УДК 517.9

Булавацький В. М., Лаврик В. І.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ З РЕЛАКСАЦІЄЮ НА ОСНОВІ НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ

Наведено розв 'язки основних крайових задач для скінченного стрижня в рамках некласичної мате матичної моделі тетомасопереносу з урахуванням релаксаційності процесу.

Вступ

У працях [1,2] запропоновано та обґрунтовано математичну модель теплопровідності з урахуванням теплової нерівноважності, яка базується на рівнянні

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t}\right) = 0, \qquad (1)$$

де T(χ,t) - температура, τ_1 τ_2 - дійсні константи (параметри релаксації).

Ця модель застосовувалась до вивчення нерівноважних процесів теплопровідності за припущення τ_1 τ_2 >0 в низці праць, зокрема [3-5]. Одначе, як відзначено, наприклад, в [6], при вивченні нестаціонарних температурних полів у дисперсних та інших гетерогенних середовищах параметр τ, може бути величиною довільного знаку. В цій роботі розглянемо деякі задачі моделювання процесів теплопровідності у випадку $\tau_1 < 0$.

Крайові задачі для скінченного стрижня

Покладемо в (1) τ_1=-τ_1' (τ_1' *>0)* і, опускаючи надалі знак «штрих», одержимо рівняння

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t}\right) = \qquad (2)$$

Задача відшукання температурного поля скінченного стрижня довжиною 1 у випадку, коли кінці його підтримуються за нульової температури, зводиться до розв'язування в області $(0;\ell)\times(0;+\infty)$ крайової задачі для рівняння (2) за таких умов:

$$T(0,t) = T(\ell,t) = 0, \qquad (3)$$

$$T(x,0) = T_0, \quad T_t'(x,+\infty) = 0, \qquad (4)$$

де $T_0 = \text{const}$ – задана температура.

Застосовуючи до (2-4) скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є за змінною χ вигляду

$$\overline{T}_n(t) = \int_0^\ell T(x,t)\sin(\lambda_n x)\,dx, \quad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}\right), \qquad (5)$$

одержимо крайову задачу

$$\tau_1 \overline{T}_n''(t) - \left(1 + \tau_2\lambda_n^2\right)\overline{T}_n'(t) - \lambda_n^2 \overline{T}_n(t) = 0, \qquad (6)$$

$$\overline{T}_n(0) = \alpha_n, \quad \overline{T}_n(+\infty) = 0, \qquad (7)$$

де $\alpha_n = \frac{T_0}{\lambda_n}\left[1 + (-1)^{n+1}\right], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Розв'язуючи задачу (6), (7), та переходячи в область оригіналів, одержуємо розв'язок розглядуваної задачі у вигляді

$$T(x,t) = \frac{4T_0}{\ell}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} e^{-\gamma_n t}\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}, \qquad (8)$$

де $\gamma_n = \frac{1}{2\tau_1}\left[-\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right) + \sqrt{\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right)^2 + 4\tau_1\lambda_n^2}\right]$.

Зауважимо, що в загальноприйнятому випадку $\tau_1 > 0$ коректна постановка крайової задачі теплопровідності для рівняння (1) містить граничні умови (3) та початкові умови

$$T(x,0) = T_0, \quad T_t'(x,0) = 0. \qquad (9)$$

Можна показати, що розв'язок крайової задачі (1), (3), (9) дається співвідношенням

$$T(x,t)=\frac{4T_0}{\ell}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} e^{-\alpha_n t}Q_n(t)\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n}, \qquad (10)$$

де позначено $\alpha_n=\dfrac{1+\tau_2\lambda_n^2}{2\tau_1}$,

$$Q_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_n}{q_n}\operatorname{sh}(q_n t)+\operatorname{ch}(q_n t), & D_n>0,\\[2mm] \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\sin(\beta_n t)+\cos(\beta_n t), & D_n<0,\\[2mm] 1+\alpha_n t, & D_n=0,\end{cases}$$

$$D_n=\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right)^2-4\tau_1\lambda_n^2,\ \ \beta_n=\frac{\sqrt{-D_n}}{2\tau_1},\ \ q_n=\frac{\sqrt{D_n}}{2\tau_1}.$$

Аналогічно розв'язується задача відшукання температурного поля стрижня у випадку, коли $\tau_1 < 0$ та один з кінців стрижня підтримується за нульової температури, а інший -- теплоізольований. В цьому випадку рівняння (2) розв'язується за граничних умов (4) та умов

$$T(0,t)=T_x'(\ell,t)=0. \qquad (П)$$

У результаті елементарних перетворень одержуємо для шуканої температури співвідношення

$$T(x,t)=\frac{2T_0}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n t}\frac{\sin(\mu_n x)}{\mu_n}, \qquad (12)$$

де

$$\delta_n=\frac{1}{2\tau_1}\left[-\left(1+\tau_2\mu_n^2\right)+\sqrt{\left(1+\tau_2\mu_n^2\right)^2+4\tau_1\mu_n^2}\right],$$

$$\mu_n=\frac{\pi(2n-1)}{2\ell}.$$

Якщо на одному з кінців стрижня підтримується нульова температура, а на іншому задано теплообмін з навколишнім середовищем, то задача визначення температурного поля цього стрижня при $\tau_1 < 0$, зводиться до розв'язання рівняння (2) за умов (4) та

$$T(0,t)=0, \qquad \left(T_x'+hT\right)\Big|_{x=\ell}=0, \qquad (13)$$

де $h=\mathrm{const}$ - відносний коефіцієнт теплообміну.

Розв'язок цієї задачі можна записати у вигляді

$$T(x,t)=\frac{4T_0}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\rho_n t}\frac{\sin\left(\bar{\nu}_n x\right)}{\bar{\nu}_n}, \qquad (14)$$

де $a_n=\dfrac{\left(\nu_n^2+h^2\ell^2\right)\sin^2\dfrac{\nu_n}{2}}{\nu_n^2+h\ell(h\ell+1)}$,

$$\rho_n=\frac{1}{2\tau_1}\left[-\left(1+\tau_2\bar{\nu}_n^2\right)+\sqrt{\left(1+\tau_2\bar{\nu}_n^2\right)^2+4\tau_1\bar{\nu}_n^2}\right],$$

$\bar{\nu}_n=\nu_n/\ell,\ \nu_n>0$ – корені трансцендентного рівняння $\nu\operatorname{ctg}\nu+h\ell=0$.

У випадку, коли на обох кінцях стрижня відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, замість граничних умов (13) маємо умови

$$\left(T_x'-h_1T\right)\Big|_{x=0}=0, \qquad \left(T_x'+h_2T\right)\Big|_{x=\ell}=0, \qquad (15)$$

де h_1, h_2 - відносні коефіцієнти теплообміну.

Тоді розв'язок задачі (2), (4), (15) набуває вигляду:

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n t}\Psi_n\left(\bar{\theta}_n x\right), \qquad (16)$$

де позначено

$$\Psi_n\left(\bar{\theta}_n x\right)=\ell\left[\bar{\theta}_n\cos\left(\bar{\theta}_n\ell\right)+h_1\sin\left(\bar{\theta}_n\ell\right)\right],$$

$$c_n=b_n/\|\Psi_n\|^2,$$

$$b_n=T_0\ell\left[\frac{\theta_n\cos\theta_n}{(h_1+h_2)\ell}-\frac{h_1\ell(h_1+2h_2)\cos\theta_n}{(h_1+h_2)\theta_n}+\frac{h_1\ell}{\theta_n}\right],$$

$$\|\Psi\|^2=\frac{\ell}{2\left(\theta_n^2+h_2^2\ell^2\right)}\Big[\left(\theta_n^2+h_1^2\ell^2\right)\left(h_2\ell+\theta_n^2+h_2^2\ell^2\right)+h_1\ell\left(\theta_n^2+h_2^2\ell^2\right)\Big],$$

$$\mu_n=\frac{1}{2\tau_1}\left[-\left(1+\tau_2\bar{\theta}_n^2\right)+\sqrt{D_n}\right],$$

$$D_n=\left(1+\tau_2\bar{\theta}_n^2\right)^2+4\tau_1\bar{\theta}_n^2,\quad \bar{\theta}_n=\theta_n/\ell,\ \theta_n>0\ -$$

корені трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\theta}{(h_1+h_2)\ell}-\frac{h_1h_2\ell}{(h_1+h_2)\theta}.$$

Зазначимо, що методика одержання розв'язків розглянутих крайових задач не зміниться і у разі $T_0 \neq \mathrm{const}$.

Результати чисельної реалізації. Висновки

Чисельна реалізація здійснена стосовно задачі теплопровідності скінченного стрижня, на кінцях якого підтримується нульова температура (співвідношення (8) та (10)). При цьому для обчислень вибиралась функція $T(\chi, 0)$ у вигляді «сходинки» одиничної висоти. Результати одержано в безрозмірних змінних. Аналіз результатів дає змогу зробити висновки:

1. Поведінка температурних кривих у випадку $\tau_1>0$ суттєво відрізняється від їх поведінки, коли $\tau_1<0$: коливальному режиму зміни температури у першому випадку відповідає ре-

жим монотонного розсіювання початкового температурного збурення у другому.

2. Збільшення параметра релаксації τ,, при T! > 0 призводить до збільшення частоти коливань температури.

3. Якісна поведінка температурних кривих, при T! < 0, не залежить від величини |τ,| і залишається тією ж при збільшенні |τ,|.

Про моделювання нерівноважного процесу горіння

Для моделювання при τ, < 0 високотемпературного процесу горіння з урахуванням теплової нерівноважності маємо нелінійну крайову задачу

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T + \tau_2 \frac{\partial T}{\partial t}\right) = f(T), \quad (17)$$

$$T(0,t) = T(\ell,t) = 0, \quad (18)$$

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad T_t'(x,+\infty) = 0, \quad (19)$$

де $\varphi(x)$ -задана функція, $f(T) = T^m \,(m \geq 1)$ – функція джерела.

Зауважимо, що в окремому випадку $m = 1$ задача (17) - (19) має точний розв'язок, який одержується за викладеною вище методикою. Опускаючи проміжні викладки, запишемо кінцевий вигляд розв'язку

$$T(x,t) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) R(x,\xi,t) d\xi, \quad (20)$$

де $R(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n t}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi),\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l},$

$$k_n = \frac{1}{2\tau_1}\left[-\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right) + \sqrt{\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right)^2 + 4\tau_1\left(\lambda_n^2+1\right)}\right].$$

У загальному випадку $m > 1$, обертаючи лінійну частину рівняння (17), зводимо задачу до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння

$$T(x,t) = r(x,t) + \int_0^{\infty}\int_0^{\ell} T^m(\xi,\tau) Q(x,\xi,t,\tau) d\xi d\tau, \quad (21)$$

де позначено

$$r(x,t) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) K(x,\xi,t) d\xi,$$

$$K(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\rho_n^{(2)} t}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi),$$

$$\rho_n^{(1,2)} = \frac{1}{2\tau_1}\left[1+\tau_2\lambda_n^2 \pm \sqrt{\left(1+\tau_2\lambda_n^2\right)^2 + 4\tau_1\lambda_n^2}\right],$$

$$Q(x,\xi,t,\tau) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\tau)\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n \xi),$$

а функція Cn(τ,t) є функцією Гріна відповідної (17) - (19) в просторі Фур'є-зображень крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$G_n(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_1\left(\rho_n^{(2)} - \rho_n^{(1)}\right)} e^{-\rho_n^{(1)}\tau}\left(e^{\rho_n^{(1)} t} - e^{\rho_n^{(2)} t}\right), & 0 \leq t \leq \tau; \\ \frac{1}{\tau_1\left(\rho_n^{(2)} - \rho_n^{(1)}\right)} e^{\rho_n^{(2)} t}\left(e^{-\rho_n^{(2)}\tau} - e^{-\rho_n^{(1)}\tau}\right), & \tau \leq t < \infty. \end{cases}$$

Наближений розв'язок рівняння (21) можна одержати, наприклад, використовуючи найпростіший варіант проекційно-сіткового методу так званий зональний метод [7]. Для цього введемо до розгляду в прямокутнику $\Omega = \{(x,t):\ 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq t^*\}$ сітку

$$\omega = \{\, x_i = i\Delta x,\quad t_j = j\Delta t;\quad i = \overline{1,N};\ \ j = \overline{1,M};$$

$$x_0 = 0,\ \ x_N = \ell,\ \ t_0 = 0,\ \ t_M = t^* \}$$

та функції

$$\varphi_i(x) = \eta(x - x_{i-1}) - \eta(x - x_i)\ \left(i = \overline{1,N}\right),\ \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell},$$

де η - функція Хевісайда. Апроксимуємо розв'язок кусково-постійними функціями

$$T(x,t) \cong \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} T_{ik}\varphi_i(x)\varphi_k(t), \quad (22)$$

дє T_{ik} -середнє значення $T(\chi, t)$ на $[x_{i-1}, x_i] \times$ $\times [t_{j-1}, t_j]$. Підставляючи (22) в (21), та застосовуючи метод Бубнова - Гальоркша, одержуємо систему

$$T_{j\mu} = F_{j\mu} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} c_{ik\,j\mu} T_{ik}^m, \quad \left(i = \overline{1,N};\ j = \overline{1,M}\right), \quad (23)$$

де позначено

$$F_{j\mu} = \frac{1}{\Delta x\,\Delta t}\int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} dt \int_{x_{j-1}}^{x_j} r(x,t)\,dx,$$

$$c_{ikj\mu} = \frac{1}{\Delta x\,\Delta t}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} dt \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\tau \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q(x,\xi,t,\tau) d\xi .$$

Таким чином, розв'язання розглядуваної задачі зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (23). Ефективний наближений розв'язок цієї системи можна одержати, скориставшись, наприклад, методом Ньютона [8].

1. *Королевич В. Ю.* Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. 2.- К., 1990.- 40 с.- (Препр. / АН УССР, Институт геофизики; № 5).

2. *Даниленко В. А.* Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред // Моделирование динамики деформируемых сред.-К.: Наук, думка, 1993.-С. 3-17.

3. *Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В.* Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в периодических средах со структурой.— К., 1991.- 44с.- (Препр. / АН УССР. Институт геофизики им. С. И. Субботина).
4. *Давиденко О. В., Кудінов В. М., Макаренко О. С.* Спалахування та горіння дисперсних систем // Доп. НАН України.- 1985.-№5.-С. 67-70.
5. *Владимиров В. А., Даниленко В. А., Макаренко А. С.* Математическое моделирование процессов распространения тепла на основе обобщенных уравнений теплопроводности // Вычислительная и прикладная математика.- К., 1990.- Вып. 70.-С. 78-83.
6. *Буевич Ю. А., Корнеев Ю. А.* Дисперсия тепловых волн в зернистом материале // Инженерно-физ. журн.- 1976.- 31, №1,-С. 21-28.
7. *Суринов Ю. С.* Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого теплообмена в системах «серых» тел, разделенных диатермической средой // Изв. АН СССР, ОТН.- 1948.-№ 7.-С. 981-1002.
8. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробагатько А. А.* Методы вычислений.- К.: Вища школа, 1977- 408 с.

V. Bulavatsky, V. Lavryk

MATHEMATICAL MODELLING OF NON-STEADY THERMAL PROCESSES WITH A RELAXATION ON BAZED OF NONCLASSICAL MODEL

The solutions of the basic boundary value problems for a finite rod are obtained within the framework of nonclassical mathematical model heat and mass transfer with allowance for relaxation of process.