує єдиний стійкий стан - $x_\infty = \frac{1}{2}$. До нього "притягуються" й інші значення x_n , при $n \rightarrow \infty$. Будемо збільшувати значення параметра λ . При $\lambda < 3$ у системи все ще буде залишатися один стійкий стан. Однак, при $\lambda = 3$ виникає інша закономірність. При збільшенні n виникають два стани стійкості x_∞ (рис. 1.3), в яких позмінно знаходиться система. Такий же характер поведінки системи залишатиметься при збільшенні параметра λ . Потім при $\lambda = 3.4494$ з'являється чотири стани стійкості, за яким відбувається рух в системі (рис. 1.4)

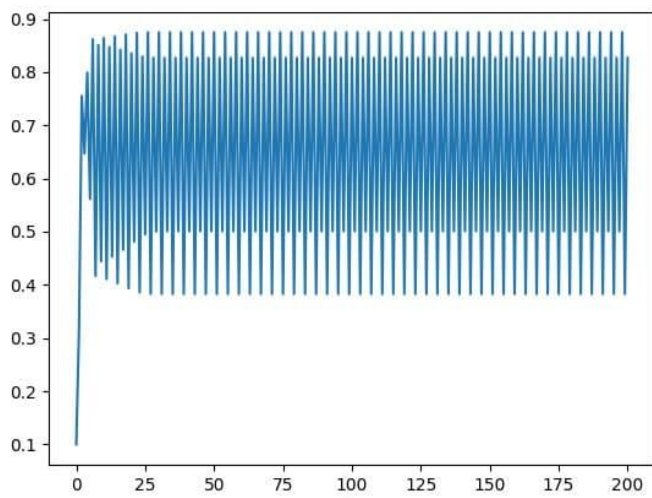


Рисунок 1.4 Випадок при $\lambda = 3.5$

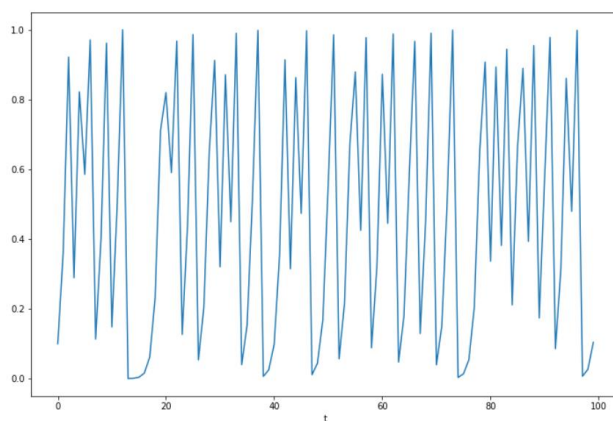


Рисунок 1.5 Випадок при $\lambda = 4, N = 100$

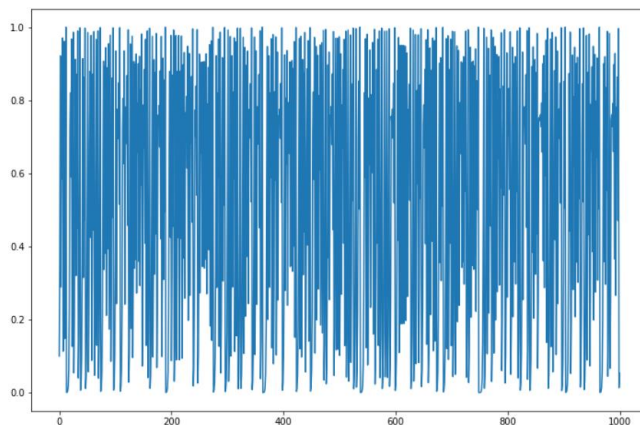


Рисунок 1.6 Випадок при $\lambda = 4, N = 1000$

При збільшенні λ у системи з'являються нові стани стійкості: при $\lambda = 3.5644$ цих станів 16, при $\lambda = 3.5696$ їх вже 64. При $\lambda = 3.6$ спостерігаємо нескінченну кількість станів. Це означає, що система втрачає стійкість і переходить у стан хаосу. При цьому повністю зникає періодичний характер зміни станів і система починає блукати по нескінченному числу станів, перестрибуючи з одного стану на інший. Попри те, що система є детермінованою, неможливо практично передбачити, де вона знаходитиметься у деякий момент часу, оскільки точність значень x_n і λ обмежена і може доволі сильно вплинути на значення прогнозованих величин.

З короткого опису бачимо, що значення (λ_k) параметра λ , де відбувається "біфуркація" або "розгалуження" системи, стає все ближче і ближче один до одного.

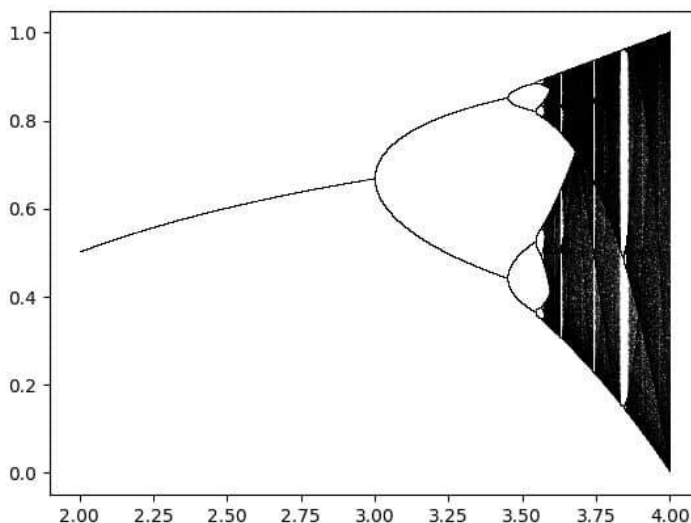


Рис. 1.7 Біфуркаційна діаграма, де швидкість зростання λ коливається між 0 та 4

При швидкості зростання менше 1.0 система завжди руйнується в кінцевому випадку (популяція вимирає). При λ , що знаходиться між 1.0 і 3.0 система завжди встановлює точний рівень популяції. На вертикальному зрізі швидкості зростання після 3.0 можливі значення популяції розщеплюються на

два дискретні шляхи. При швидкості зростання 3.2 система коливається виключно між двома значеннями сукупності: одне близько 0.8, а інше близько 0.5. Після швидкості зростання 3.4 діаграма знову розпадається на чотири шляхи. Це відповідає лінійній діаграмі рис. 1.4, яку було описано раніше, де $\lambda = 3.5$. Відразу після швидкості зростання 3.5 шлях знову роздвоюється на вісім шляхів. За межами швидкості зростання 3.6 біфуркації наростають, доки система в підсумку не обере будь-яку величину населення. Це поняття відоме як подвоєння періоду хаосу. При коригуванні параметра швидкості, логістичне відображення коливатиметься між двома, чотирма, вісьма, 16-ма, а потім 32 (і так далі) значеннями сукупності. До того часу, коли досягається темп зростання 3.9, відображення роздвоїється настільки багато разів, що система у такому випадку "випадково" стрибатиме між усіма значеннями сукупності. Але цей рух буде зовсім не випадковим, а скоріш ця модель дотримується простих детермінованих правил, але при цьому створює очевидну випадковість. Це хаос детермінований і аперіодичний [4, 5].

Параметр $\lambda = 4$ для моделі грає важливу роль. При цьому значенні послідовність спостережень хаотичної послідовності x_n нагадує реалізацію стохастичної послідовності білого шуму (див. у розділі 3).

Б. Статистичний аналіз моделі

Виконаємо описову статистику для випадків при $N = 100$ та $N = 1000$. За допомогою функції `describe` бібліотеки `Pandas` нескладно знайти, що для $N = 100$ математичне сподівання $EX = 0.47$, $EX^2 = 0.354$, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 0.363$, дисперсія $DX = 0.1318$

```

count      100.000000
mean       0.472191
std        0.363065
min        0.000246
25%       0.123123
50%       0.433293
75%       0.874090
max        0.999938
dtype: float64
D(x): 0.13181593463516586
Ex^2: 0.3534621910177524
Skewness: 0.20079394002021983
Kurtosis -1.5033329192818115

```

Рис 2.1 $N = 100$

```

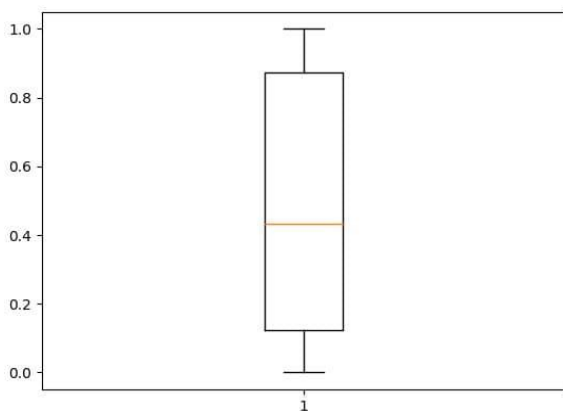
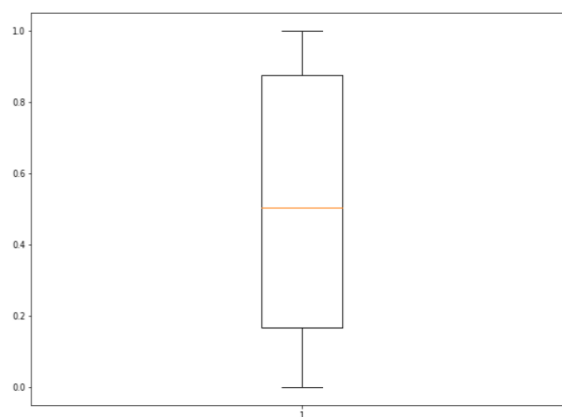
count      1000.000000
mean       0.510949
std        0.349629
min        0.000009
25%       0.167981
50%       0.504319
75%       0.875951
max        0.999998
dtype: float64
D(x): 0.12224021275023486
Ex^2: 0.3831864189555957
Skewness: -0.01296127438622872
Kurtosis -1.4922639308634014

```

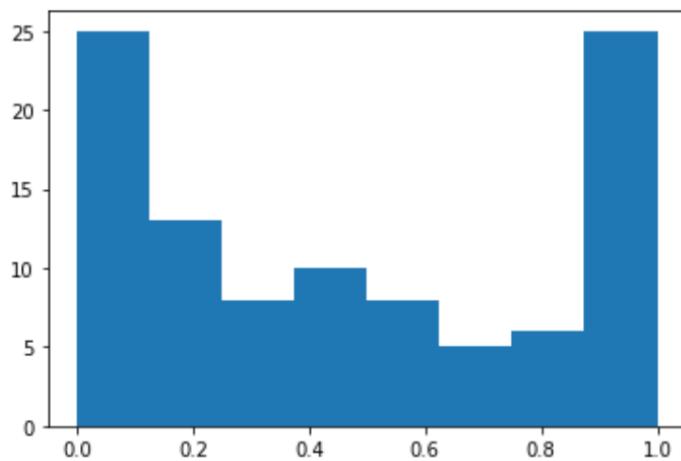
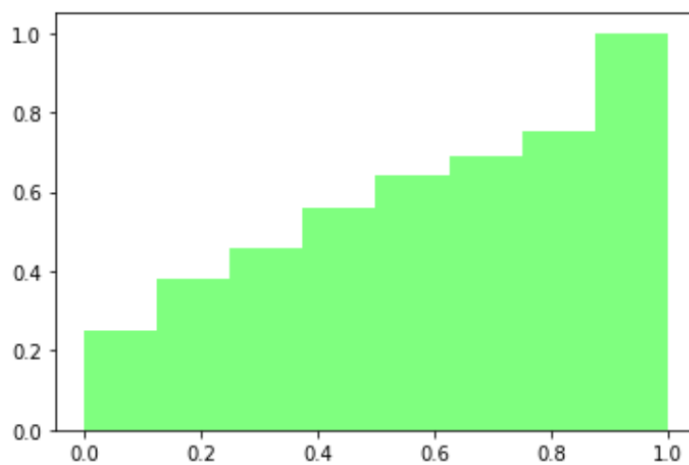
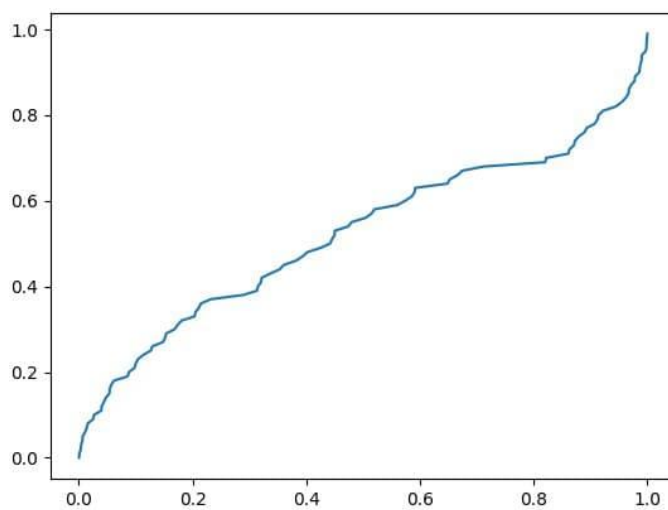
Рис 2.2 $N = 1000$

При $N = 100$ коефіцієнт асиметрії додатний. Це означає, що розподіл має довгий правий хвіст. При $N = 1000$ коефіцієнт асиметрії від'ємний – розподіл має довгий лівий хвіст. В обох випадках коефіцієнт ексцесу < 3 , отже пік розподілу пологіший, ніж у нормального – розподіл плосковершинний.

Побудуємо також коробку з вусами для обох випадків, гістограму, кумулятивну функцію та криву при $N = 100$

Рис. 2.3 Коробка з вусами, $N = 100$ Рис. 2.4 Коробка з вусами, $N = 1000$

З рисунку 2.3 бачимо, що 50% значень попадають в проміжок (0.123; 0.874), а з рис. 2.4 50% значень попадають в проміжок (0.168; 0.876).

Рисунок 2.5 Гістограма при $N = 100$ Рисунок 2.6 Емпірична функція розподілу при $N = 100$ Рис. 2.7 Кумулятивна крива емпіричної функцію розподілу при $N = 100$

Виконаємо в Python тест Шапіро-Вілка, D'Agostino's K^2 та Пірсона χ^2 -квадрат на нормальність розподілу при $N = 100$

```
from scipy.stats import shapiro
stat, p = shapiro(proba)

stat W=0.882, p=0.000
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 2.8 Результати тесту Шапіро-Вілка

```
import scipy.stats
k2, p = scipy.stats.normaltest(proba)

stat K_2=194.206, p=0.000
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 2.9 Результати тесту D'Agostino's K^2

```
from scipy.stats import chisquare
Statistics_Xi_2, p=chisquare(proba)

stat Xi_2=27.637, p=1.000
The null hypothesis cannot be rejected. Probably Gaussian
```

Рисунок 2.10 Результати тесту Пірсона χ^2 -квадрат

Оскільки $pvalue < 0.05$ у тесті Шапіро-Вілка та D'Agostino's K^2 , ми відкидаємо нульову гіпотезу про нормальність розподілу. Два з трьох тестів показали, що розподіл не є нормальним.

З гістограми (рис 2.3) можна зробити припущення про те, що розподіл бімодальний оскільки у центрі низька частота попадання і є два піки з обох боків інтервалу.

2.2 Модель Бернуллі

А. Симуляція

Це найвідоміше відображення на одиничному інтервалі, що пов'язане з представленням числа у вигляді дроби з довільною цілою основою [5, 28]. Модель Бернуллі задана одновимірним рекурентним відображенням, що має вигляд (рис 3.1) $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} =$

$$= \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n < 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2$$

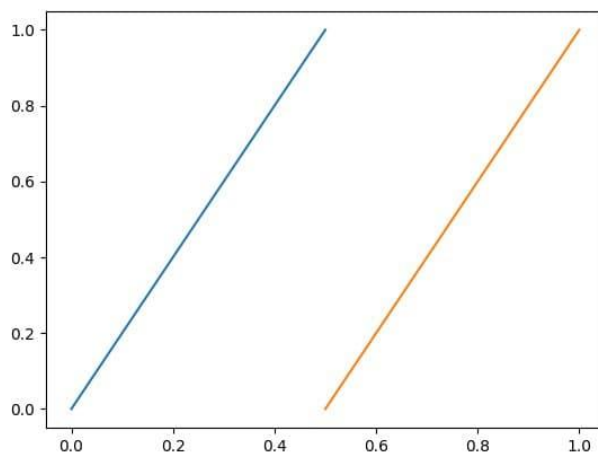
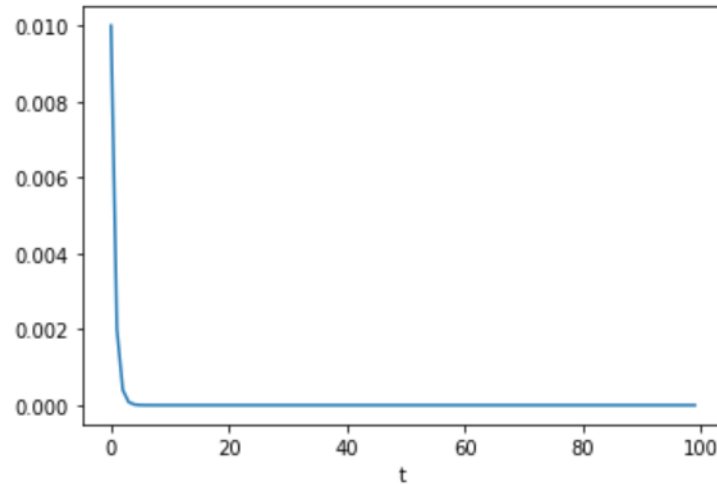


Рисунок 3.1

Загальний вигляд функції:

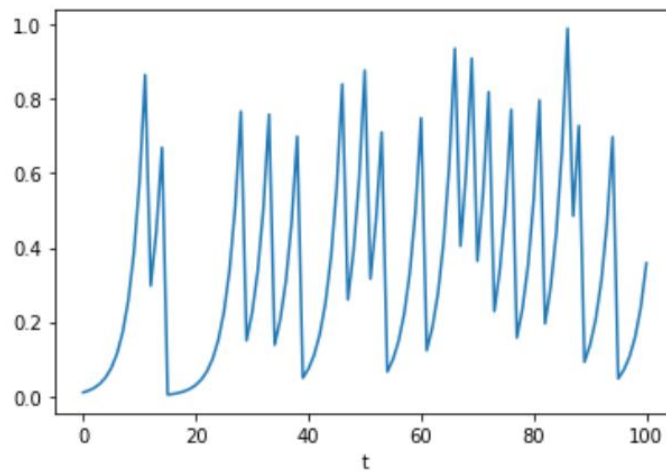
$$x_n = \begin{cases} rx_n & x_n < 1/2 \\ rx_n - 1 & 1/2 \leq x_n \end{cases}$$

Змоделюємо це відображення в Python, при $r = 1$

Рисунок 3.2 Випадок при $r = 1$

Для значень $r \leq 1$ рішення $x_n = x_n(r)$ збігається до 0, при $n \rightarrow \infty$ при всіх $0 < x_0 < 1$. Тому стан $x_\infty = 0$ можна розглядати як єдиний стійкий стан, до якого збігаються всі значення x_n при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо випадки при $r = 1.5, 2$

Рисунок 3.3 Випадок при $r = 1.5$ при $N = 100$

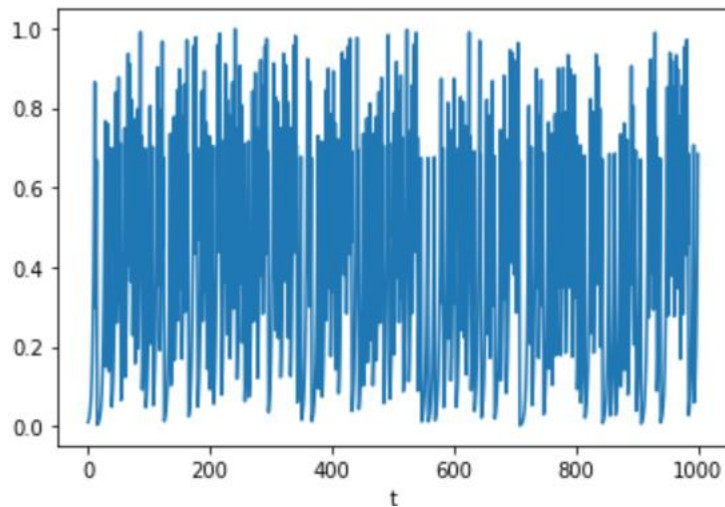


Рисунок 3.4 Випадок при $r = 1.5$ при $N = 1000$

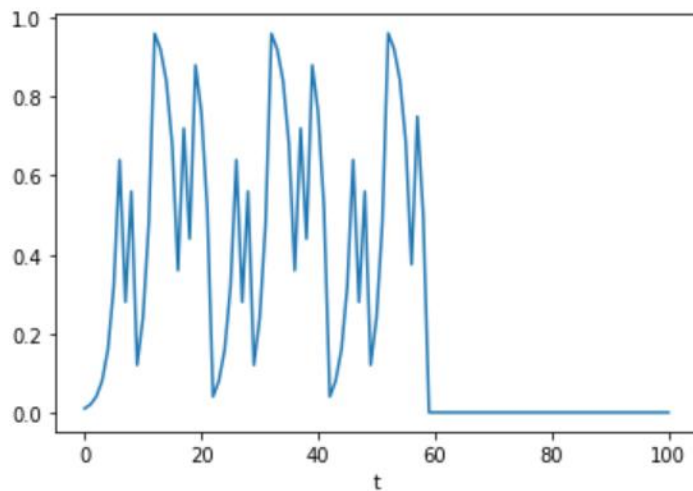


Рисунок 3.5 Випадок при $r = 2$

Бачимо, що при $r \in (1; 2]$ система втрачає стійкість і переходить у стан хаосу.

Б. Статистичний аналіз моделі

Виконаємо описову статистику при $r = 1.5$ для $N = 100$ та $N = 1000$. При $N = 100$ математичне сподівання $EX = 0.35$, $EX^2 = 0.19$, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 0.267$, дисперсія $DX = 0.07$.

```

count    100.000000
mean     0.346958
std      0.267205
min      0.003939
25%     0.120932
50%     0.295428
75%     0.518659
max      0.990201
dtype: float64
D(x) 0.07139852353114169
Ex^2: 0.19106457898921564
Skewness: 0.6175951548267933
Kurtosis -0.6786395434583348

```

Рис 4.1 $N = 100$

```

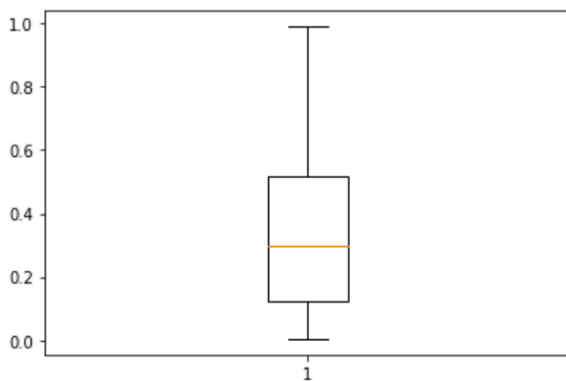
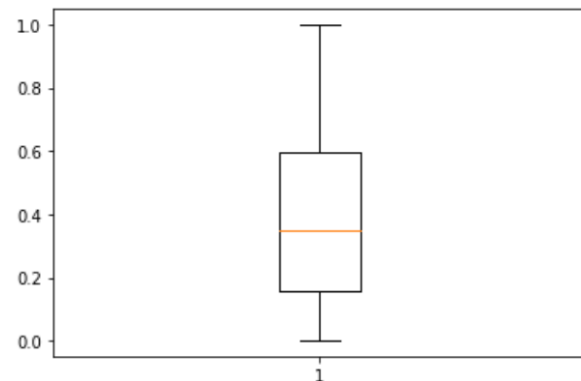
count    1000.000000
mean     0.391348
std      0.272153
min      0.001839
25%     0.156961
50%     0.349451
75%     0.598398
max      0.998301
dtype: float64
D(x) 0.07406704226584818
Ex^2: 0.22714645281636084
Skewness: 0.46505887562600395
Kurtosis -0.8426814533495133

```

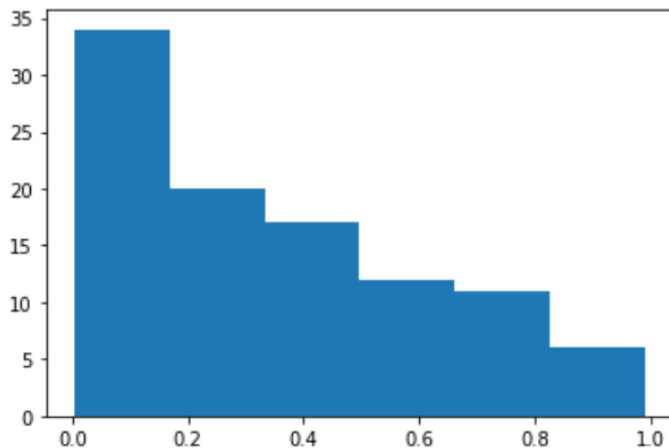
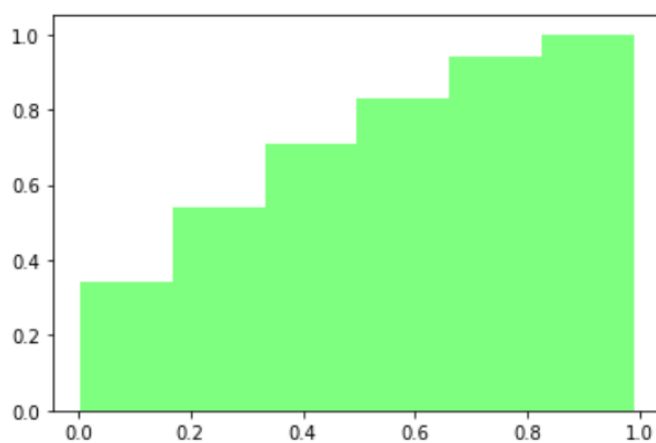
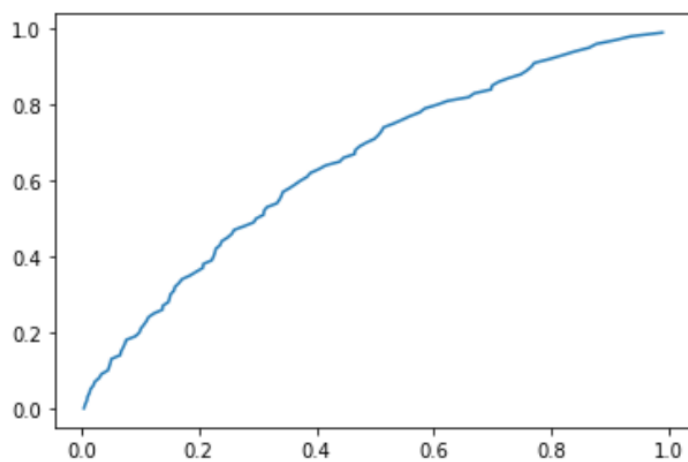
Рис 4.2 $N = 1000$

В обох випадках коефіцієнт асиметрії додатний і це означає, що розподіл має довгий правий хвіст. Оскільки коефіцієнт ексцесу < 3 , то пік розподілу пологіший, ніж у нормального – розподіл плосковершинний.

Побудуємо коробку з вусами для обох випадків, гістограму, кумулятивну функцію та криву при $N = 100$.

Рис 4.3 Коробка з вусами при $N = 100$ Рис 4.4 Коробка з вусами при $N = 1000$

З рисунку 4.3 бачимо, що 50% значень попадають у проміжок (0.12; 0.52), а з рис. 4.4 50% значень попадають у проміжок (0.16; 0.6).

Рисунок 4.5 Гістограма при $N = 100$ Рисунок 4.6 Емпірична функція розподілу при $N = 100$ Рис. 4.7 Кумулятивна крива емпіричної функцію розподілу при $N = 100$

Виконаємо тест Шапіро-Вілка, D'Agostino's K^2 та Пірсона Хі-квадрат на нормальність розподілу при $N = 100$

```
from scipy.stats import shapiro
stat, p = shapiro(proba1)

stat W=0.929, p=0.000
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 4.8 Результати тесту Шапіро-Вілка

```
import scipy.stats
k2, p = scipy.stats.normaltest(proba1)

stat K_2=9.856, p=0.007
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 4.9 Результати тесту D'Agostino's K^2

```
from scipy.stats import chisquare
Statistics_Xi_2, p=chisquare(proba1)

stat Xi_2=20.373, p=1.000
The null hypothesis cannot be rejected. Probably Gaussian
```

Рисунок 4.10 Результати тесту Пірсона χ^2 квадрат

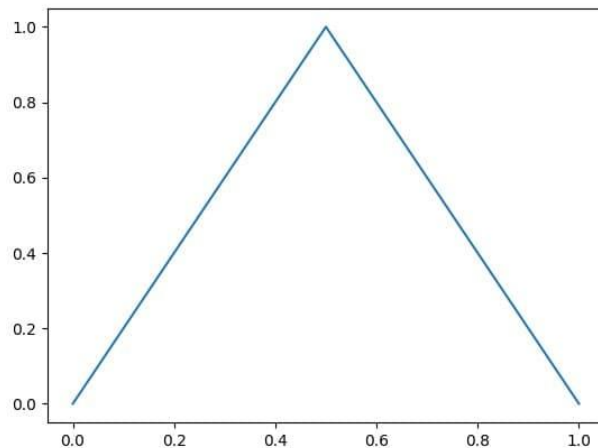
Оскільки $pvalue < 0.05$ у тесті Шапіро-Вілка та D'Agostino's K^2 , ми відкидаємо нульову гіпотезу про нормальність розподілу. Два з трьох тестів показали, що розподіл не є нормальним.

2.3 Палатне відображення

А. Симуляція

Палатне перетворення (tent map) – це одне з найбільш значущих та експлуатованих в теорії одновимірне хаотичне зображення. Ця модель має вигляд $x_n = 1 - |1 - 2x_{n-1}|$, що можна записати у вигляді системи:

$$x_n = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n < 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2$$

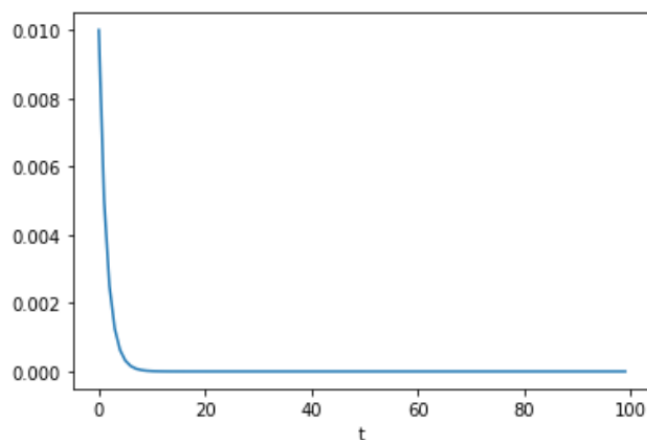
Рисунок 5.1 Графік моделі *tent map*

Узагальнена модель має вигляд:

$$x_n = \begin{cases} rx_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ r - rx_n, & 1/2 \leq x_n < 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2$$

Залежно від значення r змінюється поведінка моделі від передбачуваної до непередбачуваної.

Змоделюємо це відображення в Python, при $r = 0.5$

Рисунок 5.2 Модель 3 при $r = 0.5$

Для значень $r \leq 1$ рішення $x_n = x_n(r)$ збігається до 0, при $n \rightarrow \infty$ при всіх $0 < x_0 < 1$. Тому стан $x_\infty = 0$ можна розглядати як єдиний стійкий стан, до якого збігаються всі значення x_n при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо випадки при $r = 1.3; 2$

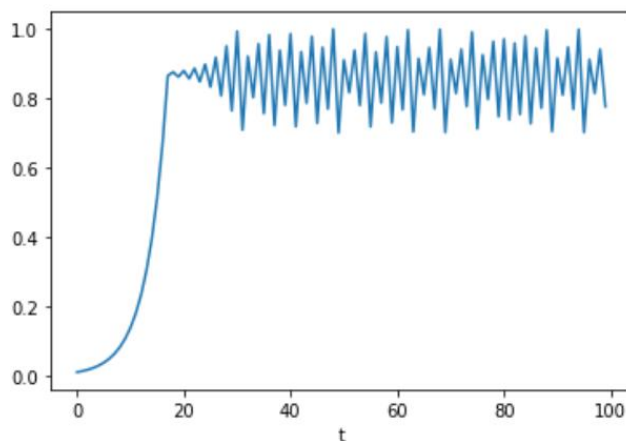


Рисунок 5.3 Модель 2 при $r = 1.3$

При $r = 1.3$ виникають два стани стійкості x_∞ (рис. 5.3), в яких позмінно знаходиться система.

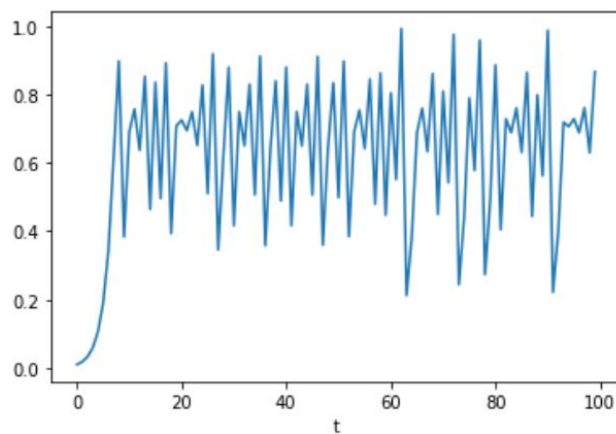
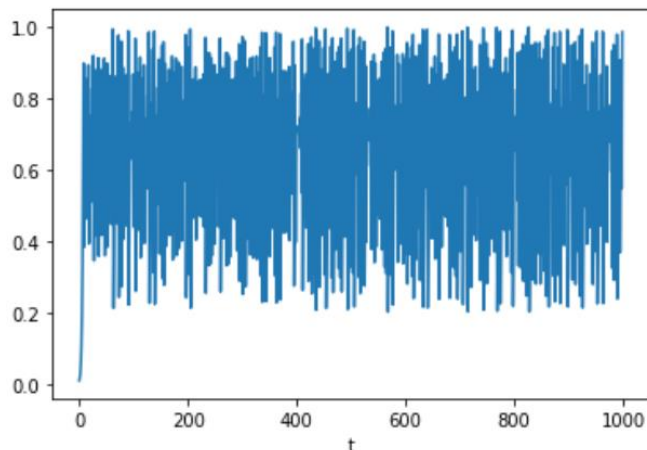


Рисунок 5.4 Модель 2 при $r = 1.8, N = 100$

Рисунок 5.5 Модель 2 при $r = 1.8$, $N = 1000$

З рис. 5.3 – 5.5 бачимо, що при $r \in [1, \sqrt{2}]$ значення моделі є періодичними, а при $r \in [\sqrt{2}, 2]$ періодичність зникає і з'являється хаотична поведінка.

Б. Статистичний аналіз моделі

Виконаємо описову статистику при $r = 1.8$ для $N = 100$ та $N = 1000$. При $N = 100$ математичне сподівання $EX = 0.62$, $EX^2 = 0.44$, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 0.24$, $DX = 0.057$

```
count    100.000000
mean     0.619025
std      0.237820
min      0.010000
25%     0.449247
50%     0.650819
75%     0.814349
max      0.992951
dtype: float64
D(x): 0.05655814514537071
Ex^2: 0.43918500382202397
Skewness: -0.6809800059774053
Kurtosis -0.12391843927875534
```

Рис. 6.1 $N = 100$

```
count    1000.000000
mean     0.635691
std      0.223251
min      0.010000
25%     0.461819
50%     0.655481
75%     0.821606
max      0.998746
dtype: float64
D(x): 0.04984114196653922
Ex^2: 0.4538939917600577
Skewness: -0.2391342156422277
Kurtosis -0.9226042123759055
```

Рис. 6.2 $N = 1000$

Оскільки коефіцієнти асиметрії в обох випадках від'ємні, розподіл має довгий лівий хвіст. Коефіцієнт ексцесу < 3 – розподіл плосковершинний. Побудуємо також коробку з вусами для обох випадків, гістограму, кумулятивну функцію та криву при $N = 100$.

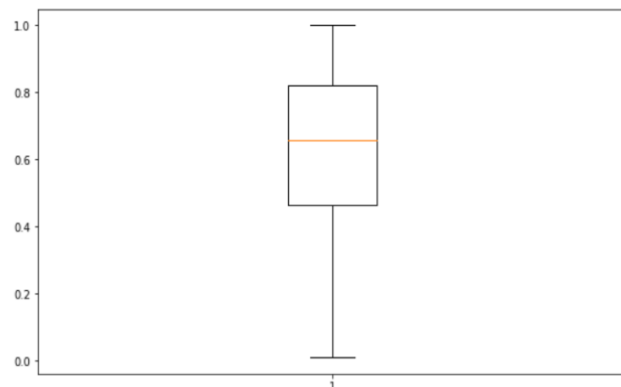
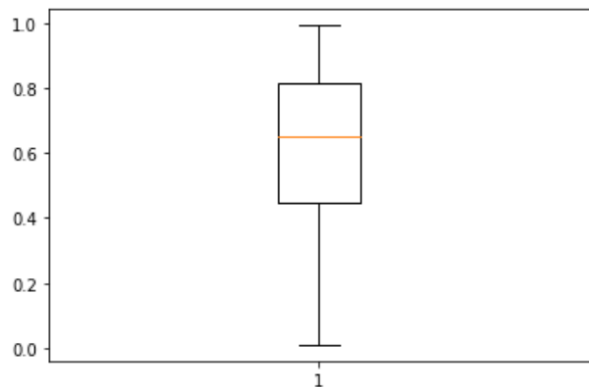


Рис 6.3 Коробка з вусами при $N = 100$

Рис 6.4 Коробка з вусами при $N = 1000$

З рисунку 6.3 бачимо, що 50% значень попадають у проміжок (0.45; 0.81), а з рис. 6.4 50% значень попадають у проміжок (0.46; 0.82).

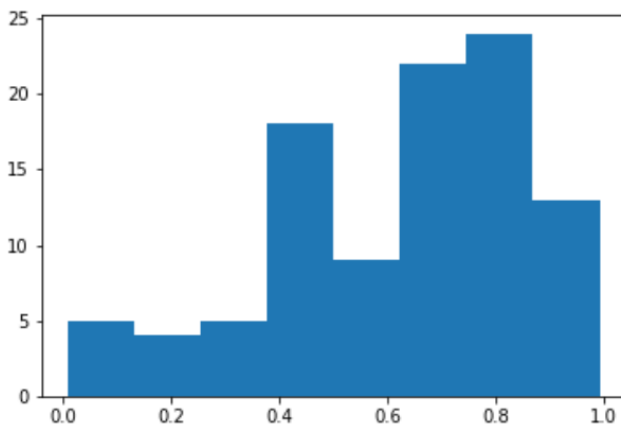


Рисунок 6.5 Гістограма при $N = 100$

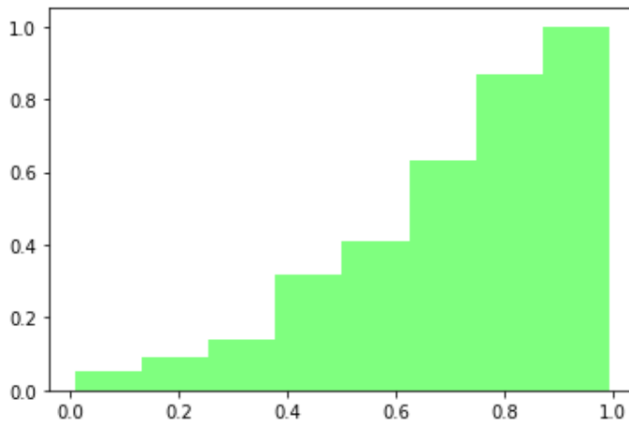


Рисунок 6.6 Емпірична функція розподілу при $N = 100$

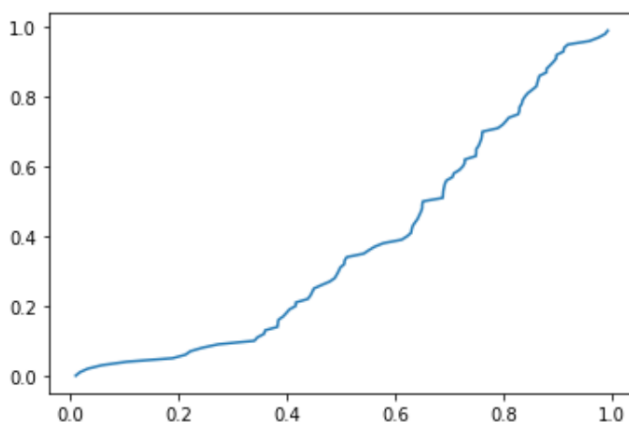


Рис. 6.7 Кумулятивна крива емпіричної функцію розподілу при $N = 100$

Виконаємо тест Шапіро-Вілка, D'Agostino's K^2 та Пірсона Хі-квадрат на нормальність розподілу при $N = 100$.

```
from scipy.stats import shapiro
stat, p = shapiro(proba2)

stat W=0.949, p=0.001
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 6.8 Результат тесту Шапіро-Вілка

```
import scipy.stats
k2, p = scipy.stats.normaltest(proba2)

stat K_2=7.293, p=0.026
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 6.9 Результат тесту D'Agostino's K^2

```

from scipy.stats import chisquare
Statistics_Xi_2, p=chisquare(proba2)

stat Xi_2=9.045, p=1.000
The null hypothesis cannot be rejected. Probably Gaussian

```

Рисунок 6.10 Результат тесту Пірсона Хі-квадрат

Оскільки $pvalue < 0.05$ у тесті Шапіро-Вілка та D'Agostino's K^2 , ми відкидаємо нульову гіпотезу про нормальність розподілу. Два з трьох тестів показали, що розподіл не є нормальним.

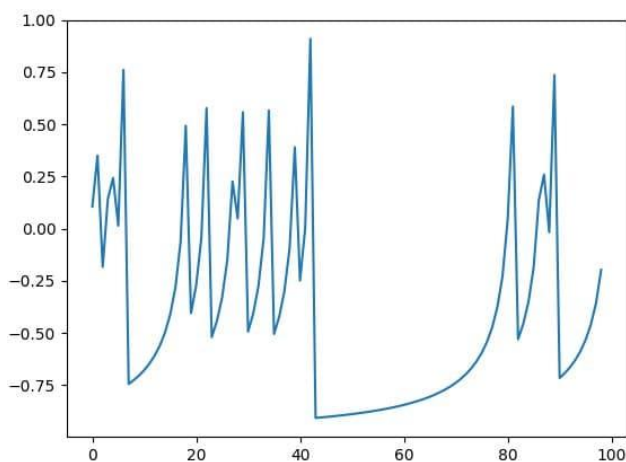
2.4 Відображення корня

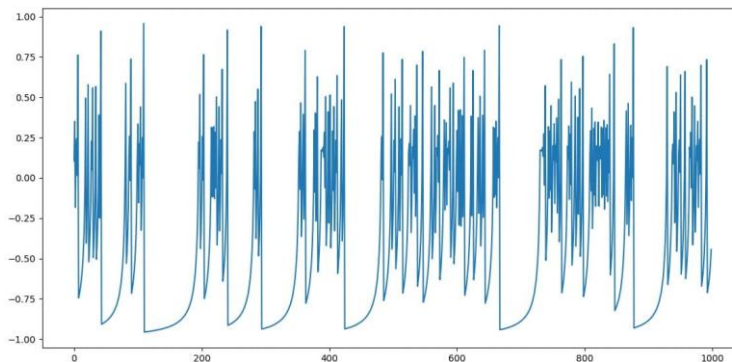
А. Симуляція

Дану модель можна записати у вигляді системи

$$x_n = \begin{cases} 1 - 2\sqrt{-x_{n-1}}, & -1 \leq x_n \leq 0 \\ 1 - 2\sqrt{x_{n-1}}, & 0 \leq x_n < 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2$$

Побудуємо графіки 7.1 та 7.2, що дадуть уявлення про поведінку послідовності $(x_n)_{n \leq N}$, для $x_0 = 0.2$ та $N = 100$, $N = 1000$

Рисунок 7.1 $x_0 = 0.2$, $N = 100$

Рисунок 7.2 $x_0 = 0.2, N = 1000$

Б. Статистичний аналіз моделі

Зробимо описову статистику для обох випадків. При $N = 1000$ $EX = -0.4$, $EX^2 = 0.394$, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 0.48$, дисперсія $DX = 0.231$

```
count      100.000000
mean       -0.389694
std        0.462841
min        -0.907862
25%        -0.774510
50%        -0.501704
75%        -0.085804
max         0.909984
dtype: float64
D(x) 0.21422211689930615
E(X)^2: 0.3639413383966867
Skewness: 0.9222349742892917
Kurtosis 0.027526030232956078
```

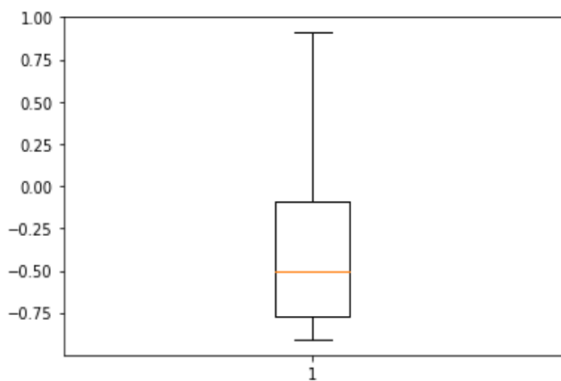
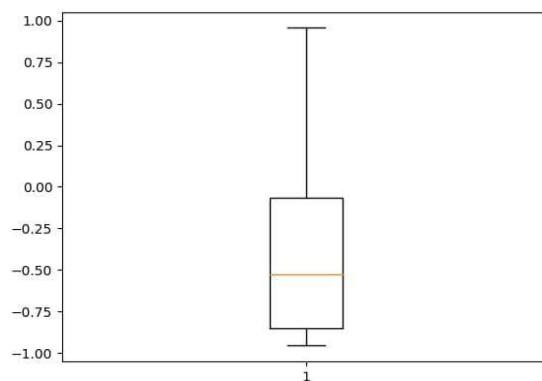
Рис. 8.1 $N = 100$

```
count      1000.000000
mean       -0.404369
std        0.480366
min        -0.956429
25%        -0.849461
50%        -0.527322
75%        -0.068125
max         0.956903
dtype: float64
D(x) 0.23075128215552057
E(X)^2: 0.3940351990873336
Skewness: 0.7197462086743645
Kurtosis -0.5012241584183714
```

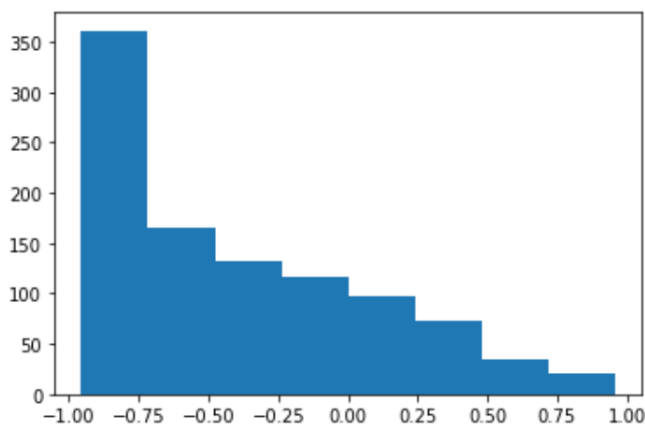
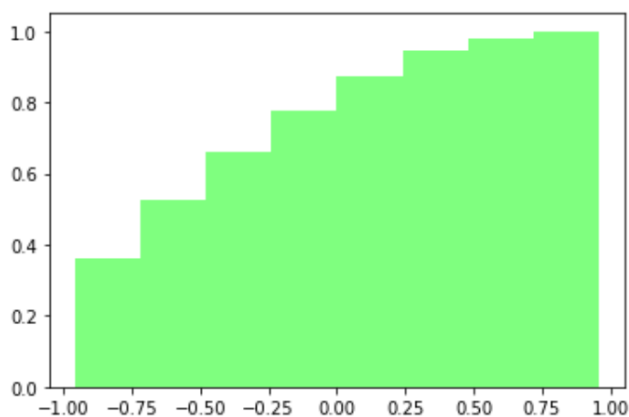
Рис. 8.2 $N = 1000$

В обох випадках коефіцієнт асиметрії додатній, розподіл має довгий правий хвіст та коефіцієнт ексцесу < 3 , отже, пік розподілу пологіший, ніж у нормального та розподіл плосковершинний.

Побудуємо також коробку з вусами для обох випадків, гістограму та кумулятивну функцію та криву при $N = 100$.

Рис 8.3 Коробка з вусами при $N = 100$ Рис 8.4 Коробка з вусами для $N = 1000$

З рисунку 8.3 бачимо, що 50% вибірки входить в інтервал $(-0.77; -0.087)$, а з рис. 8.4 50% значень входить в інтервал $(-0.85; -0.068)$.

Рисунок 8.5 Гістограма при $N = 1000$ Рисунок 8.6 Емпірична функція розподілу $N = 1000$

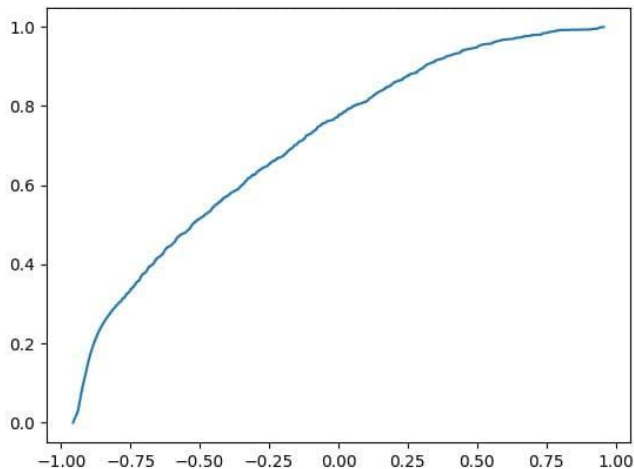


Рисунок 8.7 Кумулятивна крива при $N = 1000$

Виконаємо тест Шапіро-Вілка, D'Agostino's K^2 та Пірсона χ^2 квадрат на нормальність розподілу при $N = 1000$

```
from scipy.stats import shapiro
stat, p = shapiro(proba)
```

```
stat W=0.906, p=0.000
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 8.8 Результати тесту Шапіро-Вілка

```
import scipy.stats
k2, p = scipy.stats.normaltest(proba)
```

```
stat K_2=90.079, p=0.000
The null hypothesis can be rejected. Probably not Gaussian
```

Рисунок 8.9 Результати тесту D'Agostino's K^2

```
from scipy.stats import chisquare
Statistics_Xi_2, p=chisquare(proba)
```

```
stat Xi_2=-570.074, p=1.000
The null hypothesis cannot be rejected. Probably Gaussian
```

Рисунок 8.10 Результати тесту Пірсона χ^2 -квадрат

Оскільки $pvalue < 0.05$ у тесті Шапіро-Вілка та D'Agostino's K^2 , ми відкидаємо нульову гіпотезу про нормальність розподілу. Два з трьох тестів показали, що розподіл не є нормальним.

РОЗДІЛ 3. Порівняння з білим шумом

3.1 Симуляція білого шуму

Означення 3.1. Послідовність $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ називається білим шумом, якщо:

- 1) $E\varepsilon_n = 0$
- 2) $E\varepsilon_n^2 < \infty$
- 3) $E\varepsilon_n\varepsilon_m = 0$ [1, 148]

Іншими словами, білий шум – це квадратично інтегрована послідовність некорельованих випадкових величин з нульовим середнім. Застосуємо функцію `random.normal` бібліотеки `numpy` для моделювання білого шуму з нормальним розподілом, нульовим середнім та одиничним стандартним відхиленням для $N = 100$ та $N = 1000$.

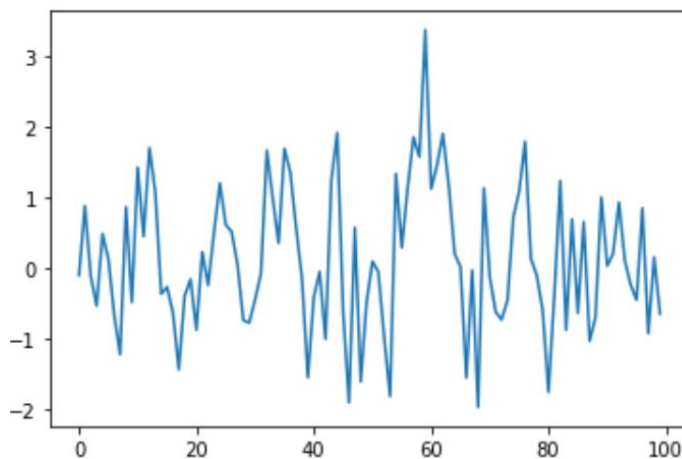
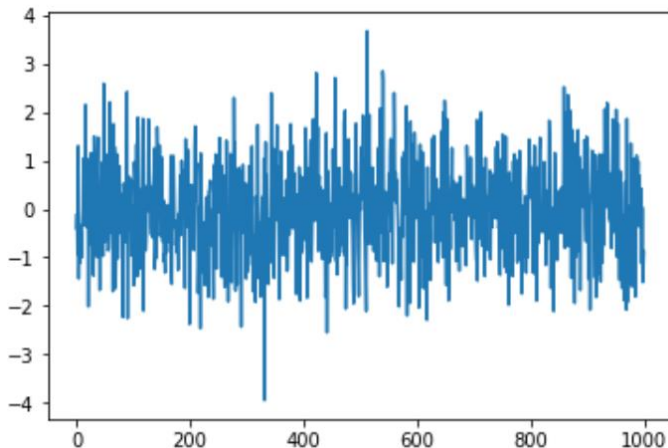


Рисунок 9.1 Білий шум при $N = 100$

Рисунок 9.2 Білий шум при $N = 1000$

Отримали такі значення описової статистики для двох випадків:

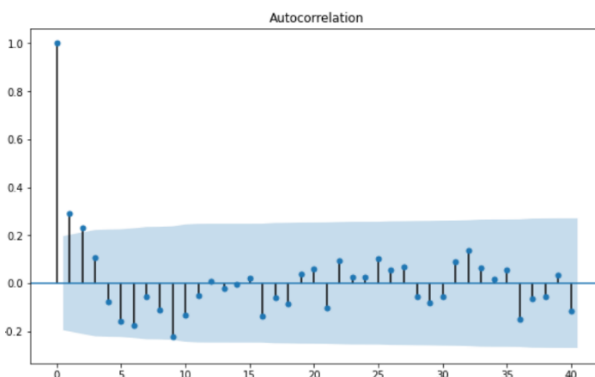
```
count    100.000000
mean      0.126770
std       1.012547
min       -1.974763
25%      -0.605082
50%       0.023639
75%       0.893544
max        3.381030
dtype: float64
Skewness: 0.23928262029960135
Kurtosis  0.051033508141115735
```

Рис. 9.3 $N = 100$

```
count    1000.000000
mean     -0.013652
std       0.982565
min       -3.946059
25%      -0.685220
50%      -0.030692
75%       0.626771
max        3.673040
dtype: float64
Skewness: 0.07975426238462953
Kurtosis  0.1363990258156047
```

Рис. 9.4 $N = 1000$

Також побудуємо графік кореляційної функції для реалізації білого шуму для $N = 1000$

Рисунок 9.5 Кореляція значень x_n моделі білого шуму

3.2 Порівняння моделей з білим шумом

Застосуємо тест Дікі-Фуллера, щоб визначити чи є послідовності стаціонарними рядами

ADF Statistic: -10.532801
p-value: 0.000000
Critical Values:
1%: -3.498
5%: -2.891
10%: -2.583

ADF Statistic: -6.401866
p-value: 0.000000
Critical Values:
1%: -3.498
5%: -2.891
10%: -2.583

Рис. 10.1 ADF Модель 1 при $\lambda = 4, N = 100$ Рис.10.2 ADF Модель 2 при $r = 1.5, N = 100$

ADF Statistic: -7.076489
p-value: 0.000000
Critical Values:
1%: -3.504
5%: -2.894
10%: -2.584

ADF Statistic: -5.961088
p-value: 0.000000
Critical Values:
1%: -3.437
5%: -2.864
10%: -2.568

Рис. 10.3 ADF Модель 3 при $r = 1.8, N = 100$ Рис. 10.4 ADF Модель 4 при $N = 1000$

Бачимо, що в усіх моделях $p - value < 0.05$. Це означає, що ми відкидаємо нульову гіпотезу про нестационарність ряду. Отже, ряди є стаціонарними.

Знайдемо довірчі інтервали для середніх значень наших моделей.

t: 7.836566080939255
Нижня межа: 0.18767307341753242
Верхня межа: 0.7567090859415655
p-value 5.365213018428625e-12

t: 6.712046169254104
Нижня межа: 0.11407827709274596
Верхня межа: 0.5798382616736543
p-value 1.2126621332184127e-09

Рис.10.5 Довірчий інтервал для 1 моделі Рис.10.6 Довірчий інтервал для 2 моделі

t: 12.693596140899674
Нижня межа: 0.3171468450686169
Верхня межа: 0.9209039456958118
p-value 1.724494859928301e-22

t: -18.449828265978343
Нижня межа: -0.12410735857437644
Верхня межа: -0.6846315812918042
p-value 1.2306579553020339e-65

Рис.10.7 Довірчий інтервал для 3 моделі Рис.10.8 Довірчий інтервал для 4 моделі

Бачимо, що середнє білого шуму не попадає в жодний з інтервалів. У 95% середнє наших моделей відрізняється від нуля. Тож перейдемо до більш вагомого пункта в означенні білого шуму – некорельованість значень.

Порівняємо модель 1 з білим шумом. Для цього побудуємо кореляційний графік, підрахований за значеннями $x_0, x_1 \dots x_{1000}$

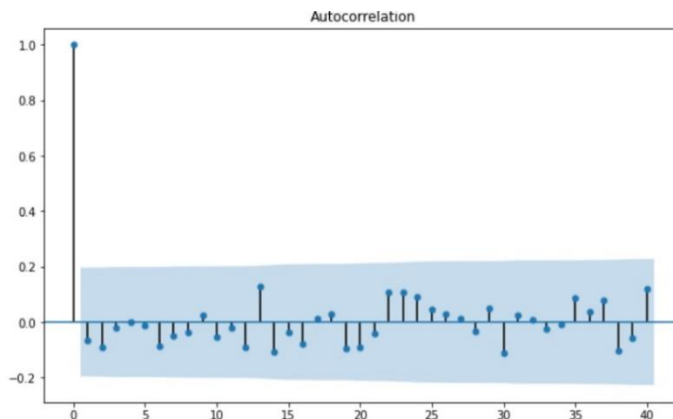


Рисунок 10.9 Кореляція значень x_n моделі 1

З проведеного в розділі 2 аналізу, середнє послідовності приблизно дорівнює 0. З графіку 10.9 бачимо, що величини (x_n) , породжені логістичним зображенням з $\lambda = 4$, можна практично вважати некорельованими, і в цьому сенсі послідовність (x_n) наближається до білого шуму.

Порівняємо модель 3 з білим шумом, побудувавши АКФ

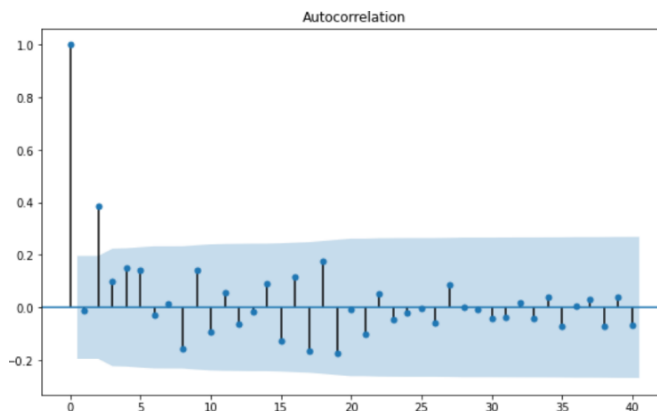


Рисунок 10.10 Кореляція значень x_n моделі 3, $N = 100$

З розділу 2, середнє послідовності приблизно дорівнює 0. З рисунку 10.10 бачимо, що величини (x_n) , породжені зображенням при $r = 1.8$, можна практично вважати некорельованими, і в цьому сенсі послідовність (x_n) наближається до білого шуму.

Розглянемо АКФ моделі 2 та 4:

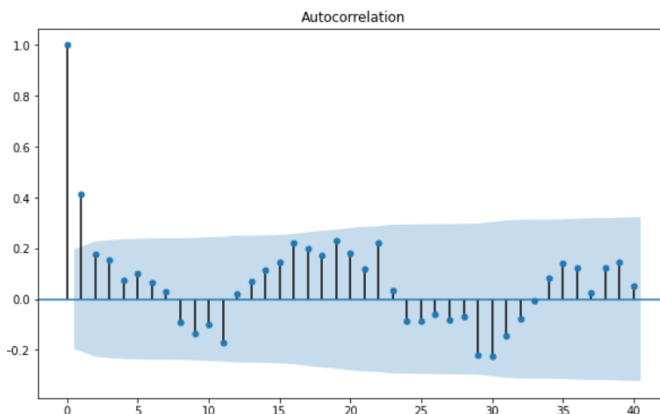


Рисунок 10.11 Кореляція значень x_n моделі 2, $N = 100$

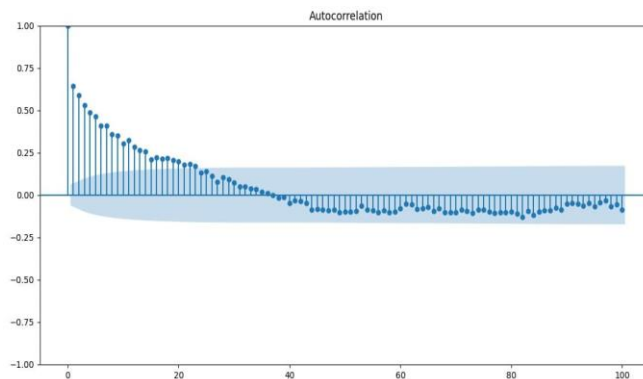


Рисунок 10.12 Кореляція значень x_n моделі 4, $N = 1000$

З графіків моделей 10.11 та 10.12 бачимо, що деякі значення x_n є корельованими. Це означає, послідовність (x_n) в обох моделях не можна назвати хаотичним білим шумом.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було:

- розглянуто симуляцію чотирьох моделей динамічного хаосу зі зміною кількості ітерацій та початкових умов;
- зроблено описову та вивідну статистику для кожної з моделей;
- змодульовано білий шум з такими характеристиками: $EX = 0$, $Std = 1$, де значення нормально розподілені.

Виявлено, що логістична модель при $\lambda = 4$ та палатне відображення при $r = 1.8$ найбільш схожі за статистичними показниками на білий шум.

У подальшому бажано застосовувати більш точні методи, щоб розрізнити чи дані послідовності є стохастичними чи хаотичними. Наприклад, показник Хьорста. Поведінка таких нелінійних динамічних систем, які мають властивість "хаотичності" можуть застосовуватися при побудові моделей еволюції фінансових індексів, особливо в кризові періоди, яким властива саме "хаотичність", а не "стохастичність" [1, 224]. Через теорію хаосу, можна спробувати вловити структуру непередбачуваності систем. Однак, немає можливості точного прогнозування подій, оскільки система дуже чутлива до початкових умов чи невеликої кількості різноманітних шумів, зовнішніх та внутрішніх впливів [6, 374].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. – Москва, 1998. – 512 с. – (Фазис).
- [2] Robert. L. D. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems / Devaney Robert. L. – Redwood City, 1989. – (Addison-Wesley Publishing Company).
- [3] Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 2007. Т. 177, № 9. С. 989.
- [4] Boeing, G. 2016. “Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction.” Systems, 4 (4), 37.
- [5] В М. А. Аналитические модели детерминированного хаоса / М. А. В, Ф. Г. А. – Москва, 2007. – (Физматлит).
- [6] Klioutchnikov I. Chaos Theory in Finance [Электронный ресурс] / I. Klioutchnikov, M. Sigova, N. Beizerov. – 2017. – Режим доступа до ресурсу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050917324067>.