

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА БАЗІ ХАОТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто моделі фінансових часових рядів, заснованих на хаотичних відображеннях. Описано симуляцію ціни акції на основі хаотичного відображення. Показано відмінність між хаотичними та стохастичними послідовностями.

ВСТУП. Останнім часом відбулись суттєві зміни в парадигмі математичного моделювання фінансово-економічних систем. Вони пов'язані з відмовою від так званої «лінійної парадигми» і переходу до нелінійних моделей. Це пояснюється тим, що нелінійні моделі дозволяють принципово на іншому якісному рівні інтерпретувати весь спектр неочікуваної, на перший погляд, поведінки складних систем, можуть враховувати дуже складні патерни у вхідних даних. У той же час, як тепер добре усвідомлено, лінійний підхід не дозволяє врахувати нерегулярну поведінку, яка може бути притаманна багатьом явищам. Проте і нелінійні моделі, що пропонуються для дослідження, базуються на стохастичному підході.

В той же час спостерігається велика зацікавленість у дослідженнях, пов'язаних з фінансовими часовими рядами з точки зору теорії хаосу [1, 2, 3, 4]. Хаотична поведінка проявляється у різних областях: у механічних осциляторах, електричних ланцюгах, хімічних реакціях, нервових клітинах, економічних системах, в тому числі і на фінансових ринках. Математична теорія хаосу дозволяє виявити сутність глибинних економічних процесів та розробити базис для прийняття рішень в таких ситуаціях (5, 6, 7). Виникає дилема: стохастика чи хаос?

Одним із прикладів використання теорії хаосу в економіці є моделювання процесу коливання цін акцій або інших цінних паперів.

За класичним підходом основним «будівним блоком» при моделюванні фінансових часових рядів є так званий «білий шум», тобто випадкова послідовність (процес) ε_n з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією, члени якого є некорельованими. Часто у практичних застосуваннях у ролі «білого шуму» виступає набір незалежних випадкових величин, що мають стандартний нормальний розподіл $N(0, 1)$. На базі білого шуму будуються моделі

авторегресії порядку p , рухомого середнього порядку q , змішані моделі авто регресії і рухомого середнього, так звані ARIMA моделі та їх модифікації.

Метою роботи є розгляд аналогів таких моделей, але заснованих на так званих хаотичних відображеннях, тобто розгляд хаотичних ARIMA моделей. Основною особливістю таких моделей є те, що незважаючи на свою детерміновану природу, вони здатні породжувати послідовності, які складно відрізнити від стохастичних.

Динамічний хаос і дискретні моделі динамічного хаосу..

Дамо формальне визначення хаотичної функції та послідовності динамічного хаосу. Більш детально з тим матеріалом можна ознайомитись з літератури (19, 8).

Означення. Функція f називається хаотичною, якщо:

1. f має щільні періодичні точки;
2. f чутлива до початкових умов;
3. f виконує топологічне перемішування.

Означення. Послідовність, що породжується хаотичною функцією, називається хаотичною або послідовністю динамічного хаосу.

Одним із загальновідомих представників хаотичних функцій є **логістичне відображення**, яке задається наступним чином:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \lambda \in R, n \geq 0 \\ x_0 \in (0,1) \end{cases}.$$

Класичним засобом візуалізації характеру збіжності хаотичної послідовності є діаграма біфуркацій (рис. 1). Таку діаграму можна трактувати наступним чином: для кожної пари (x_0, λ) обчислюється значення $f^n(x_0, \lambda)$ для досить великого n та наносяться на діаграму. Так, наприклад, при $\lambda \in (0,1)$ послідовності збігаються до нуля; при $\lambda \in (1,3)$ – до одного можливого

значення; при $\lambda \in (3, 3.5)$ – до двох. А вже починаючи з 3.57 можна спостерігати відсутність збіжності до якогось значення, що є початком хаотичної поведінки $\lambda \geq 4$, тобто система позбувається стійкості і переходить у стан хаосу.

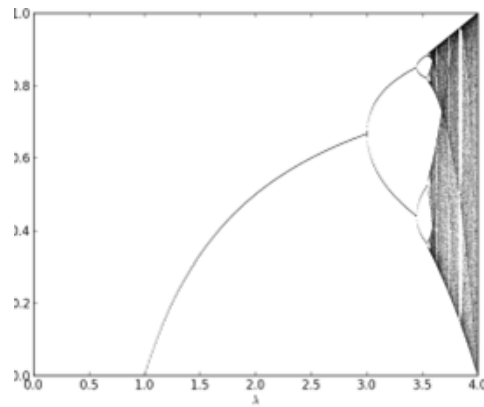


Рис.1. Діаграма біфуркацій хаотичної послідовності

Саме коли значення параметру $\lambda = 4$ послідовність спостережень цієї хаотичної послідовності (рис. 2) може бути співставленою з поведінкою стохастичних часових рядів типу «білого шуму». В такому співставленні одна ітерація буде відповідати одному спостережуваному часовому періоду.

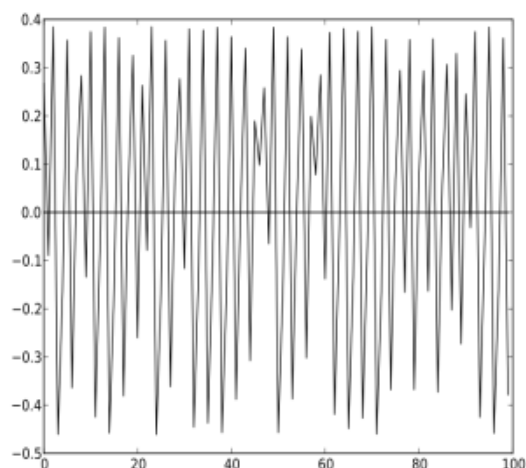


Рис. 2. Спостереження (графік) хаотичної послідовності логістичного відображення

Емпірична автоковаріаційна функція вищезазначеного часового ряду x_n на основі логістичного відображення має вид (рис.3), з якого можна зробити висновок, що величини x_n є некорельованими і в цьому сенсі ця послідовність може бути названою «хаотичним білим шумом».

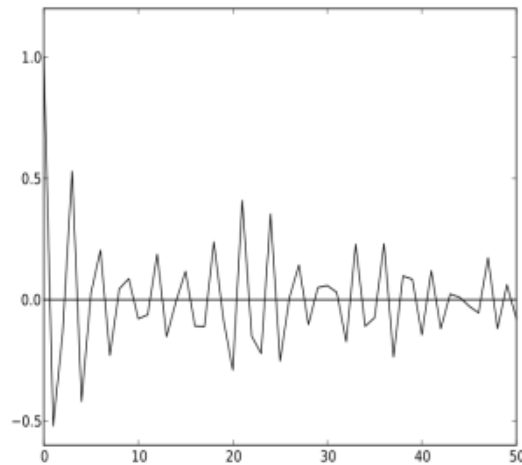


Рис.3. Автоковаріаційна функція часових рядів типу «білого шуму»

До того ж відомо, що для логістичного відображення з $\lambda = 4$ існує інваріантний розподіл P :

$$P(f^{-1}A) = P(A), \quad A \subset (0,1)$$

із щільністю $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in (0,1)$.

Тобто можна розглядати початкове значення логістичного відображення як випадкову величину з даним розподілом. При цьому випадкові величини наступних кроків x_n будуть мати такий самий розподіл. Таким чином, можна розглядати таке логістичне відображення як заміну класичному «білому шуму».

Симуляція цін акцій на основі хаотичних послідовностей. Класично при побудові моделей цін акцій розглядають випадкові величини, які відповідають не безпосередньо цінам акцій, а такі, що відповідають логарифмічним приростам:

$$\xi_t = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

Вважають, що або ці величини незалежні та нормально розподілені і тоді ми маємо модель Блека-Шоулза, або за видом автоковаріаційної та частково автоковаріаційної функції будують ARIMA моделі (Бокс і Дженкінс). Як приклад ARIMA моделі розглянемо зсувне середнє (moving average)

$$\xi_n = \sum_{i=0}^q c_n \varepsilon_{n-i},$$

де c_n – вагові коефіцієнти, що знаходяться методом МНК із знання АКФ для емпіричних даних. Якщо замість білого шуму взяти логістичну послідовність, то ми отримаємо хаотичну модель «зсувного середнього»:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n = \sum_{i=0}^q c_n x_{n-i} \\ x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \lambda \in R, n \geq 0 \\ x_0 \in (0,1) \end{array} \right.$$

Зробивши обернений перехід від ξ_t , отримаємо:

$$S_n = e^{\xi_t} S_{n-1}.$$

Тепер, використовуючи замість ξ_t раніше зазначені моделі хаотичного білого шуму та хаотичного рухомого середнього, можна описати симуляцію ціни акції на основі деякого хаотичного відображення. Для цього була створена програма, яка дає змогу вибрати одну з раніш описаних послідовностей, вказати необхідні параметри та побудувати аналог цін акцій для неї. На рис. 4 зображено інтерфейс програми, в якій обчислено ціну акції за вищезазначеною формулою повернення від логарифмічних приростів, що моделюються, як елементи логістичного відображення. Як видно з рисунка, симульована ціна має однаковий характер з реальною ціною. Таким чином, можна прорахувати симульовані ціни на акції усіх раніше зазначених стохастичних послідовностей, а також прораховує емпіричні значення автокореляційної функції.

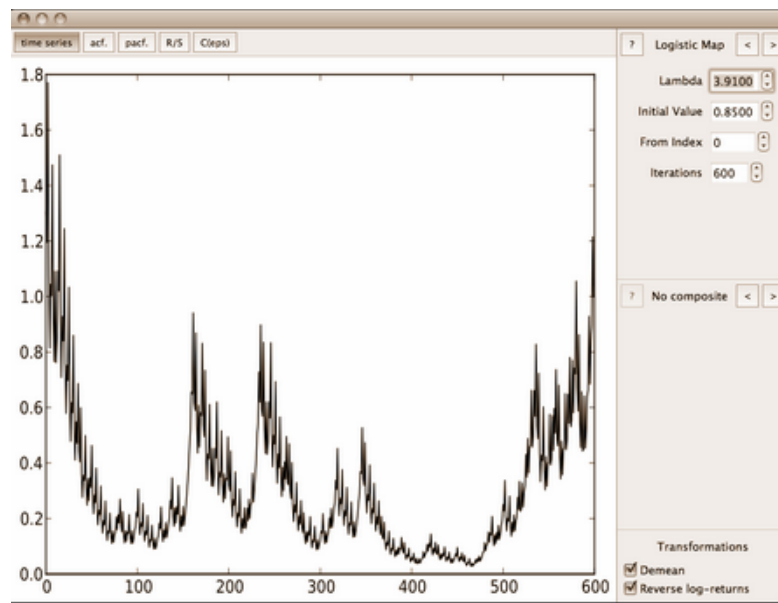


Рис.4. Обчислення ціни акції за розробленою програмою

В нашому випадку будемо використовувати хаотичні послідовності замість звичних значень логарифмічних приростів.

Даний аналіз показує відмінність між хаотичними та стохастичними послідовностями. Так, для стохастичних послідовностей значення Q_n набагато швидше зростає з ростом n . Для порівняння розглянемо Q_n для симульованого класичного білого шуму (перший графік) та логістичного відображення (другий графік):

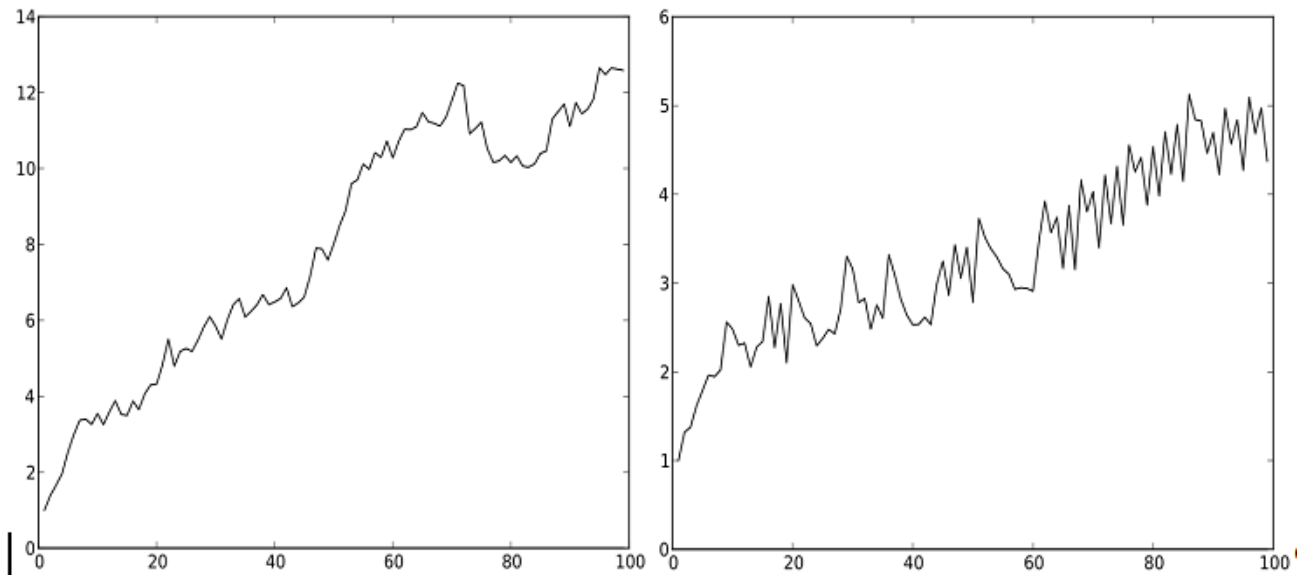


Рис. 5. Порівняння Q_n для симульованого класичного білого шуму та логістичного відображення

Як ми бачимо, логістичне відображення має набагато менший нормований розмах, ніж білий шум.

Альтернативний засіб аналізу різниці між стохастичною і хаотичною природою послідовності може бути здійснений за допомогою наступної функції:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi(N, \varepsilon)}{N^2},$$

де $\psi(N, \varepsilon)$ – кількість пар (i, j) з розглядаємої послідовності h_n :

$$|h_i - h_j| < \varepsilon.$$

Як видно з означення, дана функція також оцінює порядок «розмаху» послідовності. Для практичних застосувань складно обчислити точне її значення, тому доцільніше розглядати підлімітний вираз для великих N , які можна обчислити.

Розглянемо графіки $C(\varepsilon)$ для білого шуму та логістичного відображення:

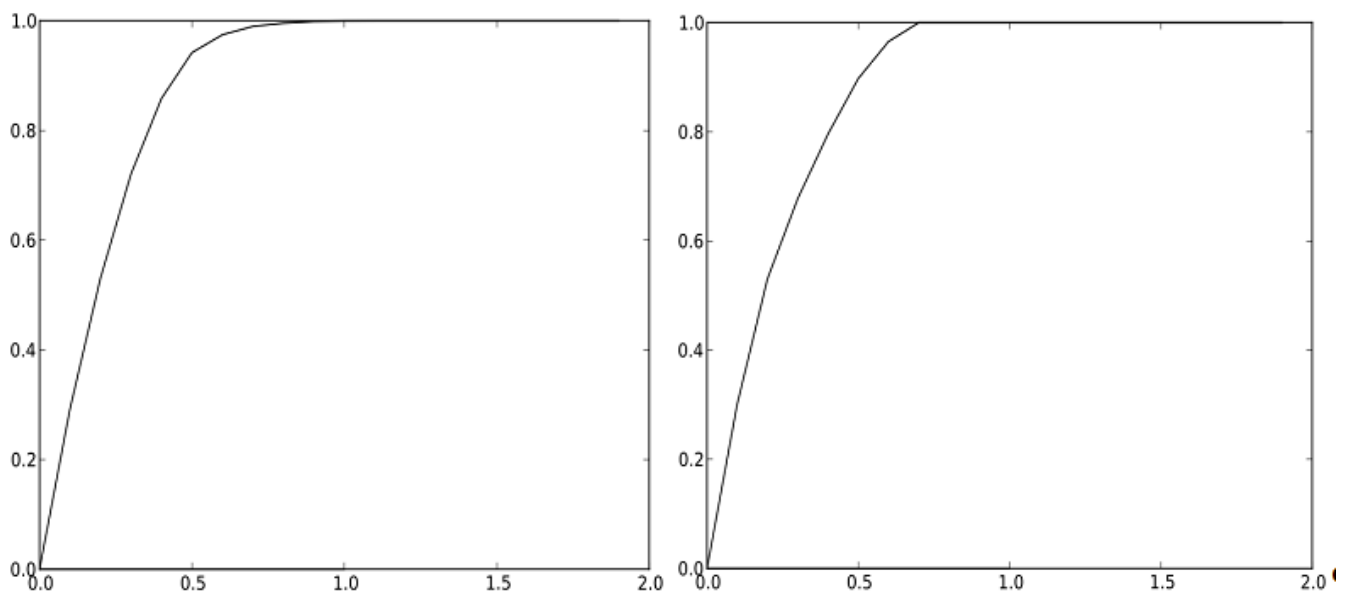


Рис. 6. Графіки $C(\varepsilon)$ для білого шуму та логістичного відображення

Як ми бачимо, логістичне відображення є досить схожим з білим шумом.

Таким чином, даний метод не дає точну відповідь на питання, чи є дана послідовність хаотичною чи стохастичною.

Висновки. Незважаючи на широкий набір засобів оцінки характеру поведінки експериментальної послідовності, не можна дати однозначну відповідь про її природу. Крім того, не виключається і можливість того, що реальні дані можуть включати як хаотичну, так і стохастичну поведінку в деякій комбінації.

Моделі, побудовані на базі хаотичних послідовностей показують, що випадкова природа змін цін акцій може відповідати деяким хаотичним послідовностям, але проблема прогнозу не є

такою оптимістичною. Справа полягає в тому, що не дивлячись на детермінований характер побудованої хаотичної ARIMA моделі, поведінка траєкторії суттєво змінюється від точності визначення початкового значення x_0 .

1. Беляков С.С. Использование агрегирования в методах нелинейной динамики для анализа и прогнозирования временных рядов котировки акций: автореф. дис. канд. экон. наук / С.С. Беляков. – Ставрополь, 2005. – 24 с.
2. Концевая Н.В. О методах определения «длины памяти» рынка и пути их использования для оптимизации торговых систем на валютном рынке / Н.В. Концевая // Экономическое прогнозирование: модели и методы: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Воронеж: Воронеж. Гос. Ун-т, 2006.. – Ч. 2. – С. 22-29.
3. Brock W.A. Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability / W.A. Brock? D. Hsieh, MIT Press, 1991.
4. LeBaron B. A Fast Algorithm for the BDS Statistic // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. January 1997. Vol. 2. No. 2. P. 53-59.
5. Жуленев С.В. Финансовая математика: введение в классическую теорию / С.В. Жуленев. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 480 с.
6. Сергеева Л.Н. Нелинейная экономика: модели и методы: монография / Л.Н. Сергеева. – Запорожье: Полиграф, 2003. – 218 с.
7. Hilborn R.C. Chaos and Nonlinear Dynamics / R.C. Hilborn. NY.: Oxford University Press, 2000.
8. Глейк Дж. Хаос: создание новой науки / Дж. Глейк. Пер. с англ. М. Нахмансона, Е. Барашковой. – СПб.: Амфора, 2001. – 398 с.

The article describes the model of financial time series based on chaotic maps. In article describes a simulation of share price based of the chaotic map. Shows the difference between chaotic and stochastic sequences.