

Оптимальне керування системами масового обслуговування

Виконав студент
БП-4 «Прикладна математика»
Поліщук Максим Олександрович

Науковий керівник
Чорней Руслан Костянтинович

СМО

- Розглядається (СМО) з обмеженою довжиною черги, динамічною кількістю активних серверів і дискретними типами заявок:
 - λ — інтенсивність надходження заявок (розподіл Пуассона);
 - N — загальна місткість системи;
 - μ_i — інтенсивність обслуговування i -го сервіса (експоненційний розподіл);
 - C_i — вартість обслуговування i -го сервіса за одиницю часу;
 - S_i — разова вартість увімкнення i -го сервіса;
 - $K (N - c)$ — максимальна довжина черги
 - C_{wait} — вартість очікування заявки в черзі за одиницю часу;
 - R_j — дохід за обслуговування заявки типу j ;
 - p_j — ймовірність надходження заявки типу j .

Множина станів

- Множина станів системи

$$S = \left\{ (Q, d_1, \dots, d_c) \left| \begin{array}{l} Q \in \{0, 1, \dots, K\}, \\ d_i = (d_i^{(1)}, d_i^{(2)}), i = 1, \dots, c, \\ d_i^{(1)} \in \{0, 1\}, d_i^{(2)} \in \{0, 1\} \\ d_i^{(2)} \leq d_i^{(1)}, i = 1, \dots, c \end{array} \right. \right\}.$$

- Q — кількість заявок у черзі;
- $D = \left[(d_i^{(1)}, d_i^{(2)}) \right]_{i=1}^c$ — вектор стану сервісів, де кожна пара d_i описує:
 - $d_i^{(1)} \in \{0, 1\}$ — чи ввімкнений сервер i (1 — ввімкнений, 0 — вимкнений);
 - $d_i^{(2)} \in \{0, 1\}$ — чи зайнятий сервер i заявкою (1 — обслуговує, 0 — вільний).

Керування

- Керувати в даній системі ми можемо двома способами – змінюючи набір активних сервісів, або приймати рішення чи брати поточну заявку на обслуговування чи не брати, тобто відхилити.

Задача

- Отже, задачею є знаходження оптимальної стратегії такої, щоб максимізувати середній дохід системи.

Функція миттєвої винагороди

$$R(s, a) = \sum_j p_j R_j - \sum_{i: d_i^{(1)} = 1} C_i - Q \cdot C_{wait} - \sum_{i \in I_c} S_i$$

Рівняння оптимальності

$$g^* + h(s) = \max_{a \in A(s)} \{R(s, a) + \sum_{s' \in S} P(s'|s, a)h(s')\}, \forall s \in S.$$

$$h(s) = \max_{a \in A(s)} \left\{ R(s, a) \frac{1}{\delta} + \frac{\lambda}{\delta} h(s_{arr}(a)) + \sum_{i: d_i^{(2)}=1} \frac{\mu_i}{\delta} h(s_{dep,i}(a)) - \frac{g^*}{\delta} \right\}$$

$$\delta = \lambda + \sum_{i: d_i^{(2)}=1} \mu_i$$

Оптимальна стратегія

$$\pi^*(s) \in \arg \max_{a \in A(s)} \{R(s, a) + \sum_{s' \in S} P(s'|s, a)h(s')\}, \forall s \in S.$$

Алгоритм побудови стратегії

1. $V_0(s) = 0 \quad \forall s.$

2. $\forall s :$

$$V_{n+1}(s) = \max_{a \in A(s)} \left\{ R(s, a) + \sum_{s'} P(s' | s, a) \cdot V_n(s') \right\}$$

3. $|V_{n+1}(s) - V_n(s)| < \varepsilon \quad \forall s.$

4. $\forall s :$

$$\pi^*(s) = \arg \max_{a \in A(s)} \left\{ R(s, a) + \sum_{s'} P(s' | s, a) \cdot V(s') \right\}$$

Програмна реалізація

- `read_parameters()`
- `generate_actions(s, K)`
- `reward(s, a, C_i, S_i, C_wait, R_j, p_j)`
- `probabilities_sa(s, a, l, mu)`
- `filling_services(Q, D)`
- `value_iteration(s, a_map, l, mu, C_i, S_i, C_wait, R_j, p_j, eps=1e-6, max_iter=10000)`

Приклад роботи

- Задано параметри:
 - Інтенсивність надходження заявок (λ): 1.2
 - Сервери:
 - Сервер 1: $\mu = 0.8$, $C = 1.5$, $S = 4$
 - Сервер 2: $\mu = 1.2$, $C = 2.0$, $S = 6$
 - Типи заявок:
 - Тип 1: $R = 6$, $p = 0.6$
 - Тип 2: $R = 8$, $p = 0.4$
 - Витрати очікування: 1.0
 - Максимальна довжина черги: 2

Стани системи

- $[(0, ((0, 0), (0, 0))), (0, ((0, 0), (1, 0))), (0, ((0, 0), (1, 1))), (0, ((1, 0), (0, 0))),$
- $(0, ((1, 0), (1, 0))), (0, ((1, 0), (1, 1))), (0, ((1, 1), (0, 0))), (0, ((1, 1), (1, 0))),$
- $(0, ((1, 1), (1, 1))), (1, ((0, 0), (1, 0))), (1, ((0, 0), (1, 1))), (1, ((1, 0), (0, 0))),$
- $(1, ((1, 0), (1, 0))), (1, ((1, 0), (1, 1))), (1, ((1, 1), (0, 0))), (1, ((1, 1), (1, 0))),$
- $(1, ((1, 1), (1, 1))), (2, ((0, 0), (1, 0))), (2, ((0, 0), (1, 1))), (2, ((1, 0), (0, 0))),$
- $(2, ((1, 0), (1, 0))), (2, ((1, 0), (1, 1))), (2, ((1, 1), (0, 0))), (2, ((1, 1), (1, 0))),$
- $(2, ((1, 1), (1, 1)))];$

Приклад можливих дій

- $(0, ((1, 1), (1, 0)))$: $[((1, 0), 'accept'), ((1, 0), 'reject'), ((1, 1), 'accept'), ((1, 1), 'reject')]$
- $(1, ((1, 0), (1, 0)))$: $[((0, 1), 'accept'), ((0, 1), 'reject'), ((1, 0), 'accept'), ((1, 0), 'reject'), ((1, 1), 'accept'), ((1, 1), 'reject')]$

Результат

- Стан $(Q=0, D=((0, 0), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((0, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(0, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((0, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(0, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 0), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 1), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 1), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=0, D=((1, 1), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((0, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((0, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(0, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 0), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 1), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 1), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=1, D=((1, 1), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: прийняти заявку
- Стан $(Q=2, D=((0, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((0, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(0, 1)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 0), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 0), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 0), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 1), (0, 0))) \rightarrow u=(1, 0)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 1), (1, 0))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: відхилити заявку
- Стан $(Q=2, D=((1, 1), (1, 1))) \rightarrow u=(1, 1)$, рішення: відхилити заявку

Дякую за увагу!