Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«Оцінювання випадкових полів на «килимі» Серпінського»**

Виконала: студентка 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна математика

Бойченко Вікторія Миколаївна

Керівник: Щестюк Н. Ю.,
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент: Файнзільберг Л.С.
доктор технічних наук, професор

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
«____» _____ 20____ р.

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., д.ф.-м.н. Олійник Б. В.
_____
(підпис)
„____”_____2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу

студенту Бойченко Вікторії факультету інформатики 4 курсу
ТЕМА оцінювання випадкових полів на «килимі» Серпінського
Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання
Вступ

1. Інтерполяція стаціонарної випадкової послідовності з одним пропущеним значенням у момент t=0.
2. Інтерполяція лінійного функціонала від стаціонарної випадкової послідовності з пропущеними значеннями у деякому інтервалі.
3. Інтерполяція лінійного функціонала від однорідного випадкового поля з областю оцінювання (пропущеними значеннями) у деякому прямокутнику
4. Побудова області оцінювання у вигляді килима Серпінського

Висновки

Список літератури
Додатки

Дата видачі „___” _____ 2021 р. Керівник _____
(підпис)
Завдання отримав _____
(підпис)

Тема: Оцінювання випадкових полів на «килимі» Серпінського

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на бакалаврську роботу.	21.10.2021	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи.	21.11.2021	
3.	Опрацювання матеріалів	21.12.2021	
4.	Написання теоретичної частини	1.04.2022	
5.	Розв’язання поставленої задачі, аналіз проблеми	1.05.2022	
6.	Розробка комп’ютерної реалізації алгоритму	15.06.2022	
7.	Передзахист кваліфікаційної роботи	15.06.2022	
8.	Внесення додаткових корекцій	27.06.2022	
9.	Захист кваліфікаційної роботи	4.07.2022	

Студент: Бойченко В.М.

Керівник: Щестюк Н.Ю.

“_____”_____

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ....5
ВСТУП....6
1 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНОГО» ЗНАЧЕННЯ....8
1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ....8
1.2 ПРИКЛАД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ОДНОГО «ПРОПУЩЕНОГО» ЗНАЧЕННЯ....10
2 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНИХ» N ЗНАЧЕНЬ....13
2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ....13
2.2 ПРИКЛАД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ N «ПРОПУЩЕНИХ» ЗНАЧЕНЬ....17
3 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНИХ» NXM ЗНАЧЕНЬ....20
3.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ....20
3.2 ПРИКЛАД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ NXM «ПРОПУЩЕНИХ» ЗНАЧЕНЬ....23
4 ПОБУДОВА ОБЛАСТІ ОЦІНЮВАННЯ У ВИГЛЯДІ ВАРІАЦІЇ КИЛИМА СЕРПІНСЬКОГО....28
4.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО «КИЛИМ» СЕРПІНСЬКОГО....28
4.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ....30
4.3 РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПЕРШОЇ ТА ДРУГОЇ ІТЕРАЦІЙ КИЛИМА СЕРПІНСЬКОГО....32
ВИСНОВКИ....41
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ....42
ДОДАТОК А....44

АНОТАЦІЯ

Перший розділ містить інтерполяцію стаціонарної випадкової послідовності з одним пропущеним значенням у момент t=0

У другому розділі розглянута інтерполяція лінійного функціонала від стаціонарної випадкової послідовності з пропущеними значеннями у деякому інтервалі.

У третьому розділі представлено інтерполяція лінійного функціонала від однорідного випадкового поля з областю оцінювання (пропущеними значеннями) у деякому прямокутнику.

У четвертому розділі наявна побудова області оцінювання у вигляді «килима» Серпінського. Порівняно результати оцінювання на першому та другому кроці ітерацій.

У роботі знаходиться ілюстративні приклади розв’язку задач а також спосіб розв’язання задачі для «килима» Серпінського реалізацією на мові програмування Python.

ВСТУП

Останнім часом набуває популярності дослідження пов’язані з аналізом випадкових процесів і полів на килимі Серпінського. Серед відомих сфер застовування є розробки в галузях нафтових технологій, встановленні антен, також дослідження, пов’язані з факторами радіації та високої температури. Так, фрактальна антена у вигляді килиму Серпінського може бути використана для кращого мобільного зв’язку та Wi-Fi в телефонах. Властивості самоподібність та масштабна інваріантність надають можливість легко пристосуватися до різних частот [1]. З’являється все більше досліджень про фрактальні антени, використовуючи геометрію модифікованого килиму Серпінського, наприклад, у наступних джерелах Шарма Н. та Шарма В., Саги А. та інших [2]–[6].

Оцінювання випадкових полів на килимі Серпінського (інтерполяція) є новою та важливою темою для дослідження. Теорія про методи розв’язання задач лінійної оцінки стохастичних процесів була започаткована Колмогоровим А.М. [7]. Яглом А.М. розглядав задачі оцінювання полів, у яких спектральну щільність можна було представити у вигляді дробово-раціональної функції [8], [9]. Також ці результати можна знайти в підручнику Ширяєва А.Н. [3, с. 450-453]. Подальші дослідження в напрямку оцінки функціоналів від випадкових полів були здійснені в монографії Моклячуком М.П., Щестюк Н.Ю. [11]. У статті Щестюк Н.Ю., Флоренко А. Ф. та Заєць Н. було розглянуто інтерполяція випадкового поля для області спостережень у вигляді системи вкладених прямокутників [12].

До цього не було розглянуто оцінювання невідомих значень на основі килиму Серпінського, тому реалізація цього процесу стало метою моєї роботи. У цій роботі було досліджено інтерполяцію пропущених значень поля в кількох різних випадках для того, щоб розглянути оцінювання випадкових полів на килимі Серпінського.

Завданням цієї роботи є проілюструвати на власних прикладах оцінювання випадкових полів для одного невідомого значення, кількох на інтервалі,

прямокутника значень на площині та знайти оцінки для перших двох ітерацій, порівняти та виявити закономірності, а також створити програмний продукт реалізації цих прикладів.

У першому розділі розглянуто оцінку одного пропущеного значення та наведено приклад розв’язання такої задачі. У другому розділі розглянуто оцінювання лінійного функціонала від невідомих пропущених n-значень разом з представленням ілюстративного прикладу з умовами аналогічними задачі в першому розділі. Третій розділ представляє оцінку невідомих $N \times M$ значень на площині, що представляється у вигляді прямокутника.

Розглянутий матеріал в попередніх розділах дозволяє легше зрозуміти в четвертому розділі підхід оцінювання килиму Серпінського та використати для обчислювання оцінки. Представлено теоретичні відомості про цей фрактал, постановку задачі з наведенням загальних формул для обчислення та показано комп’ютерну реалізацію задачі на мові програмування Python з основним використанням бібліотеки sympy для обрахування невідомих значень за допомогою символів. На перших двох ітераціях «килиму» Серпінського порівняно їх оцінки та показано знайдені закономірності.

1 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНОГО» ЗНАЧЕННЯ

1.1 Постановка задачі

Нехай задано $\xi = \{\xi_n\}$ – регулярна послідовність зі спектральною щільністю $f(\lambda)$. Найпростішою задачею інтерполяції є задача побудови оптимальної (у середньоквадратичному сенсі) лінійної оцінки за результатами спостережень стаціонарної випадкової послідовності $\{\xi_n | \, n = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ «пропущеного» значення ξ_0 [3, с. 450].

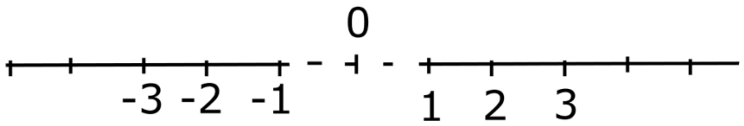

Рисунок 1 – візуальна інтерпретація пропущеного значення

Позначимо $H^0(\xi)$ як замкнений лінійний многовид, породжений зі ξ_n, , $n \neq 0$. Тоді відповідно до теореми [3, с. 176] довільна випадкова величина $\eta \in H^0(\xi)$ може бути представлена у вигляді

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) \, Z(d\lambda),$$

де $\widehat{\varphi}(\lambda) -$ спектральна характеристика, належить $H^0(F)$ – замкненому лінійному многовиду (простір значень, серед яких шукаємо наближення), що породжений функціями $e^{i\lambda n}, \; n \neq 0$.

Оцінка пропущеного значення

$$\widehat{\xi_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(\lambda) \, Z(d\lambda),$$

буде оптимальною за умови, якщо

$$E\left|\xi_0 - \widehat{\xi_0}\right|^2 \to \min(inf)$$

Тобто:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |1 - \widehat{\varphi}(\lambda)|^2 F(d\lambda) \to min$$

Відповідність між значеннями послідовності можна ввести через інтеграл.

$$\xi_0 \leftrightarrow e^{i\lambda 0}$$

$$\dots$$

$$\xi_n \leftrightarrow e^{i\lambda n}$$

Зі властивостей «перпендикулярів» у гільбертовому просторі $H^0(F)$ [13] випливає, що функція $\widehat{\varphi}(\lambda)$ повністю визначена двома умовами:

1) $\widehat{\varphi}(\lambda) \in H^0(F)$
2) $1 - \widehat{\varphi}(\lambda) \perp H^0$

З умови 2) про перпендикулярність випливає, що:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(1 - \widehat{\varphi}(\lambda)\big) e^{in\lambda} f(\lambda) d\lambda = 0, \qquad n \neq 0$$

Умова про рівність нулю виконується, лише коли решта елементів рівні константі:

$$\big(1 - \widehat{\varphi}(\lambda)\big) f(\lambda) = \alpha, \qquad \alpha = const$$

Тож друга умова в результаті дає:

$$\widehat{\varphi} = 1 - \frac{\alpha}{f(\lambda)}, \qquad (1)$$

Для подальших обчислень необхідно буде виконувати розклад $\frac{1}{f(\lambda)}$ в ряд Фур'є.

Знаходження похибки $\delta^2 = E\left|\xi_0 - \widehat{\xi_0}\right|^2$ можемо обчислити завдяки умові 1), звідки нульовий коефіцієнт $\widehat{\varphi}_0$ у розкладі Фур'є дорівнює нулю

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}_0(\lambda) d\lambda = 2\pi - \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}$$

Звідси випливає значення α як:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}}, \qquad (2)$$

Тому за теоремою Колмогорова [3, с. 451] при умові мінімальності [1, 5] (є необхідною та достатньою умовою, за якої інтерполяція невідомих значень без помилок є неможливою):

$$\int_{-\pi}^{-\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty$$

Виконуються формули (1) та (2), а також середньоквадратична похибка інтерполяції знаходиться за формулою:

$$\delta^2 = E\left|\xi_0 - \widehat{\xi_0}\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - \widehat{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda =$$

$$= |\alpha|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{f^2(\lambda)} = \frac{4\pi^2}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}} = 2\pi\alpha, \qquad (3)$$

Унаслідок цієї теореми отримуємо, якщо

$$\hat{\phi}(\lambda) = \sum_{k \le N} C_k e^{i\lambda k}, \qquad \text{то } \widehat{\xi_0} = \sum_{k \le N} C_k \xi_k$$

Наприклад, якщо $\hat{\phi}(\lambda) = 2 \cdot e^{i\lambda 3} + e^{-i\lambda 5}$, то можемо встановити відповідність:

$$e^{i\lambda 3} \leftrightarrow \xi_3$$
$$e^{-i\lambda 5} \leftrightarrow \xi_{-5}$$

Отже, оцінкою є $\widehat{\xi_0} = \xi_3 + \xi_{-5}$

1.2 Приклад інтерполяції одного «пропущеного» значення

Нехай $f(\lambda) -$ спектральна щільність задана:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|a|^2}{(1-ae^{-i\lambda})^2}$$

Виразимо обернену щільність, спектральну характеристику та α:

$$\frac{1}{f(\lambda)} = 2\pi\left(1-ae^{-i\lambda}\right)(1-ae^{i\lambda})(1-|a|^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{f(\lambda)} = 2\pi\left(1+|a|^2-a(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda})\right)(1-|a|^2)^{-1}$$

$$\hat{\phi}(\lambda) = 1-\frac{\alpha}{f(\lambda)}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{f(\lambda)}}$$

Розкладемо обернене значення спектральної щільності в ряд Фур'є:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{f(\lambda)} = \int_{-\pi}^{\pi}2\pi\left(1+|a|^2-a(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda})\right)(1-|a|^2)^{-1}d\lambda$$

$$= \frac{2\pi}{(1-|a|^2)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+|a|^2-a\left(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)\right)d\lambda$$

$$= \frac{2\pi}{(1-|a|^2)}\int_{-\pi}^{\pi}(1+|a|^2)d\lambda - a\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)d\lambda =$$

$$= \frac{4\pi^2(1+|a|^2)}{(1-|a|^2)},$$

де $\int_{-\pi}^{\pi}(1+a^2)d\lambda = 2\pi(1+a^2)$;

а також $a\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)d\lambda = \frac{a}{i}\left(-e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$$= \frac{a}{i}\left(-e^{-i\pi}+e^{i\pi}— e^{i\pi}+e^{-i\pi}\right) = \frac{a}{i}\left(-e^{-i\pi}+e^{i\pi}+e^{i\pi}-e^{-i\pi}\right) =$$

$$= \frac{2a}{i}\left(e^{i\pi}-\frac{1}{e^{i\pi}}\right) =$$

$= [\text{За тотожністю Ейлера: } e^{i\pi} + 1 = 0] = \frac{2a}{i}\left(-1 - (-1)\right) = 0$

Далі проводимо обрахування значення α:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\int_{\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi^2(1+|a|^2)}{(1-|a|^2)}} = \frac{(1-|a|^2)}{2\pi(1+|a|^2)}$$

Підставляємо знайдене значення до формули спектральної характеристики:

$$\hat{\phi}(\lambda) = 1 - \frac{\alpha}{f(\lambda)} = 1 - \frac{(1-|a|^2)}{2\pi(1+|a|^2)} \cdot \frac{2\pi\left(1+|a|^2 - a(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda})\right)}{(1-|a|^2)} =$$

$$= 1 - \frac{\left(1+|a|^2 - a(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda})\right)}{(1+|a|^2)} = \frac{1+|a|^2 - (1+|a|^2) + a\left(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}\right)}{(1+|a|^2)}$$

У результаті отримуємо:

$$\hat{\phi}(\lambda) = \frac{a}{(1+|a|^2)}\left(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}\right)$$

$$\widehat{\xi_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\phi}(\lambda) Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\left(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}\right)}{(1+|a|^2)} Z(d\lambda) =$$

$= [\text{За наслідком теореми Колмогорова}] = \frac{a}{(1+|a|^2)}(\xi_{-1} + \xi_1)$

Похибка інтерполяції дорівнює:

$$\delta^2 = E\left|\xi_0 - \widehat{\xi_0}\right|^2 = 2\alpha = \frac{4\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}} = \frac{2\pi(1-|a|^2)}{2\pi(1+|a|^2)} = \frac{1-|a|^2}{1+|a|^2}$$

При $\alpha = 0.5$, маємо

$$\frac{a}{(1+|a|^2)} = 0.4, \qquad \boldsymbol{\delta^2} = 0.6$$

2 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНИХ» N ЗНАЧЕНЬ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо інтерполяцію лінійного функціонала від стаціонарної випадкової послідовності з набором пропущених значень на деякому інтервалі, де $\xi = \{\xi_n\} -$ регулярна послідовність зі спектральною щільністю $f(\lambda)$.

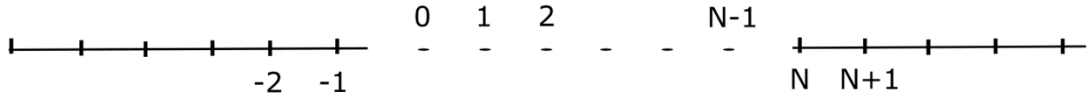

Рисунок 2 – візуальна інтерпретація "пропущених" N значень

Нехай нам задано функціонал A_N з відомими коефіцієнтами a_k:

$$A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \xi_k$$

Скористуємося раніше згаданою властивістю встановлення відповідності між значеннями послідовності:

$$A_N(e^{i\lambda k}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{i\lambda k}$$

Необхідно знайти оцінку пропущених значень та похибку інтерполяції.

Нагадаємо, функція спектральної характеристики $\widehat{\varphi}(\lambda)$ повністю визначається двома умовами:

1) $\widehat{\varphi}(\lambda) \in H^{-0}(F)$

2) $\left(\varphi(\lambda) - \widehat{\varphi}(\lambda)\right) \perp H^{-0}$

Геометричний зміст умови мінімальності, введеної Колмогоровим [14], полягає в тому, щоб довжина перпендикуляра $h = \varphi(\lambda) - \widehat{\varphi}(\lambda)$ не дорівнювала нулю. Унаслідок безпомилкова інтерполяція даних пропущених не буде траплятися.

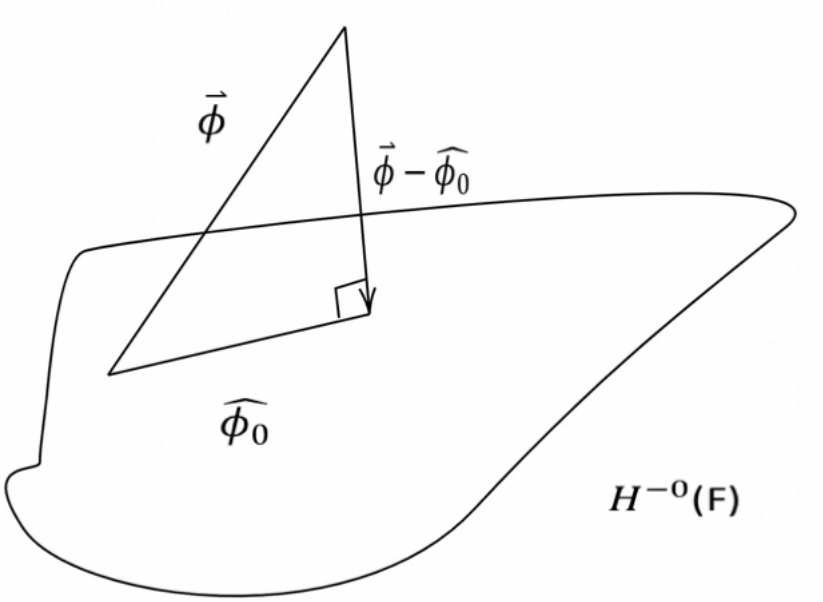

Рисунок 3 – зображення проекції на Гілбертів простір, яка є оптимальною оцінкою пропущених значень

Завдяки другої умови для спектральної характеристики про перпендикулярність отримуємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(A_N\left(e^{i\lambda k}\right) - h\left(e^{i\lambda k}\right)\right)\right|^2 e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda = 0,$$

Далі з цього випливає рівність (для спрощення запису будемо надалі користуватися без вмісту дужок вказаних символів)

$$(A_N - h) f(\lambda) = C_N, \qquad k \notin [0, N]$$

$$A_N - h = \frac{C_N}{f}$$

Отже, отримали значення спектральної характеристики:

$$h = A_N - \frac{C_N}{f}, \qquad (1)$$

де вектор C_N визначається

$$C_N\left(e^{i\lambda k}\right) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{i\lambda k}$$

З умови 1) можемо знайти коефіцієнти C_N в розкладі $h = 0$ для $n = \overline{1, N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)d\lambda = 0$$

Підставляючи замість $h = A_N - \frac{C_N}{f}$, знаходимо рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_N - \frac{C_N}{f}\right)d\lambda = 0$$

$$A_N = \frac{C_N}{f}$$

Далі можемо розписати у вигляді рядів для подальшого обчислення:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{i\lambda k} = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{i\lambda k}\left(\ldots + r_{-2}e^{-2i\lambda} + r_{-1}e^{-i\lambda} + r_0 + r_1 e^{i\lambda} + r_2 e^{2i\lambda} + \ \ldots\right)$$

Можемо виразити, що стоїть при кожному $e^{i\lambda k}$ для розуміння, як виглядатиме матриця коефіцієнтів при векторі $\vec{c}$:

$$\begin{cases} e^0: a_0 = c_0 r_0 + c_1 r_{-1} + c_2 r_{-2} + \cdots + c_N r_{-N+0} \\ e^{i\lambda}: a_1 = c_0 r_1 + c_1 r_0 + c_2 r_{-1} \cdots + c_N r_{-N+1} \\ e^{2i\lambda}: a_2 = c_0 r_2 + c_1 r_1 + c_2 r_0 + \cdots + c_N r_{-N+2} \\ \cdots \\ e^{Ni\lambda}: a_N = c_0 r_N + c_1 r_{N-1} + c_2 r_{N-2} + \cdots + c_N r_{-N+N} \end{cases}$$

У матричному вигляді матимемо:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & \cdots & r_{-N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_N & r_{N-1} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \cdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

або в скороченому форматі:

$$\vec{a} = R \cdot \vec{c}$$

Звідси можемо виразити $\vec{c}$:

$$\vec{c} = R^-1 \cdot \vec{a}$$

Далі можемо виразити спектральну характеристику, загальний вигляд оцінки функціоналу та похибку оцінювання:

$$h(\lambda) = A - \sum_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}} (R^{-1}\vec{a})_k e^{ik\lambda}$$

Оцінка пропущених значень може бути знайдена наступним чином:

$$\hat{A}_n \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda) Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(A - R^{-1}\vec{a}\overrightarrow{e^{\imath\lambda}} \right) Z(d\lambda) =$$

Спектральна характеристика $h(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_k\xi$ мінімізує середньоквадратичну похибку. Тому похибка інтерполяції дорівнює [12]:

$$\delta^2 = \Delta(h(f), f) = \min_{h \in H^{-0}(F)} (h(f), f) = E\left|A_n - \hat{A}_n\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{|C_N(\lambda)|^2}{f^2(\lambda)}$$

2.2 Приклад інтерполяції N «пропущених» значень

Нехай задано спектральну щільність:

$$\boldsymbol{f(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-i\lambda})^2}$$

Знаходимо обернену спектральну щільність для подальших обчислювань:

$$\frac{1}{f(\lambda)} = 2\pi\left(1 - \alpha e^{-i\lambda}\right)(1 - \alpha e^{i\lambda})$$

$$\frac{1}{f(\lambda)} = 2\pi\left(1 + \alpha^2 - \alpha\left(e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}\right)\right)$$

Визначаємо коефіцієнти розкладу спектральної щільності в ряд Фур'є:

$$r_0 = 1 + \alpha^2$$

$$r_{-1} = r_1 = -\alpha$$

$$r_k = 0, k \in Z \,/\, K$$

$$K = \{-1,0,1\}$$

Загальний запис оберненої спектральної щільності:

$$\frac{1}{f(\lambda)} = 2\pi \sum_{p} r_p e^{ip\lambda}$$

Серед наших задач з'ясувати вектор $\vec{c}$ та значення H, що є спектральною характеристикою:

$$\vec{c} - ?$$
$$H - ?$$

Зі знайдених раніше коефіцієнтів оберненої спектральної щільності створюємо матрицю R для того, щоб знайти $\vec{c}$, використовуючи теорію згадану раніше в цьому розділі:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = 2\pi \cdot \begin{pmatrix} (1+\alpha^2) & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & (1+\alpha^2) & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 \cdots & -\alpha & (1+\alpha^2) & -\alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha & (1+\alpha^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = R\vec{c}$$
$$\vec{c} = R^{-1}\vec{a}$$

Звідси можемо виразити спектральну характеристику:

$$h(\lambda) = A_N(\lambda) - f^{-1}(\lambda) \times \sum_{k \in K} (R^{-1}\overline{a_K})_{(k)}\, e^{ik\lambda}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{ik\lambda} - \left(r_0 e^0 + r_{-1} e^{-ik\lambda} + r_1 e^{ik\lambda}\right) \sum_{k=0}^{n} c_k\, e^{ik\lambda}$$

Оцінка пропущених значень може бути знайдена наступним чином:

$$\hat{A}_n\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)Z(d\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\xi_k - \left(r_0 e^0 + r_{-1}e^{-ik\lambda} + r_1 e^{ik\lambda}\right)\sum_{k=0}^{n} c_k\,\xi_k$$

Спектральна характеристика h(λ) оптимальної лінійної оцінки функціонала A_kξ мінімізує середньоквадратичну похибку [12]. Тому похибка інтерполяції дорівнює:

$$\delta^2 = \Delta(h(f), f) = \min_{h\in H^{-0}(F)}(h(f), f) = E\left|A_n - \hat{A}_n\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{-\pi}\frac{|C_K(\lambda)|^2}{f^2(\lambda)}$$

3 ОЦІНКА «ПРОПУЩЕНИХ» NXM ЗНАЧЕНЬ

3.1 Постановка задачі

Задачею є інтерполяція лінійного функціонала від однорідного випадкового поля з областю оцінювання (пропущеними значеннями) у деякому прямокутнику.

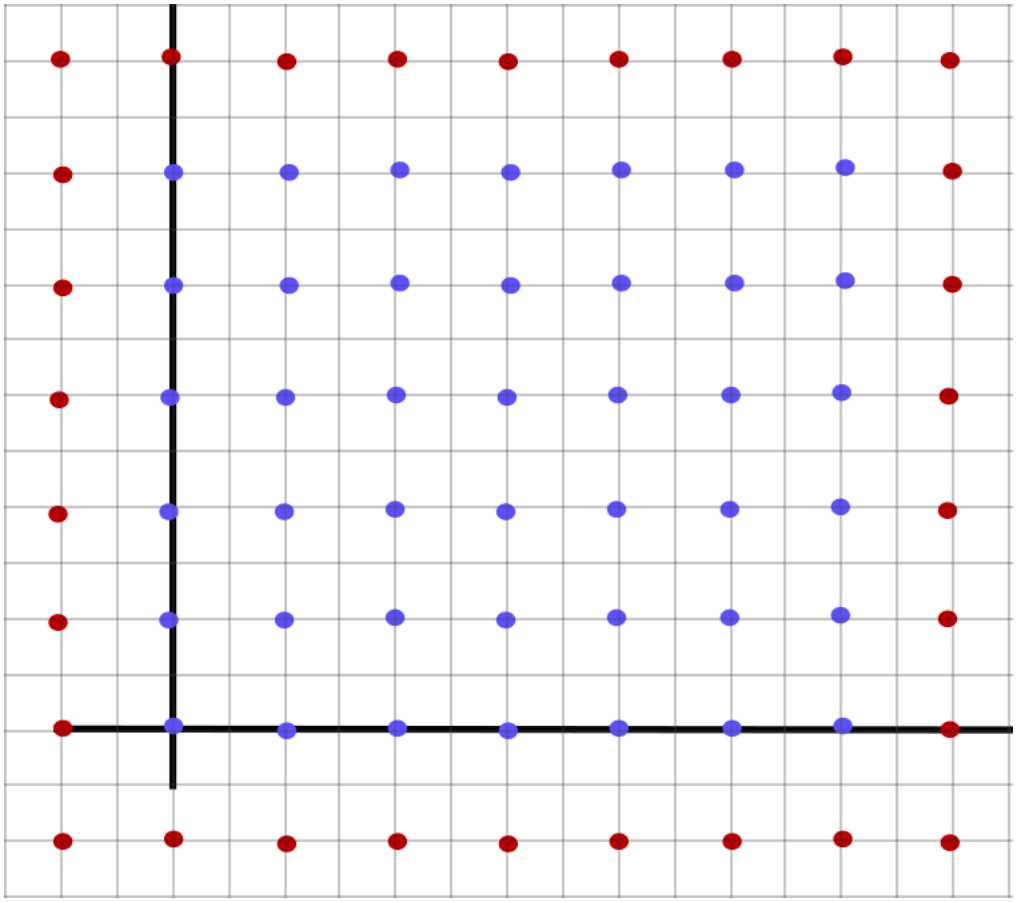

Рисунок 1 - візуальна інтерпретація "пропущених" NxM значень на площині у вигляді прямокутник. Сині точки є невідомі значення для оцінювання, червоні – відомі.

Спостерігаємо однорідне поле $\xi(k,j)$, задане на області $K = \{(k,j): k \in Z\backslash\{0,1,\cdots n\}, j \in Z\backslash\{0,1,\cdots m\}\}$. За невідомими значеннями поля у цій області складається лінійний функціонал:

$$A_{NM} = \sum_{k,j=0}^{n,m} a_{k,j}\,\xi(k,j)\,,$$

де $a_{k,j}$ – відомі коефіцієнти

Необхідно оцінити значення функціонала $\widehat{A_{NM}}$. Вважатимемо, що поле спостерігається без шуму (для інших варіантів було також розглянуто в роботі [11])

Спектральна характеристика оцінки H_{NM}:

$$H_{NM}\left(e^{i(\lambda k+\mu j)}\right) = \sum_{k,j\notin K} h_{k,j}\,e^{i(\lambda k+\mu j)}\,,$$

де $h_{k,j}$ – необхідно знайти для оцінки

$$\hat{A}_{NM} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\,dZ(\lambda,\mu)$$

Використовуючи умову *2)* про перпендикулярність, виводимо значення h_{NM}:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A_{NM} - H_{NM}| f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu = 0$$

$$|A_{NM} - H_{NM}| f(\lambda,\mu) = C_{NM}(\lambda,\mu), \qquad (k,j) \notin K$$

$$H_{NM} = A_{NM} - \frac{C_{NM}}{f(\lambda,\mu)}$$

За умовою 1) можемо виразити значення C_{NM}:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu) d\lambda d\mu = 0 \;\rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|A_{NM}-\frac{C_{NM}}{f(\lambda,\mu)}\right|d\lambda d\mu=0\rightarrow$$

$$A_{NM}=C_{NM}\ \frac{1}{f(\lambda,\mu)}$$

$$C_{NM}=A_{NM}\ \frac{1}{f(\lambda,\mu)}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{kj}\,e^{i(\lambda k+\mu j)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}c_{kj}\,e^{i(\lambda k+\mu j)}\left(\ldots+r_{-10}e^{-i\lambda}+r_{00}+r_{01}e^{i\mu}+r_{10}e^{i\lambda}\right.$$

$$\left.+\,r_{11}e^{i(\lambda+\mu)}+\ \ldots\right)$$

У скороченому вигляді можемо записати систему лінійний рівнянь відносно вектора $\vec{c}$, що буде виглядати як

$$\vec{a}=R\vec{c},$$

Де R – матриця коефіцієнтів розкладу оберненої функції спектральної щільності в ряд Фур'є, розмірністю $NM\times NM$, що визначається наступною формулою:

$$b_{kj}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\lambda}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}d\lambda$$

А сама матриця матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{0,2} \\ \vdots \\ a_{1,0} \\ \vdots\, a_{N,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ \vdots \\ c_{1,0} \\ \vdots\, c_{N,M} \end{pmatrix} \cdot R$$

де матриця R може бути записана наступним чином:

$$R = \begin{pmatrix} r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} & \cdots & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & r_{-1,-2} & \cdots & r_{-N,-M} \\ r_{0,1} & r_{0,0} & r_{0,-1} & \cdots & r_{-1,1} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & \cdots & r_{-N,-M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{1,-2} & \cdots & r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} & \cdots & r_{-N+1,-M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{N,M} & r_{N,M-1} & r_{N,M-2} & \cdots & r_{N-1,M} & r_{N-1,M-1} & r_{0,-2} & \cdots & r_{-N+N,M-M} \end{pmatrix}$$

Визначаємо коефіцієнти при $e^{i(\lambda k+\mu j)}$:

$$\begin{cases} e^{0}: a_{00} = c_{00}r_{00} + c_{01}r_{0-1} + \cdots + c_{10}r_{-10} + c_{11}r_{-11} + \cdots + c_{NM}r_{(-N,-M)} \\ e^{i\mu}: a_{01} = c_{00}r_{01} + c_{01}r_{00} + \cdots + c_{10}r_{-11} + c_{11}r_{-10} + \cdots + c_{NM}r_{(-N,-M+1)} \\ \cdots \\ e^{i\lambda}: a_{10} = c_{00}r_{10} + c_{01}r_{1-1} + \cdots + c_{10}r_{00} + c_{11}r_{0-1} \cdots + c_{NM}r_{(-N+1,-M)} \\ \cdots \\ e^{Ni\lambda+Mk\lambda}: a_{NM} = c_{00}r_{NM} + c_{01}r_{N,M-1} + \cdots + c_{10}r_{N-1,M} + \cdots + c_{NM}r_{(0,0)} \end{cases}$$

$$\vec{a} = R\vec{c}$$

$$\vec{c} = R^{-1}\vec{a}$$

$$h_{NM} = \vec{a} - R^{-1}\vec{a} \cdot \frac{1}{f(\lambda,\mu)}$$

3.2 Приклад інтерполяції NxM «пропущених» значень

Нехай задано наступну функцію спектральної щільності:

$$f(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|1-\alpha e^{-i\lambda}|^2}\cdot\frac{1}{|1-\beta e^{-i\mu}|^2}$$

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=4\pi^2\left(1-\alpha e^{-i\lambda}\right)^2\left(1-\beta e^{-i\mu}\right)^2$$

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=4\pi^2\left(1-\alpha e^{-i\lambda}\right)(1-\alpha e^{i\lambda})\left(1-\beta e^{-i\mu}\right)(1-\beta e^{i\mu})$$

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=4\pi^2\left(1+\alpha^2-\alpha\left(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)\right)\left(1+\beta^2-\beta\left(e^{-i\mu}+e^{i\mu}\right)\right)$$

$$r_{0,0}=4\pi^2(1+\alpha^2)(1+\beta^2)$$

$$r_{0,-1}=r_{0,1}=-4\pi^2\beta(1+\alpha^2)$$

$$r_{-1,0}=r_{1,0}=-4\pi^2\alpha(1+\beta^2)$$

$$r_{1,1}=r_{1,-1}=r_{-1,1}=r_{-1,-1}=4\pi^2\alpha\beta$$

$$r_{kj}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}e^{i(k\lambda+j\mu)}\,d\lambda d\mu=0$$

Винісши за дужки $4\pi^2$ отримуємо матрицю R зі загальною картиною:

$$\begin{pmatrix}
(1+\alpha^2)(1+\beta^2) & -\beta(1+\alpha^2) & r_{0,-2} & \cdots & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & r_{-1,-2} & \cdots & -\alpha(1+\beta^2)\\
-\beta(1+\alpha^2) & (1+\alpha^2)(1+\beta^2) & -\beta(1+\alpha^2) & \cdots & r_{-1,1} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & \cdots & \alpha\beta\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{1,-2} & \cdots & (1+\alpha^2)(1+\beta^2) & -\beta(1+\alpha^2) & r_{0,-2} & \cdots & r_{-N+1,-M}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
-\alpha(1+\beta^2) & \alpha\beta & r_{N,M-2} & \cdots & r_{N-1,M} & r_{N-1,M-1} & r_{0,-2} & \cdots & (1+\alpha^2)(1+\beta^2)
\end{pmatrix}$$

Діагональним елементом є: $r_{0,0}=(1+\alpha^2)(1+\beta^2)$

Координати по боках: $r_{0,-1}=r_{0,1}=-\beta(1+\alpha^2)$

В нижньому та верхньому трикутнику діагональ з діагональним елементом: $r_{-1,0}=r_{1,0}=-\alpha(1+\beta^2)$

Координати по боках $r_{1,1}=r_{1,-1}=r_{-1,1}=r_{-1,-1}=\alpha\beta$ менших діагоналей. Усі інші значення матриці є нульовими.

Нехай у нас будуть невідомі значення для розмірності $N=2, M=2$.

Знайдемо оцінку функціонала

$$A_K\xi = \sum_0^1 \sum_0^1 a_{k,j}\,\xi_{k,j}$$

Сам функціонал виглядатиме таким чином:

$$A(\lambda,\mu) = a_{(0,0)} + a_{(1,0)}e^{i\lambda} + a_{(0,1)}e^{i\mu} + a_{(1,1)}e^{i\lambda+i\mu}$$

Спектральну характеристику оптимальної оцінки можна обчислити за формулою

$$h(f) = A(\lambda,\mu) - f^{-1}(\lambda,\mu)C(\lambda,\mu)$$

Оскільки

$$f^{-}1(\lambda,\mu)C(\lambda,\mu) =$$

$$= \left(r_{00} + r_{10}e^{i\lambda} + r_{01}e^{i\mu} + r_{1-1}e^{i(\lambda-\mu)} + r_{11}e^{i(\lambda+\mu)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}\sum_{k=0} c_{nk}\,e^{ni\lambda+i\mu k}\right)$$

То можемо виразити c_{kj} з цієї системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{00} = r_{00}c_{00} + r_{0-1}c_{01} + r_{-10}c_{10} + r_{-1-1}c_{11} \\ a_{01} = r_{01}c_{00} + r_{00}c_{01} + r_{-11}c_{10} + r_{-10}c_{11} \\ a_{10} = r_{10}c_{00} + r_{1-1}c_{01} + r_{00}c_{10} + r_{0-1}c_{11} \\ a_{11} = r_{11}c_{00} + r_{10}c_{01} + r_{01}c_{10} + r_{00}c_{11} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} \\ r_{0,1} & r_{0,0} & r_{-1,1} & r_{-1,0} \\ r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{0,0} & r_{0,-1} \\ r_{1,1} & r_{1,0} & r_{0,1} & r_{0,0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \end{pmatrix}$$

Звідси можемо, підставивши значення r та a, отримати

$$\vec{c} = [0.177/\pi, 0.586/\pi, -1.600/\pi, -0.074/\pi]$$

Далі можемо обрахувати за формулою h:

$$h = A_k(\lambda, \mu) - f_{\xi}^{-1}(\lambda, \mu) \times \sum_{k=0}^{1} (R_K^{-1}\overline{a_K})_{k,j}\, e^{i(k\lambda + j\mu)}$$

$$\frac{1}{f(\lambda, \mu)} = 4\pi^2 \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} r_{k,j}\, \mathrm{e}^{(\lambda k + \mu j)}$$

З системи $A_{NM} = RC_{NM}$,

де R – матриця з заданими коефіцієнтами $r(i,j),\ i,j \in \{-1,0,1\}$

Отримуємо вектор $C_{NM} = R^{-1}A_{NM}$

$$C_K(\lambda, \mu) = \sum_{(k,j)\in K} c_{(k,j)} e^{i(k\lambda + j\mu)} = \sum_{(k,j)\in K} (R^{-1}\overrightarrow{a_K})_{(k,j)}\, e^{i(k\lambda + j\mu)}$$
$$= c_{00} + c_{01}e^{i\mu} + c_{10}e^{i\lambda} + c_{11}e^{i(\lambda+\mu)}$$

Спектральна характеристика:

$$\begin{aligned} h_{NM}(\lambda, \mu) &= A_K(\lambda, \mu) - f^{-1}(\lambda, \mu) \times C_K(\lambda, \mu) \\ &= a_{00} + a_{10}e^{i\lambda} + a_{01}e^{i\mu} + a_{11}e^{i(\lambda+\mu)} \\ &- \left(r_{00} + r_{10}e^{i\lambda} + r_{-10}e^{-i\lambda} + r_{01}e^{i\mu} + r_{0-1}e^{-i\mu} + r_{1-1}e^{i(\lambda-\mu)}\right. \\ &\left. + r_{-11}e^{i(-\lambda+\mu)} + r_{11}e^{i(\lambda+\mu)} + r_{-1-1}e^{i(-\lambda-\mu)}\right) \\ &\cdot \left(c_{00} + c_{01}e^{i\mu} + c_{10}e^{i\lambda} + c_{11}e^{i(\lambda+\mu)}\right) \end{aligned}$$

Унаслідок спрощення формул:

$$a_{00} - r_{00}c_{00} - r_{0-1}c_{01} - r_{-1-1}c_{11} - r_{-10}c_{10} = 0$$
$$a_{10} - r_{10}c_{00} - r_{1-1}c_{01} - r_{00}c_{10} - r_{0-1}c_{11} = 0$$
$$a_{01} - r_{01}c_{00} - r_{00}c_{01} - r_{-11}c_{10} - r_{-10}c_{11} = 0$$
$$a_{11} - r_{11}c_{00} - r_{10}c_{01} - r_{01}c_{10} - r_{00}c_{11} = 0$$

Отримуємо шукану лінійну оцінку функціонала

$$\widehat{\mathrm{A_K}}\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}\, dZ(\lambda,\mu) =$$

$$= \xi_{-1,0}\cdot(-\mathrm{r}_{-10}\mathrm{c}_{00} - \mathrm{r}_{-1-1}\mathrm{c}_{01}) + \xi_{0,-1}\cdot(-\mathrm{r}_{0-1}\mathrm{c}_{00} - \mathrm{r}_{-1-1}\mathrm{c}_{10}) + \xi_{2,0}$$
$$\cdot(-\mathrm{r}_{10}\mathrm{c}_{10} - \mathrm{r}_{1-1}\mathrm{c}_{11}) + \xi_{0,2}\cdot(-\mathrm{r}_{01}\mathrm{c}_{01} - \mathrm{r}_{-11}\mathrm{c}_{11}) + \xi_{-1,1}$$
$$\cdot(-\mathrm{r}_{-11}\mathrm{c}_{00} - \mathrm{r}_{-10}\mathrm{c}_{01}) + \xi_{1,-1}\cdot(-\mathrm{r}_{1-1}\mathrm{c}_{00} - \mathrm{r}_{0-1}\mathrm{c}_{10}) + \xi_{-1,-1}$$
$$\cdot(-\mathrm{r}_{-1-1}\mathrm{c}_{00}) + \xi_{2,1}\cdot(-\mathrm{r}_{11}\mathrm{c}_{10} - \mathrm{r}_{10}\mathrm{c}_{11}) + \xi_{2,-1}\cdot(-\mathrm{r}_{1-1}\mathrm{c}_{10}) + \xi_{1,2}$$
$$\cdot(-\mathrm{r}_{11}\mathrm{c}_{01} - \mathrm{r}_{01}\mathrm{c}_{11}) + \xi_{-1,2}\cdot(-\mathrm{r}_{-11}\mathrm{c}_{01}) + \xi_{2,2}\cdot(-\mathrm{r}_{11}\mathrm{c}_{11})$$

Отримали по колу навколо заданих точок через задану спектральну щільність, що є добутком авторегресій першого порядку, як детальніше описано в роботі Флоренко А. [12]. Далі можемо число помножити на знайдене значення в цій точці (λ, μ), тобто використати коефіцієнт та замінити на значення замість $\xi_{\lambda,\mu}$.

Після комп'ютерної реалізації цього кроку при $\alpha = 0.3, \beta = 0.5, a_{ij} = 1$, маємо такий результат:

$$h_{NM}(\lambda,\mu) = -0.133e^{2il} - 0.133e^{il+2im} - 0.325e^{il+im} + 0.385e^{il} - 0.193e^{il-im}$$
$$- 0.193e^{3im} + 0.325e^{2im} + 0.133e^{im} + 0.325e^{0} - 0.193e - im$$

4 ПОБУДОВА ОБЛАСТІ ОЦІНЮВАННЯ У ВИГЛЯДІ ВАРІАЦІЇ КИЛИМА СЕРПІНСЬКОГО

4.1 Теоретичні відомості про «килим» Серпінського

Базовий килим Серпінського – це фрактал підмножини $[0,1]^2$ визначений аналогічно для класичної множини Кантора, окрім того, що видаляється середній квадрат з блоку 3×3 [15].

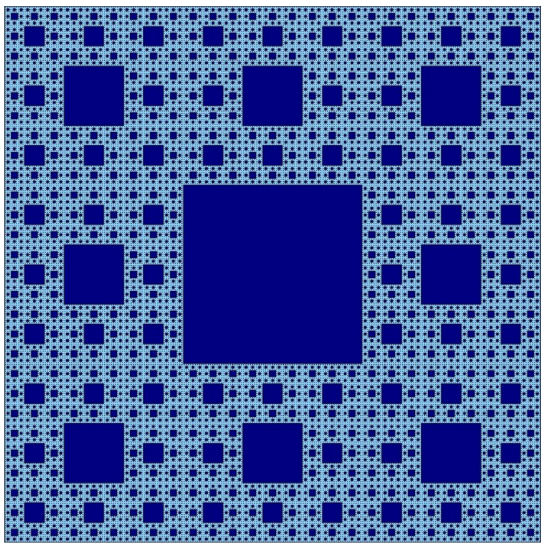

Рисунок 2 – килим Серпінського [16]

Побудова килиму Серпінського відбувається ітеративно. Використовується квадрат, який надалі ділиться на 9 конгруентних підквадратів, утворюють сітку три на три. Після чого центральний підквадрат видаляється. Процедура використовується рекурсивно далі до залишених 8 квадратів. Те, що залишається після завершення нескінченної процедури й буде називатися килимом Серпінського.

Як і більшості фракталів йому властива самоподібність: при розгляді маленької ділянки килиму за збільшеним масштабом це не призводить до спрощення малюнку, навпаки буде спостерігатися така ж складна картина, що була на початку. Також площа цієї фігури буде рівна нулю. Площі вирізуваних фігур формують геометричну прогресію з початковим елементом 1/9 та

знаменником 8/9. Крок за кроком ми вирізуємо все більшу кількість квадратів аж до нескінченності, і, підсумувавши, отримуємо площу вирізаних фігур:

$$\frac{1}{9}\left(1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^3+\cdots\right)=1$$

До того ж важливо бути згадати про кілька властивостей килима Серпінського:

- його внутрішність є порожньою
- Гаусдорфова розмірність килима є $\frac{log8}{log3}\approx 1.8928$
- У роботі самого Серпінського було показано, що його килим — це універсальна плоска крива. Килим є компактною підмножиною площини з Лебеговою розмірністю (топологічною) рівною 1, і кожна підмножина площини з цими властивостями гомеоморфна деякій підмножині килима Серпінського.

Останнім часом поширюється все більший інтерес до теми броунівського руху на килимі Серпінського. Мартін Барлоу та Річард Басс показали, що випадкове блукання по килиму Серпінського поширюється повільніше, ніж необмежена випадкова блукання в площині [15]. Останній досягає середньої відстані, пропорційної $\sqrt{n}$ після n кроків, але випадкове блукання на дискретному килимі Серпінського досягає лише середньої відстані, пропорційної $\beta\sqrt{n}$ для деякого $\beta > 2$. Вони також показали, що це випадкове блукання задовольняє більшому відхиленню нерівності (так звані «субгаусові нерівності») та те, що вона задовольняє еліптичній нерівності Гарнака, не задовольняючи параболічній. Існування такого прикладу було відкритою проблемою протягом багатьох років.

Необхідність використання все більшої кількості безпровідних технології призвела до потреби пошуку кращих дизайнів антен, які могли б збільшити

пропускну здатність та діапазон частот. Тому й виник збільшений інтерес до фрактальних антени, оскільки вони відрізняються меншою вартістю, оскільки зі збільшенням ітерацій зменшується площа використання матеріалів, невелику дослідженість та складність налаштування.

Активно проводяться дослідження про ефективність різних варіацій килима Серпінського для фрактальних антен, як наприклад в роботі Сінгх, Ягтар & Каур, Гурпріт & Сарао, Амандіп [4], а також Гунта Маніша [17].

4.2 Постановка задачі

Для дослідження було взято стандартний килим Серпінського з метою простоти використання наявних властивостей.

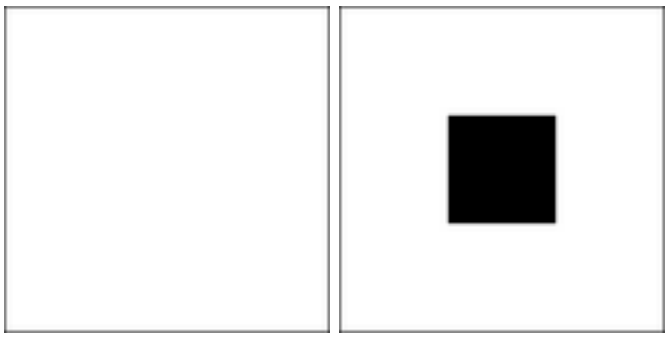

Рисунок 4 – нульова та перша ітерація килима Серпінського

Для першої ітерації килима Серпінського знаходимо значення пропущеного поля $N/3 \times N/3$. Спостерігаємо однорідне поле $\xi(k,j)$, задане на області $K = \{(k,j): k \in Z\backslash\{0,1,2\}, j \in Z \backslash\{0,1,2\}\}$. За невідомими значеннями поля у цій області складається лінійний функціонал, коли коефіцієнти A відомі:

$$A_K\xi = \sum_{(k,j)\in K} a_{(k,j)}\,\xi(k,j)$$

Необхідно оцінити значення функціонала $\widehat{A_{NM}}$.

Спектральна характеристика оцінки H_{NM}:

$$H_{NM}\left(e^{i(\lambda k+\mu j)}\right) = \sum_{k,j\in K} h_{k,j}\, e^{i(\lambda k+\mu j)}$$

де *K* є квадратом 3x3.

Заданою спектральною щільністю є:

$$f(\lambda,\mu) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|1-\alpha e^{-i\lambda}|^2}\frac{1}{|1-\beta e^{-i\mu}|^2}$$

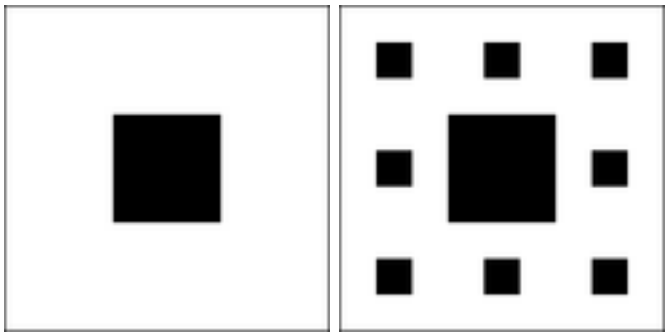

Рисунок 5 – перша та друга ітерація килима Серпінського

Для другої ітерації килима Серпінського знаходимо 8 пропущених полів розміром $N/9 \times M/9$. Обраховуємо через суму всіх пропущених полів оцінку. Функціоналом буде сума по області D. що є сукупністю квадратних областей з координатами, а також вміщує в собі один центральний квадрат та 8 одинарних квадратів, що розміщуються навколо більшого.

Отримаємо такий вигляд функціонала A:

$$A_D\xi = \sum_{(k,j)\in D} a_{(k,j)}\,\xi(k,j)$$

Область точок на площині при певній заданій центральній точці (a,b):

$$D = \{(k,j) \mid (a \pm c, b \pm d), c, d \in \{0,1\} \cup (a \pm c, b \pm d), c, d \in \{0,2\}$$

Центральною точкою є (a,b). Для формування першої ітерації ми оформлювали квадрат 3x3 для оцінювання. Його точки будуть формуватися методом $(a \pm \mathrm{c}, b \pm \mathrm{d}), k \in \{0,1\}$. Для формування другої ітерації додаємо ще точки 1x1 для оцінювання. Ці точки будуть формуватися методом $(a \pm \mathrm{c}, b \pm \mathrm{d}), \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \{0,2\}$ (без центральної точки).

Нам відомо коефіцієнти при функціоналі та спектральна щільність залишається однаковою як для першої ітерації. Необхідно знайти оцінку функціонала.

4.3 Розв'язання задачі першої та другої ітерацій килима Серпінського

А) Перша ітерація килима Серпінського

Для формування першої ітерації ми оформлюємо центральний квадрат 3x3 (де число є кількістю точок на стороні квадрата) для оцінювання на площині розміром 6x6.

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)} = 4\pi^2\left(1-\alpha e^{-i\lambda}\right)^2\left(1-\beta e^{-i\mu}\right)^2$$

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)} = 4\pi^2\left(1+\alpha^2-\alpha\left(e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}\right)\right)\left(1+\beta^2-\beta\left(e^{-i\mu}+e^{i\mu}\right)\right)$$

$$r_{0,0} = 4\pi^2(1+\alpha^2)(1+\beta^2)$$

$$r_{0,-1} = r_{0,1} = 4\pi^2(1+\alpha^2)$$

$$r_{-1,0} = r_{1,0} = 4\pi^2\alpha(1+\beta^2)$$

$$r_{1,1} = r_{1,-1} = r_{-1,1} = r_{-1,-1} = 4\pi^2\alpha$$

Позначимо $f^{-1} = R$

$$\overrightarrow{a_K} = R * \vec{c}$$

$$\vec{c} = R^{-1} * \overrightarrow{a_K}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \\ a_{0,2} \\ a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & r_{-1,-2} & r_{-2,0} & r_{-2,1} & r_{-2,-2} \\ r_{0,1} & r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & r_{-2,1} & r_{-2,0} & r_{-2,-1} \\ r_{0,2} & r_{0,1} & r_{0,0} & r_{-1,2} & r_{-1,1} & r_{-1,0} & r_{-2,2} & r_{-2,1} & r_{-2,0} \\ r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{1,-2} & r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} & r_{-1,-2} \\ r_{1,1} & r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{0,1} & r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{-1,1} & r_{-1,0} & r_{-1,-1} \\ r_{1,2} & r_{1,1} & r_{1,0} & r_{0,2} & r_{0,1} & r_{0,0} & r_{-1,2} & r_{-1,1} & r_{-1,0} \\ r_{2,0} & r_{2,-1} & r_{2,-2} & r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{1,-2} & r_{0,0} & r_{0,-1} & r_{0,-2} \\ r_{2,1} & r_{2,0} & r_{2,-1} & r_{1,1} & r_{1,0} & r_{1,-1} & r_{0,1} & r_{0,0} & r_{0,-1} \\ r_{2,2} & r_{2,1} & r_{2,0} & r_{1,2} & r_{1,1} & r_{1,0} & r_{0,2} & r_{0,1} & r_{0,0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & 0 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_3 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & r_0 & 0 & r_3 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & r_3 & 0 & r_0 & r_1 & 0 & r_2 & r_3 & 0 \\ r_3 & r_2 & r_3 & r_1 & r_0 & r_1 & r_3 & r_2 & r_3 \\ 0 & r_3 & r_2 & 0 & r_1 & r_0 & 0 & r_3 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 & r_3 & 0 & r_0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & r_2 & r_3 & r_1 & r_0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_2 & 0 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 6 - зображення матриці коефіцієнтів розкладу спектральної щільності в ряд Фур'є для задачі першої ітерації «килима» Серпінського

$$A_K(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in K} a_{(k,j)} e^{i(k\lambda+j\mu)}$$

$$= a_{0,0} + a_{0,1}e^{i\mu} + a_{0,2}e^{2i\mu} + a_{1,0}e^{i\lambda} + a_{1,1}e^{i(\lambda+\mu)} + a_{1,2}e^{i(\lambda+2\mu)}$$

$$+ a_{2,0}e^{2i\lambda} + a_{2,1}e^{i(2\lambda+\mu)} + a_{2,2}e^{i(2\lambda+2\mu)}$$

$$f^{-1}(\lambda,\mu) = r_{00} + r_{10}e^{i\lambda} + r_{-10}e^{-i\lambda} + r_{01}e^{i\mu} + r_{0-1}e^{-i\mu} + r_{1-1}e^{i(\lambda-\mu)}$$

$$+ r_{-11}e^{i(-\lambda+\mu)} + r_{11}e^{i(\lambda+\mu)} + r_{-1-1}e^{i(-\lambda-\mu)}$$

$$C_K(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in K} c_{(k,j)} e^{i(k\lambda+j\mu)} = \sum_{(k,j)\in K} (R^{-1}\overrightarrow{a_K})_{(k,j)}\, e^{i(k\lambda+j\mu)}$$

$$= c_{0,0} + c_{0,1}e^{i\mu} + c_{0,2}e^{2i\mu} + c_{1,0}e^{i\lambda} + c_{1,1}e^{i(\lambda+\mu)} + c_{1,2}e^{i(\lambda+2\mu)}$$

$$+ c_{2,0}e^{2i\lambda} + c_{2,1}e^{i(2\lambda+\mu)} + c_{2,2}e^{i(2\lambda+2\mu)}$$

Спектральна характеристика:

$$h(\lambda, \mu) = A_K(\lambda, \mu) - f^{-1}(\lambda, \mu) \times C_K(\lambda, \mu)$$

Унаслідок спрощення формул:

$$a_{00} - r_{00}c_{00} - r_{0-1}c_{0,1} - r_{-10}c_{1,0} - r_{-1-1}c_{1,1} = 0$$

$$a_{10} - r_{10}c_{0,0} - r_{1-1}c_{0,1} - r_{00}c_{1,0} - r_{0-1}c_{1,1} - r_{-10}c_{2,0} - r_{-1-1}c_{2,1} = 0$$

$$a_{2,0} - r_{10}c_{1,0} - r_{1-1}c_{1,1} - r_{00}c_{2,0} - r_{0-1}c_{2,1} = 0$$

$$a_{01} - r_{01}c_{0,0} - r_{00}c_{0,1} - r_{0-1}c_{0,2} - r_{-11}c_{1,0} - r_{-10}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{1,2} = 0$$

$$a_{0,2} - r_{01}c_{0,1} - r_{00}c_{0,2} - r_{-11}c_{1,1} - r_{-10}c_{1,2} = 0$$

$$a_{1,1} - r_{11}c_{0,0} - r_{10}c_{0,1} - r_{1-1}c_{0,2} - r_{01}c_{1,0} - r_{00}c_{1,1} - r_{0-1}c_{1,2} - r_{-11}c_{2,0} - r_{-10}c_{2,1} - r_{-1-1}c_{2,2} = 0$$

$$a_{1,2} - r_{11}c_{0,1} - r_{10}c_{0,2} - r_{01}c_{1,1} - r_{00}c_{1,2} - r_{-11}c_{2,1} - r_{-10}c_{2,2} = 0$$

$$a_{2,1} - r_{11}c_{1,0} - r_{10}c_{1,1} - r_{1-1}c_{1,2} - r_{01}c_{2,0} - r_{00}c_{2,1} - r_{0-1}c_{2,2} = 0$$

$$a_{2,2} - r_{11}c_{1,1} - r_{10}c_{1,2} - r_{01}c_{2,1} - r_{00}c_{2,2} = 0$$

У результаті спектральна характеристика матиме вигляд:

$$\begin{aligned} h(\lambda, \mu) = {} & e^{-i\lambda} \cdot \left(-r_{-10}c_{0,0} - r_{-11}c_{0,1} - r_{-1-1}c_{0,1}\right) + e^{3i\lambda} \cdot \left(-r_{10}c_{2,0} - r_{1-1}c_{2,1}\right) \\ & + e^{-i\mu} \cdot \left(-r_{0-1}c_{0,0} - r_{-1-1}c_{1,0}\right) + e^{3i\mu} \cdot \left(-r_{01}c_{0,2} - r_{-11}c_{1,2}\right) \\ & + e^{i(\lambda-\mu)} \cdot \left(-r_{1-1}c_{0,0} - r_{0-1}c_{1,0} - r_{-1-1}c_{2,0}\right) + e^{i(\lambda+3\mu)} \\ & \cdot \left(-r_{11}c_{0,2} - r_{01}c_{1,2} - r_{-11}c_{2,2}\right) + e^{i(-\lambda-\mu)} \cdot \left(-r_{-1-1c_{0,0}}\right) + e^{i(-\lambda+\mu)} \\ & \cdot \left(-r_{-11}c_{0,0} - r_{-10}c_{0,1} - r_{-1-1}c_{0,2}\right) + \\ + e^{i(-\lambda+2\mu)} & \cdot \left(-r_{-10}c_{0,2}\right) + e^{i(-\lambda+3\mu)} \cdot \left(-r_{-11}c_{0,2}\right) + e^{i(2\lambda-\mu)} \\ & \cdot \left(-r_{1-1}c_{1,0} - r_{0-1}c_{2,0}\right) + e^{i(2\lambda+3\mu)} \cdot \left(-r_{11}c_{1,2} - r_{01}c_{2,2}\right) + e^{i(3\lambda-\mu)} \\ & \cdot \left(-r_{1-1}c_{2,0}\right) + e^{i(3\lambda+\mu)} \cdot \left(-r_{11}c_{2,0} - r_{10}c_{2,1} - r_{1-1}c_{2,2}\right) + e^{i(3\lambda+2\mu)} \\ & \cdot \left(-r_{11}c_{2,1} - r_{10}c_{2,2}\right) + e^{i(3\lambda+3\mu)} \cdot \left(-r_{11}c_{2,2}\right) \end{aligned}$$

Оцінка лінійного функціонала набуватиме такого вигляду:

$$A_K\xi = \xi_{-1,0}\cdot\left(-r_{-10}c_{0,0} - r_{-11}c_{0,1} - r_{-1-1}c_{0,1}\right) + \xi_{3,0}\cdot\left(-r_{10}c_{2,0} - r_{1-1}c_{2,1}\right)$$
$$+ \xi_{0,-1}\cdot\left(-r_{0-1}c_{0,0} - r_{-1-1}c_{1,0}\right) + \xi_{0,3}\cdot\left(-r_{01}c_{0,2} - r_{-11}c_{1,2}\right) + \xi_{1,-1}$$
$$\cdot\left(-r_{1-1}c_{0,0} - r_{0-1}c_{1,0} - r_{-1-1}c_{2,0}\right) + \xi_{1,3}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{0,2} - r_{01}c_{1,2} - r_{-11}c_{2,2}\right) + \xi_{-1,-1}\cdot\left(-r_{-1-1c_{0,0}}\right) + \xi_{-1,1}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{0,0} - r_{-10}c_{0,1} - r_{-1-1}c_{0,2}\right) + \xi_{-1,2}\cdot\left(-r_{-10}c_{0,2}\right) + \xi_{-1,3}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{0,2}\right) + \xi_{2,-1}\cdot\left(-r_{1-1}c_{1,0} - r_{0-1}c_{2,0}\right) + \xi_{2,3}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{1,2} - r_{01}c_{2,2}\right) + \xi_{3,-1}\cdot\left(-r_{1-1}c_{2,0}\right) + \xi_{3,1}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{2,0} - r_{10}c_{2,1} - r_{1-1}c_{2,2}\right) + \xi_{3,2}\cdot\left(-r_{11}c_{2,1} - r_{10}c_{2,2}\right) + \xi_{3,3}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{2,2}\right)$$

Очікувано отримали по колу навколо заданих точок через задану спектральну щільність, що є добутком авторегресій першого порядку.

Б) Друга ітерація килима Серпінського

Нехай центральна точка буде (3,3). Тоді можемо записати лінійний функціонал для оцінки:

$$A_D(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in D} a_{(k,j)}e^{i(k\lambda+j\mu)}$$
$$= a_{1,1}e^{i(\lambda+\mu)} + a_{1,3}e^{i(\lambda+3\mu)} + a_{1,5}e^{i(\lambda+5\mu)} + a_{3,1}e^{i(3\lambda+\mu)}$$
$$+ a_{3,5}e^{i(3\lambda+5\mu)} + a_{5,1}e^{i(5\lambda+\mu)} + a_{5,3}e^{i(5\lambda+3\mu)} + a_{5,5}e^{i(5\lambda+5\mu)}$$
$$+ a_{2,2}e^{i(2\lambda+2\mu)} + a_{2,3}e^{i(2\lambda+3\mu)} + a_{2,4}e^{i(2\lambda+4\mu)} + a_{3,2}e^{i(3\lambda+2\mu)}$$
$$+ a_{3,3}e^{i(3\lambda+3\mu)} + a_{3,4}e^{i(3\lambda+4\mu)} + a_{4,2}e^{i(4\lambda+2\mu)} + a_{4,3}e^{i(4\lambda+3\mu)}$$
$$+ a_{4,4}e^{i(4\lambda+4\mu)}$$

Використаємо спектральну характеристику з прикладу для 3x3:

$$f(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|1-\alpha e^{-i\lambda}|^2}$$

Позначимо $f^{-1}=R$

$$\overrightarrow{a_K}=R*\vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\\ a_{1,3}\\ a_{1,5}\\ a_{3,1}\\ a_{3,5}\\ a_{5,1}\\ a_{5,3}\\ a_{5,5}\\ a_{2,2}\\ a_{2,3}\\ a_{2,4}\\ a_{3,2}\\ a_{3,3}\\ a_{3,4}\\ a_{4,2}\\ a_{4,3}\\ a_{4,4} \end{pmatrix} = R\cdot \begin{pmatrix} c_{1,1}\\ c_{1,3}\\ c_{1,5}\\ c_{3,1}\\ c_{3,5}\\ c_{5,1}\\ c_{5,3}\\ c_{5,5}\\ c_{2,2}\\ c_{2,3}\\ c_{2,4}\\ c_{3,2}\\ c_{3,3}\\ c_{3,4}\\ c_{4,2}\\ c_{4,3}\\ c_{4,4} \end{pmatrix}$$

Де матриця R розмірністю 17x17 може бути представлена наступним чином:

$$\begin{bmatrix}
r_0 & r_1 & 0 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 & 0 \\
r_1 & r_0 & r_1 & r_3 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r_1 & r_0 & 0 & r_3 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\
r_2 & r_3 & 0 & r_0 & r_1 & 0 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 \\
r_3 & r_2 & r_3 & r_1 & r_0 & r_1 & r_3 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r_3 & r_2 & 0 & r_1 & r_0 & 0 & r_3 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \\
0 & 0 & 0 & r_2 & r_3 & 0 & r_0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_3 & 0 & r_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & r_3 & r_2 & r_3 & r_1 & r_0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_2 & 0 & r_1 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_3 & 0 & r_1 \\
r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
r_3 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 \\
r_1 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 \\
0 & 0 & r_1 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0
\end{bmatrix}$$

Рисунок 7 – зображення матриці коефіцієнтів розкладу спектральної щільності в ряд Фур'є для задачі другої ітерації «килима» Серпінського

Для спрощення зображення використано Рисунок 7 для візуалізації матриці з коефіцієнтами для цієї задачі, що було розв'язано мовою програмування Python. Використані коефіцієнти мають таку відповідність:

$$r_0 = r_{00},$$

$$r_1 = r_{01} = r_{0-1},$$

$$r_2 = r_{10} = r_{-10},$$

$$r_3 = r_{11} = r_{-11} = r_{1-1} = r_{-1-1}$$

Можемо побачити закономірність між матрицею для задачі 3x3 (Рисунок 6) при першій ітерації та цією (Рисунок 7). Виходить, що для подальших ітерацій є можливість використовувати основу матриць з минулих кроків. Яскраво видно, що матриця центрального квадрату залишилася без змін. Додаткові матриці для одиничних квадратів знаходяться з боку тих коефіцієнтів, де найближче по координатах знаходилися ті квадрати. Матриця є симетричною, що спрощує можливість її створення та обчислення.

$$C_K(\lambda,\mu) = \sum_{(k,j)\in K} c_{(k,j)} e^{i(k\lambda+j\mu)} = \sum_{(k,j)\in K} (R^{-1}\overrightarrow{a_K})_{(k,j)}\, e^{i(k\lambda+j\mu)}$$

$$= c_{1,1}e^{i(\lambda+\mu)} + c_{1,3}e^{i(\lambda+3\mu)} + c_{1,5}e^{i(\lambda+5\mu)} + c_{3,1}e^{i(3\lambda+\mu)} + c_{3,5}e^{i(3\lambda+5\mu)}$$
$$+ c_{5,1}e^{i(5\lambda+\mu)} + c_{5,3}e^{i(5\lambda+3\mu)} + c_{5,5}e^{i(5\lambda+5\mu)} + c_{2,2}e^{i(2\lambda+2\mu)}$$
$$+ c_{2,3}e^{i(2\lambda+3\mu)} + c_{2,4}e^{i(2\lambda+4\mu)} + c_{3,2}e^{i(3\lambda+2\mu)} + c_{3,3}e^{i(3\lambda+3\mu)}$$
$$+ c_{3,4}e^{i(3\lambda+4\mu)} + c_{4,2}e^{i(4\lambda+2\mu)} + c_{4,3}e^{i(4\lambda+3\mu)} + c_{4,4}e^{i(4\lambda+4\mu)}$$

$$h(\lambda,\mu) = A_K(\lambda,\mu) - f^{-1}(\lambda,\mu) \times C_K(\lambda,\mu)$$

$$a_{1,1} - r_{00}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{2,2} = 0$$

$$a_{1,3} - r_{00}c_{1,3} - r_{-11}c_{2,2} - r_{-10}c_{2,3} - r_{-1-1}c_{2,4} = 0$$

$$a_{1,5} - r_{00}c_{1,5} - r_{-11}c_{2,4} = 0$$

$$a_{2,2} - r_{11}c_{1,1} - r_{1-1}c_{1,3} - r_{-11}c_{3,1} - r_{00}c_{2,2} - r_{0-1}c_{2,3} - r_{-10}c_{3,2} - r_{-1-1}c_{3,3} = 0$$

$$a_{2,3} - r_{10}c_{1,3} - r_{01}c_{2,2} - r_{00}c_{2,3} - r_{0-1}c_{2,4} - r_{-11}c_{3,2} - r_{-10}c_{3,3} - r_{-1-1}c_{3,4} = 0$$

$$a_{2,4} - r_{11}c_{1,3} - r_{1-1}c_{1,5} - r_{01}c_{2,3} - r_{00}c_{2,4} - r_{-11}c_{3,3} - r_{-10}c_{3,4} = 0$$

$$a_{3,1} - r_{00}c_{3,1} - r_{1-1}c_{2,2} - r_{0-1}c_{3,2} - r_{-1-1}c_{4,2} = 0$$

$$a_{3,2} - r_{01}c_{3,1} - r_{10}c_{2,2} - r_{1-1}c_{2,3} - r_{00}c_{3,2} - r_{0-1}c_{3,3} - r_{-10}c_{4,2} - r_{-1-1}c_{4,3} = 0$$

$$a_{3,3} - r_{11}c_{2,2} - r_{10}c_{2,3} - r_{1-1}c_{2,4} - r_{01}c_{3,2} - r_{00}c_{3,3} - r_{0-1}c_{3,4} - r_{-11}c_{4,2}$$
$$- r_{-10}c_{4,3} - r_{-1-1}c_{4,4} = 0$$

$$a_{3,4} - r_{0-1}c_{3,5} - r_{11}c_{2,3} - r_{10}c_{2,4} - r_{01}c_{3,3} - r_{00}c_{3,4} - r_{-11}c_{4,3} - r_{-10}c_{4,4} = 0$$

$$a_{3,5} - r_{00}c_{3,5} - r_{11}c_{2,4} - r_{01}c_{3,4} - r_{-11}c_{4,4} = 0$$

$$a_{4,2} - r_{11}c_{3,1} - r_{-11}c_{5,1} - r_{-1-1}c_{5,3} - r_{10}c_{3,2} - r_{1-1}c_{3,3} - r_{00}c_{4,2} - r_{0-1}c_{4,3} = 0$$

$$a_{4,3} - r_{-10}c_{5,3} - r_{11}c_{3,2} - r_{10}c_{3,3} - r_{1-1}c_{3,4} - r_{01}c_{4,2} - r_{00}c_{4,3} - r_{0-1}c_{4,4} = 0$$

$$a_{4,4} - r_{1-1}c_{3,5} - r_{-1-1}c_{3,5} - r_{-11}c_{5,3} - r_{-1-1}c_{5,5} - r_{11}c_{3,3} - r_{10}c_{3,4} - r_{01}c_{4,3}$$
$$- r_{00}c_{4,4} = 0$$

$$a_{5,1} - r_{00}c_{5,1} - r_{1-1}c_{4,2} = 0$$

$$a_{5,3} - r_{00}c_{5,3} - r_{11}c_{4,2} - r_{10}c_{4,3} - r_{1-1}c_{4,4} = 0$$

$$a_{5,5} - r_{00}c_{5,5} - r_{11}c_{4,4} = 0$$

У результаті спектральна характеристика матиме вигляд:

$$h(\lambda,\mu) = e^{0}\cdot\left(r_{-1-1}c_{1,1}\right) + e^{i(\lambda)}\cdot\left(-r_{0-1}c_{1,1}\right) + e^{i(2\lambda)}\cdot\left(-r_{1-1}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{3,1}\right)$$
$$+ e^{i(3\lambda)}\cdot\left(-r_{0-1}c_{3,1}\right) + e^{i(4\lambda)}\cdot\left(-r_{1-1}c_{3,1} - r_{-1-1}c_{5,1}\right) + e^{i(5\lambda)}$$
$$\cdot\left(-r_{0-1}c_{5,1}\right) + e^{i(6\lambda)}\cdot\left(-r_{-11}c_{1,5} - r_{1-1}c_{5,1}\right) + e^{i(\mu)}\cdot\left(r_{-10}c_{1,1}\right)$$
$$+ e^{i(2\mu)}\cdot\left(-r_{-11}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{1,3}\right) + e^{i(3\mu)}\cdot\left(-r_{-10}c_{1,3}\right) + e^{i(4\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{1,3} - r_{-1-1}c_{1,5}\right) + e^{i(5\mu)}\cdot\left(-r_{-10}c_{1,5}\right) + e^{i(6\mu)}$$

$$\cdot\left(-r_{-11}c_{1,5}\right) + e^{i(\lambda+2\mu)}\cdot\left(-r_{01}c_{1,1} - r_{0-1}c_{1,3} - r_{-10}c_{2,2} - r_{-1-1}c_{2,3}\right) + e^{i(\lambda+4\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{1,3} - r_{0-1}c_{1,5} - r_{-11}c_{2,3} - r_{-10}c_{2,4}\right) + e^{i(\lambda+6\mu)}\cdot\left(-r_{01}c_{1,5}\right)$$
$$+ e^{i(2\lambda+\mu)}\cdot\left(-r_{10}c_{1,1} - r_{-10}c_{3,1} - r_{0-1}c_{2,2} - r_{-1-1}c_{3,2}\right) + e^{i(2\lambda+5\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{10}c_{1,5} - r_{-10}c_{3,5} - r_{01}c_{2,4} - r_{-11}c_{3,4}\right) + e^{i(2\lambda+6\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{1,5} - r_{-11}c_{3,5}\right) + e^{i(3\lambda+6\mu)}\cdot\left(-r_{01}c_{3,5}\right) + e^{i(4\lambda+1\mu)}$$

$$\cdot\left(-r_{10}c_{3,1} - r_{-10}c_{5,1} - r_{1-1}c_{3,2} - r_{0-1}c_{4,2}\right) + e^{i(4\lambda+5\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{10}c_{3,5} - r_{-10}c_{5,5} - r_{11}c_{3,4} - r_{01}c_{4,4}\right) + e^{i(4\lambda+6\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{3,5} - r_{-11}c_{5,5}\right) + e^{i(5\lambda+2\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{5,1} - r_{0-1}c_{5,3} - r_{10}c_{4,2} - r_{1-1}c_{4,3}\right) + e^{i(5\lambda+4\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{5,3} - r_{0-1}c_{5,5} - r_{11}c_{4,3} - r_{10}c_{4,4}\right) + e^{i(5\lambda+6\mu)}$$

$$\cdot\left(-r_{01}c_{5,5}\right) + e^{i(6\lambda+\mu)}\cdot\left(-r_{10}c_{5,1}\right) + e^{i(6\lambda+2\mu)}\cdot\left(-r_{11}c_{5,1} - r_{1-1}c_{5,3}\right) + e^{i(6\lambda+3\mu)}$$
$$\cdot\left(-r_{10}c_{5,3}\right) + e^{i(6\lambda+4\mu)}\cdot\left(-r_{11}c_{5,3} - r_{1-1}c_{5,5}\right) + e^{i(6\lambda+5\mu)}\cdot\left(-r_{10}c_{5,5}\right)$$
$$+ e^{i(6\lambda+6\mu)}\cdot\left(-r_{11}c_{5,5}\right)$$

Оцінка лінійного функціонала набуватиме такого вигляду:

$$\widehat{A_K}\xi = \xi_{0,0}\cdot\left(r_{-1-1}c_{1,1}\right) + \xi_{1,0}\cdot\left(-r_{0-1}c_{1,1}\right) + \xi_{2,0}\cdot\left(-r_{1-1}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{3,1}\right) + \xi_{3,0}$$
$$\cdot\left(-r_{0-1}c_{3,1}\right) + \xi_{4,0}\cdot\left(-r_{1-1}c_{3,1} - r_{-1-1}c_{5,1}\right) + \xi_{5,0}\cdot\left(-r_{0-1}c_{5,1}\right) + \xi_{6,0}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{1,5} - r_{1-1}c_{5,1}\right) + \xi_{0,1}\cdot\left(r_{-10}c_{1,1}\right) + \xi_{0,2}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{1,1} - r_{-1-1}c_{1,3}\right) + \xi_{0,3}\cdot\left(-r_{-10}c_{1,3}\right) + \xi_{0,4}$$
$$\cdot\left(-r_{-11}c_{1,3} - r_{-1-1}c_{1,5}\right) +$$
$$+\xi_{0,5}\cdot\left(-r_{-10}c_{1,5}\right) + \xi_{0,6}\cdot\left(-r_{-11}c_{1,5}\right) + \xi_{1,2}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{1,1} - r_{0-1}c_{1,3} - r_{-10}c_{2,2} - r_{-1-1}c_{2,3}\right) + \xi_{1,4}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{1,3} - r_{0-1}c_{1,5} - r_{-11}c_{2,3} - r_{-10}c_{2,4}\right) + \xi_{1,6}\cdot\left(-r_{01}c_{1,5}\right) + \xi_{2,1}$$
$$\cdot\left(-r_{10}c_{1,1} - r_{-10}c_{3,1} - r_{0-1}c_{2,2} - r_{-1-1}c_{3,2}\right)$$
$$+\xi_{2,5}\cdot\left(-r_{10}c_{1,5} - r_{-10}c_{3,5} - r_{01}c_{2,4} - r_{-11}c_{3,4}\right) + \xi_{2,6}\cdot\left(-r_{11}c_{1,5} - r_{-11}c_{3,5}\right)$$
$$+ \xi_{3,6}\cdot\left(-r_{01}c_{3,5}\right) + \xi_{4,1}\cdot\left(-r_{10}c_{3,1} - r_{-10}c_{5,1} - r_{1-1}c_{3,2} - r_{0-1}c_{4,2}\right)$$
$$+ \xi_{4,5}\cdot\left(-r_{10}c_{3,5} - r_{-10}c_{5,5} - r_{11}c_{3,4} - r_{01}c_{4,4}\right) + \xi_{4,6}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{3,5} - r_{-11}c_{5,5}\right)$$
$$+\xi_{5,2}\cdot\left(-r_{01}c_{5,1} - r_{0-1}c_{5,3} - r_{10}c_{4,2} - r_{1-1}c_{4,3}\right) + \xi_{5,4}$$
$$\cdot\left(-r_{01}c_{5,3} - r_{0-1}c_{5,5} - r_{11}c_{4,3} - r_{10}c_{4,4}\right) + \xi_{5,6}\cdot\left(-r_{01}c_{5,5}\right) + \xi_{6,1}$$
$$\cdot\left(-r_{10}c_{5,1}\right) + \xi_{6,2}\cdot\left(-r_{11}c_{5,1} - r_{1-1}c_{5,3}\right) + \xi_{6,3}\cdot\left(-r_{10}c_{5,3}\right) + \xi_{6,4}$$
$$\cdot\left(-r_{11}c_{5,3} - r_{1-1}c_{5,5}\right) + \xi_{6,5}\cdot\left(-r_{10}c_{5,5}\right) + \xi_{6,6}\cdot\left(-r_{11}c_{5,5}\right)$$

Результати з комп'ютерної реалізації вийшли:

$$-0.439\xi_{01} - 0.536\xi_{03} - 0.439\xi_{05} - 0.596\xi_{11} - 0.042\xi_{12} - 1.116\xi_{13} - 0.183\xi_{14}$$
$$- 0.596\xi_{15} - 0.638\xi_{16} - 1.329\xi_{21} + 2.944\xi_{22} - 0.142\xi_{23} + 2.7\xi_{24}$$
$$- 0.463\xi_{25} - 1.511\xi_{31} + 0.653\xi_{32} - 1.986\xi_{33} + 0.16\xi_{34} - 1.833\xi_{35}$$
$$- 1.004\xi_{36} - 1.444\xi_{41} + 2.843\xi_{42} - 0.18\xi_{43} + 0.031\xi_{44} - 1.444\xi_{45}$$
$$- 0.596\xi_{51} + 0.228\xi_{52} - 1.192\xi_{53} + 2.386\xi_{54} + 0.27\xi_{55} - 0.638\xi_{56}$$
$$- 0.638\xi_{61} - 0.779\xi_{63} + 0.866\xi_{64} - 0.638\xi_{65}$$

У результаті було спостережено

ВИСНОВКИ

1. Було зроблено ілюстративні приклади для наступних проблем оцінювання випадкових полів:
    - інтерполяцію для одного пропущеного значення;
    - оцінювання набору пропущених значень від функціоналу;
    - інтерполяція лінійного функціонала від однорідного випадкового поля з областю оцінювання (пропущеними значеннями) у деякому прямокутнику;

   Було знайдено формули для оцінювання, похибки для оцінювання та було розроблено можливість комп'ютерної реалізації

2. Було досліджено задачу побудови області оцінювання випадкових полів на килимі Серпінського для першої та другої ітерації:
    - знайдено формулу для оцінювання
    - визначено закономірності в побудові матриць
    - виконано комп'ютерну реалізацію цієї задачі

3. У подальшому можливо продовжити цю роботу, дослідивши оцінювання випадкових полів у килимі Серпінського на N-кроків. Задача буде полягати в тому, щоб дослідити на якому кроку ітерації вже не буде важливою точність оцінювання полів. Також залишається можливість розширити створену комп'ютерну реалізацію до загального вигляду ітерації оцінювання полів Серпінського.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] N. Yao and X. W. Shi, “Analysis of the multiband behavior on Sierpinski carpet fractal antennas,” *Asia-Pacific Microw. Conf. Proceedings, APMC*, vol. 4, 2005, doi: 10.1109/APMC.2005.1606873.

[2] N. Sharma and V. Sharma, “An optimal design of fractal antenna using modified sierpinski carpet geometry for wireless applications,” *Commun. Comput. Inf. Sci.*, vol. 628 CCIS, pp. 400–407, 2016, doi: 10.1007/978-981-10-3433-6_48.

[3] A. Sahu and A. Priyadarshi, “On the box dimension of graph of harmonic functions on the Sierpi´nskiSierpi´nski gasket.”

[4] J. S. Sivia, G. Kaur, and A. K. Sarao, “A Modified Sierpinski Carpet Fractal Antenna for Multiband Applications,” *Wirel. Pers. Commun.*, vol. 95, no. 4, pp. 4269–4279, Aug. 2017, doi: 10.1007/S11277-017-4079-5.

[5] C. P. Baliarda, C. B. Borau, M. N. Rodero, and J. R. Robert, “An iterative model for fractal antennas: application to the Sierpinski gasket antenna,” *ieeexplore.ieee.org*, vol. 48, no. 5, p. 713, 2000, Accessed: Jun. 14, 2022. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/855489/.

[6] K. H.-I. antennas and wireless propagation letters and undefined 2007, “A modified Sierpinski fractal antenna for multiband application,” *ieeexplore.ieee.org*, Accessed: Jun. 14, 2022. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4295062/.

[7] А. Н. Колмогоров, “Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей,” *Колмогоров, А. Н. (1941). Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. Известия Российской академии наук. Серия математическая, 5(1)*, pp. 3–14, 1941, Accessed: Jun. 02, 2022. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/rus/im3775.

[8] А. М. Яглом, “Введение в теорию стационарных случайных функций,” *Успехи математических наук*, vol. 7, no. 5 (51), pp. 3–168, 1952, Accessed: Jun. 02, 2022. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/rus/rm8363.

[9] А. М. Яглом, “Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью,” *Тр. ММО, 4, ГИТТЛ, М.*, pp. 333–374, 1955, Accessed: Jun. 07, 2022. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=41&option_lang=eng.

[10] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, vol. 575. МЦНМО, 1957.

[11] М. П. Моклячук and Н. Ю. Щестюк, *Estimates of functionals from random fields (in Ukrainian). / Оцінки функціоналів від випадкових полів: монографія*, vol. 228 с. Уж.: ПП “АУТДОР - ШАРК”, 2013.

[12] A. Florenko, N. Shchestyuk, and N. Zaets, “Інтерполяція випадкового поля для області спостережень у вигляді системи вкладених прямокутників,” *Могилянський математичний журнал*, vol. 1, no. 0, pp. 49–53, Dec. 2018, doi: 10.18523/2617-7080I2018P49-53.

[13] А. Н. Колмогоров, “Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве ,” *Бюллетень МГУ*, vol. 2, no. 6, pp. 1–40, 1941.

[14] А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*. Наука, 1986.

[15] M. T. Barlow, “Analysis on the Sierpinski carpet,” *Anal. Geom. Metr. Meas. spaces* , vol. 56, pp. 27–53, 2013, Accessed: Jun. 19, 2022. [Online]. Available: https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=PfJnikY4YEoC&oi=fnd&pg=PA27&dq=sierpinski+carpet&ots=Nnhq5eS5rb&sig=tBCDcIUPsVle3VSuZw7Wg1irifA.

[16] “Ковер Серпинского • Хайдар Нурлигареев • Научная картинка дня на «Элементах» • Математика.” https://elementy.ru/kartinka_dnya/948/Kover_Serpinskogo (accessed Jun. 28, 2022).

[17] M. Gupta and V. Mathur, “Sierpinski Array with Swastik Electromagnetic Bandgap for Ku-Band Applications,” *Indian J. Sci. Technol.*, vol. 9, no. 32, p. 14, Aug. 2016, doi: 10.17485/ijst/2016/v9i32/93833.

ДОДАТОК А

Методи для розв’язання задачі першої та другої ітерації килима Серпінського

```
# Matrix with coeficients of spectral density
def R_matrix(coef_r, n=2):

    dim = n*n
    R = sympy.zeros(dim)
    # central submatrix
    r_n = sympy.zeros(n)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                r_n[i,i] = coef_r[0]
            elif i == (j-1):
                r_n[i,j] = coef_r[1]

    # pasting submatrix on diagonal
    c = 0
    d = n
    for i in range(dim):
        k = i % n
        if i >= d:
            c += n
            d += n
        R[i,c:d] = r_n[k,:]

    # upper right corner submatrix
    r_n_2 = sympy.zeros(n)
    r_n_2_diag = []
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                r_n_2[i,i] = coef_r[2]
                r_n_2_diag.append(coef_r[2])
            if i == (j-1):
                r_n_2[i,j] = coef_r[3]
    # making symetrical matrix
    r_n_2 = r_n_2 + r_n_2.T  - sympy.diag(np.diag(np.diag(r_n_2)))

    # pasting submatrix on diagonal
    c = n
    d = n*2
    for i in range(dim-n):
        k = i % n
        if i >= c:
            c += n
            d += n
        R[i,c:d] = r_n_2[k,:]
    # Matrix is symmetric,
    # so we just add a flipped tringle of the matrix
    return R + R.T - sympy.diag(np.diag(np.diag(R)))
```

```
# обрахування матриці для задачі 3x3
# спектральна характеристика
a,b, l,m = symbols('a b l m')
n = 3

coef_r = 4*sympy.pi**2 * Array([
        (1+a**2)*(1+b**2),    # r_00
        b*(1+a**2),           # r_01=r_0-1
        a*(1+b**2),           # r_10=r_-10
        a*b                  # r_11=r_-11=r_1-1=r_-1-1
])

R = Array([coef_r[0], coef_r[1], coef_r[1],coef_r[2], coef_r[2], coef_r[3], coef_r[3],coef_r[3], coef_r[3]])
coef_r_kj = 4*sympy.pi**2 * Array([
        (1+a**2)*(1+b**2), b*(1+a**2), b*(1+a**2),
        a*(1+b**2), a*(1+b**2),a*b,
        a*b, a*b, a*b
])
```

```
# обрахування
# sum(r_kj * e^(lk +jm))

r_kj = [
        (0,0), (0,1), (0,-1),
        (1,0), (-1,0),(1,-1),
        (-1,1), (1,1), (-1,-1)
]
e_R = []
for i in range(len(r_kj)):
        k,j = r_kj[i][0], r_kj[i][1]
        e_R.append(sympy.exp(sympy.I * k*l)*sympy.exp(sympy.I * j*m))

R_e = []
r = symbols('r_:{}'.format(n))
for i in range(len(r)):
        R_e.append(r[i]*e_R[i])
```

```
# обрахування
# sum(a_kj * e^(lk +jm))
# sum(c_kj * e^(lk +jm))
c_kj = [
        (0,0), (0,1), (0,2),
        (1,0), (1,1), (1,2),
        (2,0), (2,1), (2,2)
]
e_C = []
for i in range(len(c_kj)):
        k,j = c_kj[i][0], c_kj[i][1]
        e_C.append(sympy.exp(sympy.I * k*l)*sympy.exp(sympy.I * j*m))

c = symbols('c_:{}'.format(n))
A = symbols('a_:{}'.format(n))
C_e = []
A_e = []
for i in range(len(c)):
        C_e.append(c[i]*e_C[i])
        A_e.append(A[i]*e_C[i])
```

```
# обрахування матриці з коефіцієнтами розкладу спектральної щільності в ряд Фур'є

R = R_matrix(r, n)

# обрахування спектральної характеристики
# spectral characteristic (not simplified)
f_C = tensorproduct(sympy.Array(C_e),sympy.Array(R_e))

h_lm = np.sum(A_e) - np.sum(f_C)
h_lm
```

```
# Ініціалізація даних
alpha = 0.3
beta = 0.5
A_K = np.ones(n*n)

# Заміна символів на введені дані

coef_r_kj = coef_r_kj.subs(a, alpha)
coef_r_kj = coef_r_kj.subs(b, beta)

for i in range(n*n):
    h_lm = h_lm.subs(A[i], A_K[i])

A = sympy.Matrix(A)
for i in range(n*n):
    R = R.subs(r[i], coef_r_kj[i])
    A = A.subs(A[i], A_K[i])

# Знаходження оберненої матриці R
R_inv = R.inv()

# Знаходження числових коефіцієнтів вектора C

coef_C = R_inv * A
coef_C

# заміна символів на комбінації для подальшого спрощення

for i in range(n*n):
    h_lm = h_lm.subs(c[i], coef_C[i])
    h_lm = h_lm.subs(r[i], R[i])
h_lm = sympy.expand(h_lm)
h_lm
```

```python
# Matrix with coeficients of spectral density for Serpinsky carpet
def R_matrix_Serpinsky(coef_r, n=17):
    size = 3
    n_dots = 2
    R_3 = R_matrix(coef_r, size)
    R = sympy.eye(n)*coef_r[0]
    c = R_3.shape[0]

    # Upper right corner submatrix
    r_n = sympy.zeros(size)
    r_n = sympy.Matrix([
        [coef_r[3], coef_r[3], 0],
        [0, coef_r[2], 0],
        [0, coef_r[3], coef_r[3]]
    ])

    # Inserting submatrix on upper diagonal
    c = R_3.shape[0]
    d = c+size
    for i in range(size):
        R[i,c:d] = r_n[i,:]
    e = R_3.shape[0]+size
    f = e+size
    count = 0
    for i in range(c-size, c):
        R[i,e:f] = r_n[count,:]
        count+=1

    # Making columns of upper and lower points near main square
    col = R[:c-n_dots,n-n_dots]
    print(col)
    for i in range(0,len(col),3):
        if i%2 == 0:
            col[i] = coef_r[1]
        else:
            col[i] = coef_r[3]

    # Inserting columns of upper and lower point (near main square)
    # in the end of matrix
    R[:len(col),n-n_dots] = col
    R[2:len(col)+2,n-n_dots+1] = col
    # Matrix has to be symmetric,
    # so we just add a flipped tringle of the matrix
    R = R + R.T - sympy.diag(np.diag(np.diag(R)))

    # Inserting main submatrix on the beginning
    c = R_3.shape[0]
    for i in range(R_3.shape[0]):
        R[i,:c] = R_3[i,:]
    return R
```