

Алгоритм зведення симетричної матриці до тридіагональної із застосуванням QR та QR розкладів

Студент КН-2: Першута Павло Володимирович
Науковий керівник: Малашонок Геннадій Іванович

Постановка задачі

- Дослідити та покращити алгоритм QR-розкладу
- Розробити блочно-рекурсивний алгоритм зведення симетричної матриці до тридіагональної на основі QR та QP розкладів зі складністю матричного множення
- Протестувати запропонований алгоритм
- Визначити оптимальні параметри запуску

QR та QP розклади

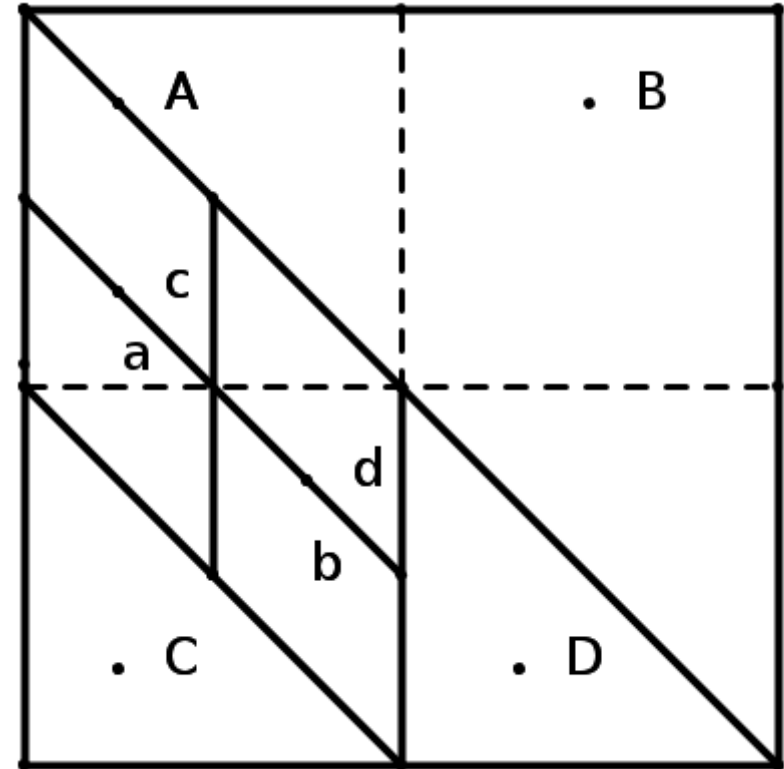
- Матриця M має розмір $2^N \times 2^N$

$$(1) C = Q_1 C^U, \quad M_1 = \text{diag}(I, Q_1) M = \begin{pmatrix} A & B \\ C^U & D_1 \end{pmatrix}$$

$$(2) Q_2 \begin{pmatrix} A \\ C^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^U \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = Q_2 M_1 = \begin{pmatrix} A_1^U & B_1 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) D_2 = Q_3 D^U, \quad M_3 = \text{diag}(I, Q_3) M_2 = \begin{pmatrix} A_1^U & B_1 \\ 0 & D_3^U \end{pmatrix}$$

$$(4) QM = R, M = Q^T R, \text{ де } Q = \text{diag}(I, Q_3) Q_2 \text{diag}(I, Q_1)$$



Оптимізація QR-розкладу

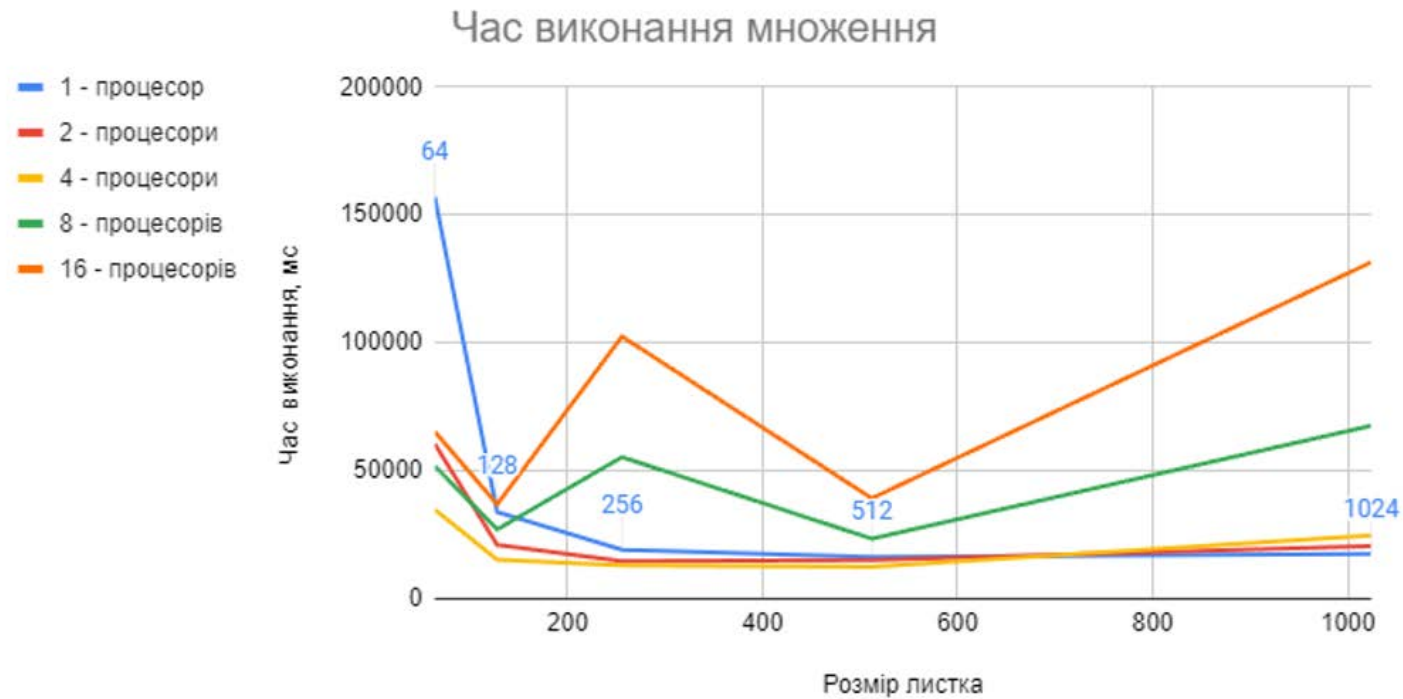
- Використали метод швидкого матричного множення Винограда-Штрассена для зменшення складності алгоритму
- Складність блоково-рекурсивного QR:

$$C_{qr}(n) = 1.29n^3 - 0.32n$$

- Складність оптимізованого QR:

$$C_{qr}(n) = 7.92n^{2.81} - 2.28n$$

Оптимальний листковий розмір



Результати тестування алгоритму QR-розкладу

Результати тестування алгоритму QR-розкладу на 4-х ядрах:

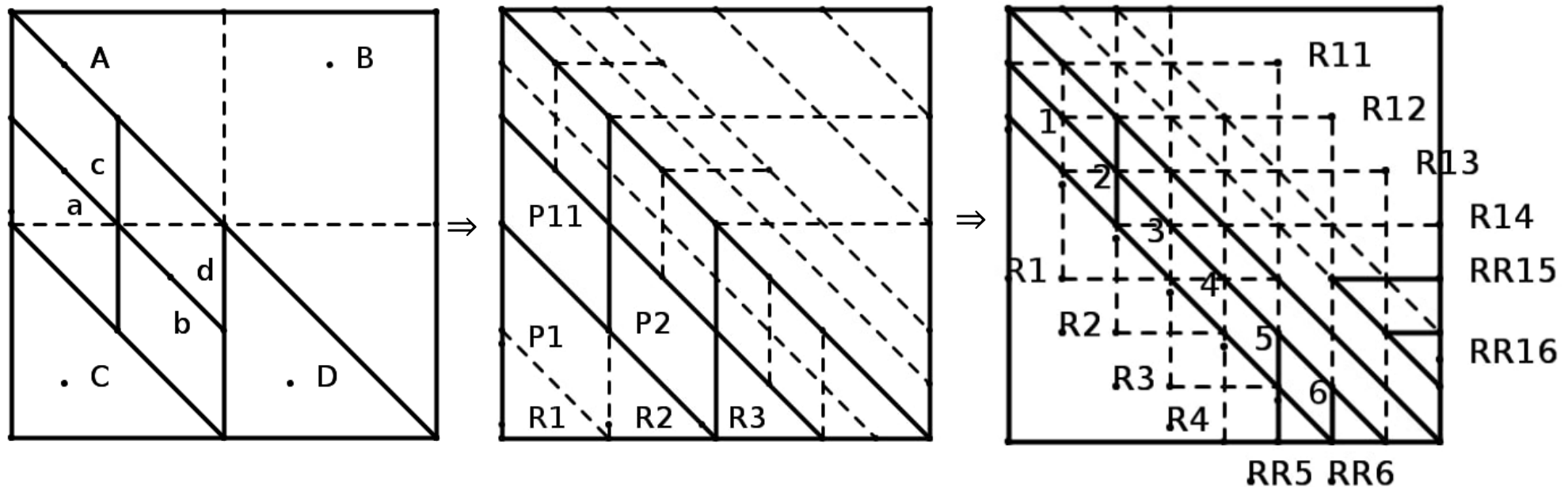
Процесори	Розмір даних	Розмір листка	Час виконання, мс
4	1024	128	217969
4	1024	256	86892
4	1024	512	73520
4	1024	1024	80010

Результати тестування алгоритму модифікованого QR-розкладу:

Процесори	Розмір даних	Розмір листка	Час виконання, мс
4	1024	128	146503
4	1024	256	76277
4	1024	512	100318
4	1024	1024	73552

Запропонований алгоритм

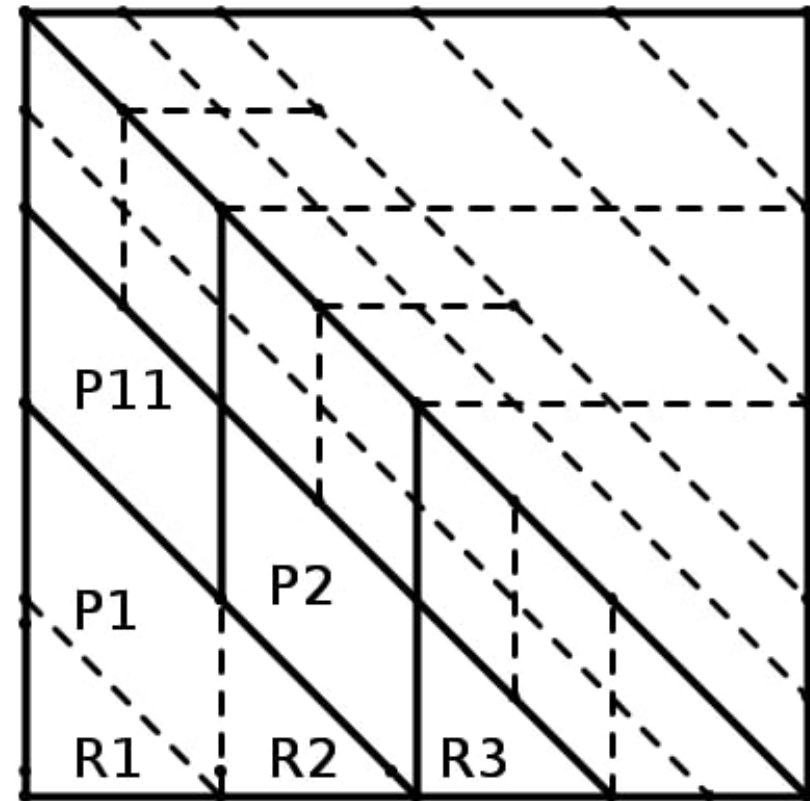
- Матриця M розміру $2^N \times 2^N$ є симетричною
- Матриця повороту Q для симетричного верхнього правого блоку є транспонованою матрицею повороту відповідного симетричного нижнього лівого блоку



Q3RP-розклад

$$C(n) = 3C_{qr}\left(\frac{n}{4}\right) + 3C_{qp}\left(\frac{n}{4}\right) + 14M\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{4}\right)$$

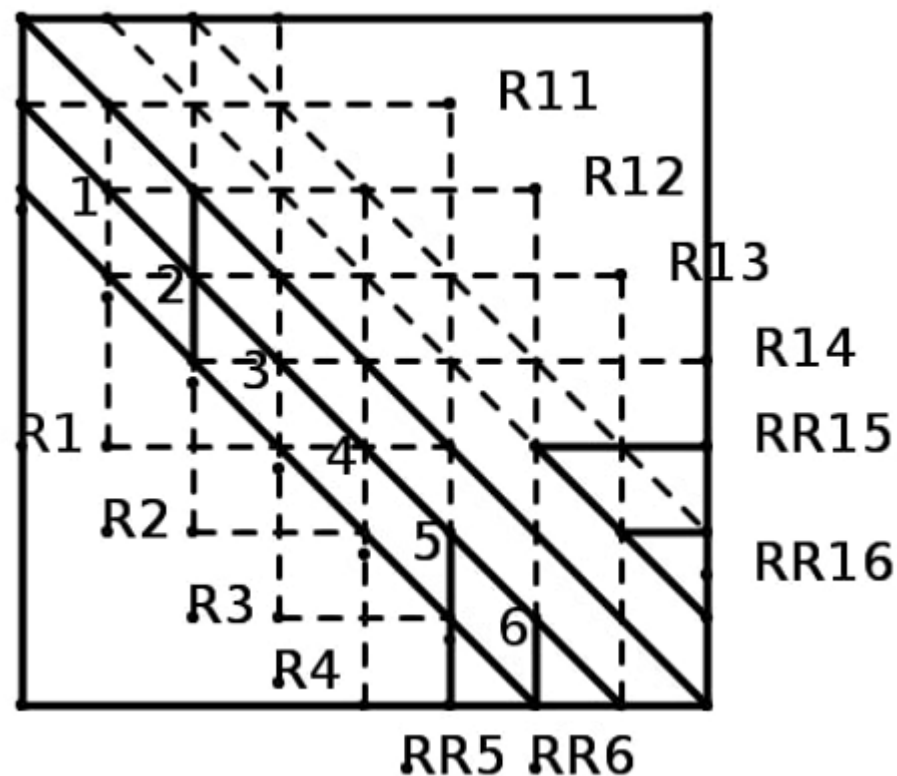
$$C(n) = 12.34n^3 - 16n$$



Алгоритм Ribbon

$$C(n) = 6C_{qp}\left(\frac{n}{4}\right) + 2C_{qr}\left(\frac{n}{8}\right) + 4C_{qr}\left(\frac{n}{4}\right) + 36M\left(\frac{n}{4}\right) + 2M\left(\frac{n}{8}\right)$$

$$C(n) = 0.67n^3 + 1.61n^2 - 0.4n$$



Результати тестування послідовного Q3RP-розкладу

Розмір даних	Час виконання, мс
16	38
32	38
64	79
128	350
256	1622
512	6379
1024	67111
2048	505582

Результати тестування Q3RP-розкладу

Процесори	Розмір даних	Розмір листка	Час виконання, мс	Прискорення
1	1024	64	460137	0,14
1	1024	128	116387	0,57
1	1024	256	50480	1,33
1	1024	512	82148	0,82
2	1024	64	519403	0,12
2	1024	128	116680	0,57
2	1024	256	46463	1,44
2	1024	512	52904	1,26
4	1024	64	367683	0,18
4	1024	128	108088	0,62
4	1024	256	49355	1,35
4	1024	512	65634	1,02

Наукова новизна

- Оптимізовано алгоритми QR та QP розкладів з використанням методу швидкого множення матриць Штрассена.
- Запропоновано блочно-рекурсивний алгоритм зведення симетричної матриці до тридіагональної на основі QR та QP розкладів зі складністю матричного множення

Дякую за увагу!