УДК 512.563

Марк Т. Таращанський, к.т.н, доцент,
Наталія Ю. Щестюк, к.ф.-м.н, доцент

Про існування доповнення у гратах підалгебр булевої алгебри

Нехай B *є підалгеброю булевої алгебри* A. *Кажуть, що підалгебра* B *має доповнення в* A, *якщо існує така підалгебра* $C \subset A$, *що* $B \cap C = \{0,1\}$ *й* $B \cup C$ *породжує* A.

У цій роботі наводиться достатня умова, що забезпечує існування доповнення підалгебри $B \subset A$ *в* A.

Ключові слова: булева алгебра, доповнення.

M.T. Taraschanskyj, Cand.Sci(Tech.), Associate Prof.,
N.U. Shchestuk, Cand.Sci(Phys.-Math), Associate Professor

On complementation in the lattice of subalgebras of a Boolean algebra

Let B *be subalgebra of a Boolean algebra* A. *Let us say that subalgebra* B *has complement with respect to* A, *if there exists a subalgebra* $C \subset A$ *such that* $B \cap C = \{0,1\}$ *and* $B \cup C$ *generates* A.

The main purpose of this paper is to explore the sufficient condition of subalgebras $B \subset A$, *which have complement with respect to* A.

Key Words: Boolean algebra, complement.

E-mail: markt@net.lg.ua, Natalyshch@gmail.com
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1. Вступ

Нехай B підалгебра булевої алгебри A. Підалгебра B має доповнення в A, якщо існує така підалгебра $C \subset A$, що $B \cap C = \{0,1\}$ й $B \cup C$ породжує A.

Структура грат $Sub(A)$ усіх підалгебр алгебри A вивчалася в багатьох роботах [1-7]. Зокрема, в [1] S. Bhaskara Rao і M. Bhaskara Rao показали, що доповнення існує для всякої скінченної підалгебри $B \subset A$, а також – сформулювали умови існування доповнення підалгебри, породженої ідеалом.

Якщо булева алгебра A злічення, тоді всяка підалгебра $B \in Sub(A)$ має доповнення в A [5, 6].

L. Heindorf [3] довів, що булева алгебра злічення тоді й тільки тоді, коли будь-яка підалгебра $B \in Sub(A)$ має неперервне доповнення щодо природньої топології на $Sub(A)$.

У цій роботі буде наведено достатню умову, що забезпечує існування доповнення підалгебри $B \subset A$ в A.

2. Необхідні визначення й позначення

Булеві операції будуть позначатися теоретико-множинними символами.

$\bar{A}$ позначатиме доповнення A для всякого $A \in A$ й $A \Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ – симетричну різницю A й B для $A, B \in A$.

Якщо X деяка підмножина A, тоді $\langle X \rangle$ позначає підалгебру в A, породжену X.

Символи 0_A, 1_A позначають, відповідно, нульовий і одиничний елементи булевої алгебри A, і, якщо зрозуміло про яку алгебру йде мова, то замість 0_A і 1_A будуть використовуватися символи 0 й 1.

Підалгебра B булевої алгебри A називається *щільною* в A, якщо для будь-якого ненульового $A \in A$ знайдеться таке ненульове $B \in B$, що $B \subset A$.

Булева алгебра A називається *ретрактивною* тоді і тільки тоді, якщо для кожного ідеалу $I \subset A$ існує така підалгебра $B \subset A$, що $B \cap I = 0$ й $\langle I \cup B \rangle = A$.

Булева алгебра A називається *коретрактивною* тоді і тільки тоді, якщо для кожної підалгебри $B \subset A$ існує такий ідеал $I \subset A$ що $B \cap I = 0$ й $\langle I \cup B \rangle = A$.

3. Існування доповнення в $Sub(A)$

Почнемо з наступного твердження, яке має допоміжний характер.

Твердження 1. *Нехай* B *– підалгебра алгебри* A *й* $I \subset A$ *– ідеал алгебри* A *такий, що* $B \cap I = 0$. *Тоді будь-який елемент алгебри* $\langle B \cup I \rangle$ *може бути єдиним чином зображений у вигляді* $B \Delta I$ *для деяких* $B \in B$ *і* $I \in I$.

Доведення. Це випливає зі співвідношень $\overline{B \Delta I} = \bar{B} \Delta I$ і

$$((B_1 \Delta I_1) \cap (B_2 \Delta I_2)) \Delta (B_1 \cap B_2) =$$
$$= (I_1 \cap B_2) \Delta (B_1 \cap I_2) \Delta (I_1 \cap C_2) \subset$$
$$\subset (I_1 \cup I_2) \Delta (I_1 \cap I_2) \subset (I_1 \cup I_2) \in \mathcal{I},$$

які показують, що множина елементів виду $B \Delta I$, $B \in \mathcal{B}$, $I \in \mathcal{I}$ замкнута щодо операцій доповнення й замикання й отже є алгеброю, що містить $\mathcal{B}$ і $\mathcal{I}$.

Єдиність такого зображення випливає з того, що якщо $B_1 \Delta I_1$ й $B_2 \Delta I_2$ два різних зображення того самого елемента $A \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I} \rangle$, тоді $(B_1 \Delta B_2) \Delta (I_1 \Delta I_2) = 0$. Отже, $B_1 \Delta B_2 = I_1 \Delta I_2 = 0$, тобто $B_1 = B_2$ й $I_1 = I_2$.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{B}$ – підалгебра булевої алгебри $\mathcal{A}$. Розглянемо наступні твердження:*

(i) алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$;

(ii) існує такий ідеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = 0$;

(iii) алгебра $\mathcal{B}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.

Тоді твердження (i) і (ii) еквівалентні й з кожного з них випливає (iii).

Доведення $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Якщо алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$, тоді існує принаймні один такий елемент $A^* \in \mathcal{A}$, що з відношення $B \subset A^*$, $B \in \mathcal{B}$ випливає $B = 0$. Отже, головний ідеал $\mathcal{I}_{A^*}$, породжений A^*, задовольняє умові $\mathcal{I}_{A^*} \cap \mathcal{B} = 0$.

З іншого боку, нехай $\mathcal{I}$ – ідеал в $\mathcal{A}$ такий, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \{\varnothing\}$. Тоді для всякого $A \in \mathcal{I}$, з умов $B \subset A$ і $B \in \mathcal{B}$ випливає, що $B = \varnothing$, тобто алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Множина $\mathcal{J}$ всіх таких ідеалів $\mathcal{I}$ алгебри $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = 0$ не порожня. Згідно з лемою Цорна, множина $\mathcal{J}$ має максимальний елемент $\mathcal{I}^*$. Нехай $\mathcal{C} = \langle \mathcal{I}^* \rangle$. Тоді $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0,1\}$. Припустимо, що $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \neq \mathcal{A}$. Тоді існує таке $A \in \mathcal{A}$, що $A \notin \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.

Покладемо $\mathcal{A}^* = \langle \mathcal{C} \cup A \rangle$. Через максимальність ідеалу $\mathcal{I}^*$ існує ненульовий елемент $B \in \mathcal{A}^* \cap \mathcal{B}$. З попереднього твердження випливає, що $B = C \Delta A$ для якогось $C \in \mathcal{I}^*$. Звідси $A = B \Delta C \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ всупереч вибору A. Отже, $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = \mathcal{A}$.

Це завершує доведення теореми.

Зауваження. 1. В загальному випадку з *(iii)* не випливає *(i)*. Нехай Ω – непуста нескінченна множина. Нехай $FC(\Omega)$ алгебра підмножин, породжена скінченними підмножинами Ω. Нехай також $A \subset \Omega$ – нескінченна підмножина, така що $A \notin FC(\Omega)$. Покладемо $\mathcal{A} = \langle A \cup FC(\Omega) \rangle$. Тоді алгебра $FC(\Omega)$ не щільна в $\mathcal{A}$ і має доповнення в $\mathcal{A}$.

2. Якщо $\mathcal{C} \in Sub(\mathcal{A})$ – доповнення алгебри $\mathcal{B} \in Sub(\mathcal{A})$, то алгебра $\mathcal{C}$ може й не містити жодного ідеалу $\mathcal{I}$ алгебри $\mathcal{A}$. Нехай $(\mathcal{A}, \{f, g\})$ булевий добуток алгебр $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ ([3], стор. 66). Ототожнимо алгебри $\mathcal{B}$ й $\mathcal{C}$ з їх ізоморфними відображеннями $f(\mathcal{B})$ й $g(\mathcal{C})$ в алгебрі $\mathcal{A}$. У цьому випадку алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$ і алгебра $\mathcal{C}$ є доповненням $\mathcal{B}$. Припустимо тепер, що $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ – деякий ідеал алгебри $\mathcal{A}$. Тоді для будь-яких $B \in \mathcal{B}$ і $I \in \mathcal{I}$ справджується співвідношення $\varnothing \neq B \cap I \in \mathcal{I}$. Звідси випливає, що $B \cap I \in \mathcal{C}$. Отже $(B \cap I) \cap \overline{B} = \varnothing$ всупереч незалежності алгебр $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$.

З доведеної теореми випливають наступні відомі результати.

Наслідок 1. ([1], теорема 2.4) *Усяка скінченна підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.*

Доведення Згідно з теоремою 1 досить показати, що алгебра $\mathcal{B}$ не щільна в $\mathcal{A}$. Припустимо, що для всякого $A \in \mathcal{A}$ знайдеться таке відмінне від нуля $B \in \mathcal{B}$, що $B \subset A$. Нехай тоді $\{B_t, t \in T\} \subset \mathcal{B}$ – множина всіх таких $B \in \mathcal{B}$, що $B \subset A$. Оскільки алгебра $\mathcal{B}$ скінченна, то множина T також скінченна. Таким чином, об'єднання $\bigcup_{t \in T} B_t$ існує й рівно A. Звідси випливає, що $A \in \mathcal{B}$.

Отримана суперечність доводить необхідне твердження.

Наслідок 2. [5, 6] *Грати $Sub(\mathcal{A})$ зліченої булевої алгебри $\mathcal{A}$ мають доповнення.*

Доведення. Необхідне твердження буде доведено, якщо показати, що будь-яка підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ не щільна в $\mathcal{A}$.

Нехай знайдеться така підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, яка є щільною в $\mathcal{A}$. Згідно з теоремою 1, для деякого ідеалу $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ буде виконуватися співвідношення $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} \neq 0$. Зауважимо, що злічену булеву алгебру $\mathcal{A}$ може бути зображено як об'єднання зростаючої послідовності скінченних булевих алгебр $\mathcal{A}_n$. Внаслідок цього $\mathcal{I} \cap (\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}) \neq 0$ для деякого n, що є протиріччям з тим, що згідно з попереднім наслідком, скінченна алгебра $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}$ має доповнення в $\mathcal{A}$.

Приклад. Простим прикладом алгебри $\mathcal{A}$, кожна підалгебра якої не щільна в $\mathcal{A}$, є алгебра $FC(\Omega)$ для всякої множини Ω.

Дійсно, припустимо, що існує деяка щільна підалгебра $\mathcal{B} \subset FC(\Omega)$. Тоді алгебра $\mathcal{B}$ містить усі одноточкові підмножини. Отже, $\mathcal{B} = FC(\Omega)$, оскільки $FC(\Omega)$ є мінімальною алгеброю, що містить усі одноточкові множини.

Більше того, будь-яка алгебра $\mathcal{A}$, кожна подалгебра якої не щільна в $\mathcal{A}$, ізоморфна $FC(\Omega)$.

Для доведення цього твердження покажемо спочатку, що визначення коретрактивности, прийняте в цій роботі, і визначення з [7], еквівалентні.

Твердження 2. *Булева алгебра $\mathcal{A}$ коретрактивна тоді й тільки тоді, коли для всякої підалгебри $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ існує такий гомоморфізм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$.*

Доведення Якщо $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такий гомоморфізм, що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$, тоді $h^{-1}(0)$ ідеал у $\mathcal{A}$ такий, що $h^{-1}(0) \cap \mathcal{B} = 0$ й $\langle h^{-1}(0) \cup \mathcal{B} \rangle = \mathcal{A}$.

З другого боку, згідно з твердженням 1 кожне $A \in \mathcal{A}$ може бути єдиним чином зображено у вигляді $B \Delta I$ для деяких $B \in \mathcal{B}$ і $I \in \mathcal{I}$.

Відображення $B \Delta I \to B$ є таким гомоморфізмом алгебри $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{B}$, що $h(B) = B$ для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Теорема 2. *Кожна підалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ не щільна в $\mathcal{A}$ тоді й тільки тоді, коли алгебра $\mathcal{A}$ ізоморфна $FC(\Omega)$.*

Доведення Нехай i – ізоморфізм алгебри $\mathcal{A}$ на алгебру $FC(\Omega)$ й $\mathcal{B}$ – деяка підалгебра алгебри $\mathcal{A}$. Як показує попередній приклад, існує доповнення $\mathcal{C}$ алгебри $i(\mathcal{B})$ в $FC(\Omega)$. Отже, $i^{-1}(\mathcal{C})$ – доповнення $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$.

З другого боку, згідно з твердженням 2 і теоремою 1.9 з [7], алгебра $\mathcal{A}$ ізоморфна алгебрі $FC(\Omega)$.

4. Висновки

У такий спосіб показано, що умова нещільності підалгебри $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ в алгебрі $\mathcal{A}$ є достатньою умовою існування доповнення $\mathcal{C}$ до алгебри $\mathcal{B}$.

Список використаних джерел

1. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M., On the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Czechoslovak Mathematical Journal – 1979. – 29 – P. 530-545
2. Düntsch I., Koppelberg S. Complements and quasicomplements in the lattice of subalgebras of P(Ω) // Discrete Mathematics – 1985. – 53 – P. 63-78.
3. Heindorf L., Another note on countable Boolean algebras // Comment. Math. Univ. Carolinae – 1996. – 37, No. 4 – P. 815-819.
4. Heindorf L., On Subalgebras of Boolean Interval Algebras // Proceedings of the American Mathematical Society – 1997. – 125, No. 8 – P. 2265-2274.
5. Jech T., A note on countable Boolean algebras // Algebra Universalis – 1982. –14 – P. 257-262.
6. Remmel J.B., Complementation in the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Algebra Universalis – 1980. – 10 – P. 48-64.
7. Rotman B., Boolean algebras with ordered bases // Fund. Math. – 1972. – 75 – P. 187-197.
8. Yan C. H., Decomposition of Lebesgue spaces // Adv. Math. – 1998. – V.138(2) – P.330-350.
9. Yan C. H., The theory of commuting Boolean sigma-algebras //Adv. Math. – 1999. – V.144(1) – P.94-116.
10. Plachky D., Extremal and monogenic additive set functions //Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V.54 – P.193-196.
11. Сикорский Р., Булевы алгебры. – М.: Мир. – 1969. – 376 с.

Надійшла до редколегії 20.02.2009