Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Києво-Могилянська академія”

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освіній ступінь – бакалавр
на тему: **"Парування в графах"**

Виконав студент
4-го року навчання освітньої програми
113 “Прикладна математика”
Осадчий Антон Олександрович

Керівник:
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач
Тимошкевич Л. М.
Рецензент:

____
(ПІБ)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою:

____

Секретар ЕК: _______________
(підпис)

“____”_________________ 2022 р.

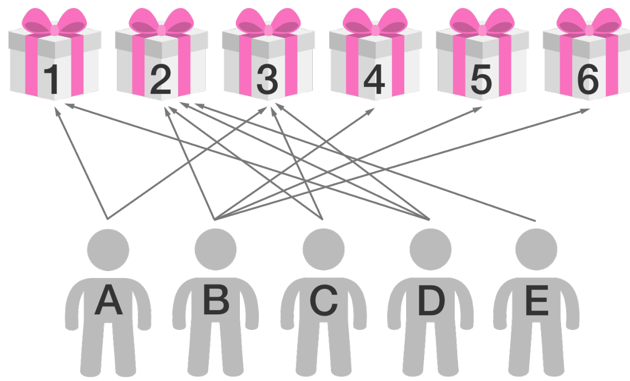
Київ – 2022

	Назва етапу роботи	Термін виконання етапу	Підпис
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи та літератури.	20.11.2021	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	01.01.2022	
3.	Дослідження та аналіз літератури за темою роботи.	01.02.2021	
4.	Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за літературою).	01.03.2022	
5.	Дослідження та виконання задач для кваліфікаційної роботи.	01.05.2022	
6.	Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за задачами).	15.05.2022	
7.	Оформлення кваліфікаційної роботи та виправлення помилок.	01.06.2022	
8.	Передзахист та виправлення помилок.	15.06.2022	
9.	Фінальна підготовка до захисту.	26.06.2022	
10.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.07.2022	

Зміст

1 Вступ

Аліса, Боб, Чарльз, Діана та Едвард обирають собі один з 6 подарунків, та кожному з них до вподоби лише $0 < n < 6$, чи можливо аби всі обрали подарунок, який їм до вподоби?



Це одна з фундаментальних задач, на які дає відповідь розділ теорії графів під назвою теорія парувань, що набув популярності наприцінці 19-го, на початку 20-го століття. Один з найважливіших внесків зробив британський математик Філліп Холл, що зробив важливе відкриття в теорії груп, що в підсумку лягло в основу доведення теореми, яку тепер називають теоремою Холла. Ці результати досліджень були опубліковані в записці про нерозв'язні групи в "Журналі Лондонського математичного товариства у 1928 році.

Ще один великий внесок зробив австро-угорський математик Денеш Кьоніг, який, до речі, є першим автором книги з теорії графів "Теорія скінченних і нескінченних графів опублікована в 1936 році.

Сьогодні теорія парувань використовується в таких галузях як: мережеві потоки, моделювання хімічних зв'язків, розфарбування графів, нейронні мережі.

В даній роботі розглянуто основні поняття та теореми теорії парувань. Сформульовані та доведені твердження щодо двочасткових граффв та відношень між множинами пов'язаних з їх вершинами. Також в роботі містяться авторські розв'язання нетривіальних задач на застосування теореми Холла та Кьоніга.

2 Теорія парувань

2.1 Основні означення теорії графів

Спочатку наведемо основні означення теорії графів.

Означення 2.1. Неорієнтований граф — пара множин (V, E), де $E \subset V^{(2)}$, тобто елементи $(u, v) \in E$ (ребра) – невпорядковані пари вершин; позначають $G = (V, E)$.

Означення 2.2. Орієнтований граф — пара множин (V, E), де $E \subset V \bigtimes V$, ребра – впорядковані пари вершин; позначають $G = (V, E)$.

Означення 2.3. Інцидентними називають веришину v та ребро e, якщо v належиить e.

Означення 2.4. Суміжними називають дві вершини v, u, які сполучає деяке ребро; або два ребра, які мають спільну вершину.

Означення 2.5. Граф $G = (V, E)$ називається **повним**, якщо кожна вершина суміжна з кожною іншою вершиною.

Повний граф з n вершинами позначається K_n.

Означення 2.6. Граф $G = (V, E)$ називається **порожнім**, якщо $E(G) = \emptyset$.

Означення 2.7. Степенем $deg(v)$ вершини v, графа $G = (V, E)$ називається кількість вершин u, які інцидентні вершині v (кількість ребер, які виходять з вершини v).

Означення 2.8. Двочастковий граф $G = (V, E)$ – граф множину вершин якого можливо розділити на дві непорожні множини V_1, V_2 так ,що $V = V_1 \sqcup V_2$, а будь-яке ребро сполучає вершину з множини V_1 з вершиною з множини V_2.

Означення 2.9. Шляхом називається скінченна послідовність вершин, у якій будь-які дві сусідні вершини сполучені ребром.

Означення 2.10. Граф G є **підграфом** графа H, якщо кожна вершина графа G є вершиною графа H, і кожне ребро графа G є ребром графа H. При цьому дві вершини G, сполучені ребром у H, не обов'язково сполучені ребром у G.

Означення 2.11. Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ є **ізоморфними**, якщо існує бієкція $f : V_1 \to V_2$ множини вершини графа G_1 на множину вершин графа G_2, яке задовольняє умові: $\forall u, v \in V_1\ f(u),\ f(v) \in V_2$ сполучені ребром.

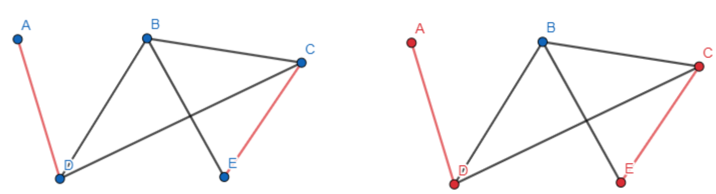
Задача перевірки ізоморфізму графів належить до класу задач, для яких поки що невідомо, чи є вони поліноміально вирішуваними, чи ні. Тобто поки що не побудований поліноміальний алгоритм перевірки ізоморфізму графів. Ізоморфізм можна розглядати також як перенумерацію вершин графа, тобто будь-яка кількісна характеристика структури графа при ізоморфізмі залишається незмінною. Такі характеристики називаються інваріантами графа.

Означення 2.12. Граф $G = (V, E)$ називається **регулярним**, якщо $\forall v \in V\ deg(v) = n$, для даного n.

2.2 Парування

Означення 2.13. Парування – підмножина ребер $E(G)$ графа G, така що її елементи попарно не мають спільних вершин.

Означення 2.14. Також зручно позначити підграф M графу G, такий що його множина ребер $E(M)$ є паруванням для G, назвемо M **Парувальним підграфом**.



(а) Парування (б) Парувальний підграф

Означення 2.15. Парування Y називається максимальним, якщо для будь-якого іншого парування $X, |Y| \geq |X|$

Помітимо, що обидва парування на попередніх рисунках є максимальними.

Означення 2.16. Досконале парування – парування, таке що його парувальний підграф M містить всі вершини G, $V(M) = V(G)$

Оскільки за означенням парувальні підграфи мають лише парну к-сть вершин, досконале парування існує лише коли $V(G) = 2n, n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.17. Парування, які містять всі вершини окрім однієї називають **майже досконалими**.

Помітимо, що парування на попередніх рисунках також є майже досконалими.

Отож, аби розв'язати задачу зі вступу, достатньо знайти досконале парування, тому далі ми розглянемо необхідну для цього теорію.

2.3 Теорема Холла

Задачу знаходження критерію існування досконалого парування у XX столітті розв'язав британський математик Філліп Холл.

Теорема 2.18. *[3] В двочастковому графі G з частками $U, W-$ досконале парування M існує тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $X \subseteq U$, потужнісь X не менша потужності множини суміжних їй вершин $N(X) \subseteq W$, тобто $|X| \geq |N(X)|$.*

Доведення. Необхідність даного критерію є очевидна, оскільки якщо умова не виконується, то $|M| < |X|$.

Достатність доведемо за індукцією по кількості вершин . При $n = 1$, де n – потужність частки W, умова виконується, і парування є тривіальним. Отже, припустимо, що для будь-якого числа менше n, твердження виконується. Маємо лише 2 випадки:

Випадок 1. $\exists k : n \geq k \geq 1$ та знайдеться така група вершин $W' \subset W$, що $|W'| = k$, для якої існує відповідна множина суміжних їм вершин U', рівна за потужністю $|U'| = k$.

Для множини W' виконується припущення індукції, отже, розглянемо підграф G_k на вершинах $W \setminus W'$ та $U \setminus U'$. Іншими словами, розглянемо граф без вже розпарованих вершин, тепер покажемо, що для графу G_k все ще виконуються умови теореми.

Оберемо довільну множину $W'_k \subset (W \setminus W')$, потужність якої позначимо $r = |W'_k|$, тоді відповідна множина вершин $U'_k \subset (U \setminus U')$, така, що її потужність $s = |U'_k|$, покажемо, що умова виконується, а тобто $r \geq s$.

Повернемось до початкового графу G, за новими позначеннями
$|U'| = k + r$, а також $|W'| = k + s$, отже, з припущення індукції

$k + r \geq k + s \implies r \geq s.$

Випадок 2. $\forall W' \subset W : |W'| = k, 1 \leq k \leq n$, а для множини суміжних їм вершин виконується $|U'| \geq k + 1$.

Цей випадок значно простіший, виключимо дві суміжні вершини $w \in w'; u \in U'$ з відповідних множин W' та U'. Для довільної підмножини $W'' \subset W'$ потужності $1 \leq k \leq n-1$, відповідна множина суміжних вершин U'', за умовою $|U''| \geq k + 1$.

□

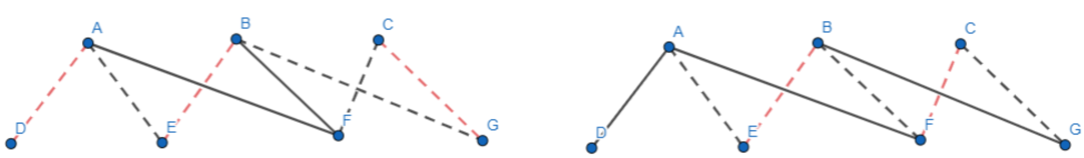
2.4 Теорія переміжних шляхів

Тепер, знаючи критерій існування досконалого парування, логічно і цікаво знайти алгоритми його побудови. Отож розглянемо для цього необхідні означення та твердження.

Означення 2.19. Переміжний шлях – такий шлях, що його елементи по черзі або входять, або не входять до парування.

За поняттям переміжного шляху можливо ввести поняття покриття для парування.

Означення 2.20. Для парування M **покриттям (шляхом розширення)** називається такий переміжний шлях, що його перше та останнє ребро не належить M.



(а) Переміжний шлях (б) Покриття парування

На рисунках вище ребра, що позначені червоним формують парування, а пунктиром – його покриття.

Теорема 2.21. *[7] Якщо для парування M існує покриття, тоді M – не максимальне парування.*

Доведення. Припустимо, що для парування M, такого, що $|M| = n$ існує покриття C, покажемо, що можливо побудувати парування $M' : |M'| = n + 1$.

Розглянемо множину $M' = C \triangle M$. За означенням шляху, кожна вершина в M' зустрічається лише раз, а також, оскільки в C кожна вершина мала степінь 2, в M' кожна вершина має степінь 1. Отже, M' – парування.

За означенням, $|C| = 2n + 1$, тому $|M'| = n + 1$. □

Наслідок. Якщо M – максимальне парування, то для нього не існує покриття.

2.5 Алгоритми пошуку максимальних парувань

Тепер можемо описати базову ідею, на якій будуються більшість алгоритмів пошуку максимальних парувань:

1. Почнемо з будь-якого парування M_0.
2. Для парування M_i побудуємо покриття C_i, а якщо це неможливо, то термінуємо алгоритм, вважаючи, що M_i – максимальне покриття.
3. Парування $M_{i+1} = C_i \triangle M_i$.

Майже всі алгоритми і справді слідують схожим пунктам, але найбільшим фактором який їх відрізняє – реалізація пошуку покриття. Далі розглянемо 2 способи, та оцінимо їх алгоритмічну складність.

1. За "угорським алгоритмом" (алгоритмом Куна), для побудови покриття використовують побудову найкоротшого шляху за допомогою стандартного алгоритму DFS. Знайдемо такі вершини v, v', що шлях від v до v' буде покриттям M, а довжина такого шляху буде мінімальна.

Оцінка складності досить проста – маємо $|V|$ ітерацій, адже зазвичай починаємо з $M_0 = \emptyset$, а $|M_i| = |M_{i-1}| + 1$. На кожному етапі ітерації перебираємо всі можливі невпорядковані пари вершни, тобто $\frac{|V|^2}{2}$ пар. Для кожної пари виконуємо DFS складність якого $O(|V|)$, отже, маємо складність алгоритму $O(|V|^4)$. Пізніше, оптимізуючи структури данних, складність вдалося знизити до $|V|^3$.

Подивимось на нього в дії.

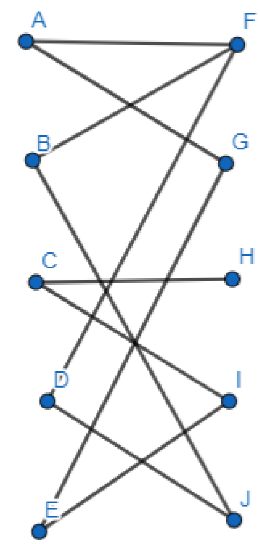


Рис. 3: M_0

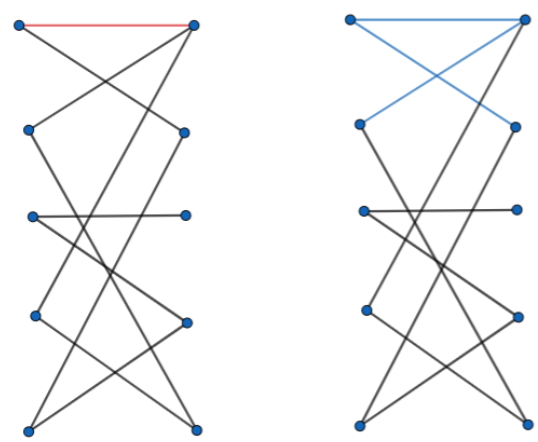


Рис. 4: M_1, P_1

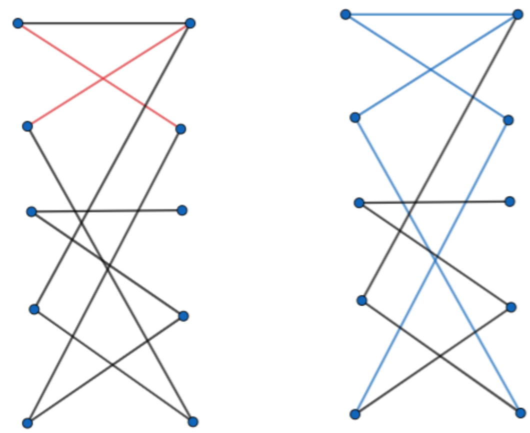


Рис. 5: M_2, P_2

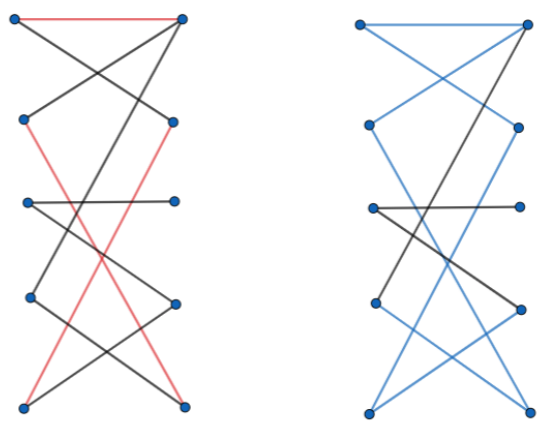


Рис. 6: M_3, P_3

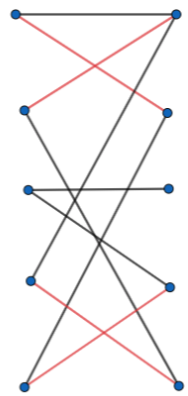


Рис. 7: M_4

Варто зазначити, як на даному прикладі Угорський алгоритм, на жаль, не завжди знаходить максимальне парування, адже в умові, ми припускаємо, що коли для парування немає покриття, то воно максимальне, що не завжди правда.

Також угорський алгоритм є доволі повільним, що робить його майже не придатним для практичного використання, тому розглянемо рішення, яке знизить оцінку складності до $O(|E|\sqrt{|V|})$ в найгіршому випадку.

2. **Алгоритм Хопкрофта-Карпа**.
Основна ідея полягає в тому, аби замість пошуку одного шляху розширення, шукати найбільшу множину найкоротших шляхів розширення.

Задамо міру відстані для двочасткового графа $G = ((V_1 \cup V_2), E)$ з деяким заданим паруванням M, нехай V_1' – множина вершин з V_1, які не входять до M.

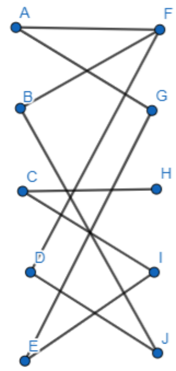
Тоді розглянемо відображення $d : V \to \mathbb{N}$, $d(u)$ – відстань вершини u до V_1'.

Далі визначимо множину $E_M' = \{(u, v) : (u, v) \in M \mid d(u) + 1 = d(v)\}$.

Тепер можемо побудувати максимальну множину шляхів P для парування M:
1. Побудуємо граф $G_M' = (V_1 \cup V_2, E_M')$;
2. $\forall v \in V_1'$ за алгоритмом DFS знаходимо шлях від v до деякої вершини $u \in V_1'$, якщо шлях (v, u) існує додамо його до P.

Тоді весь алгоритм пошуку максимального парування виглядає так:
1. Починаємо з $M_0 = \emptyset$.

2. Для M_i зайдемо множину P_i.
3. $M_{i+1} = M_i \triangle (\bigcup\limits_{p \in P} p)$



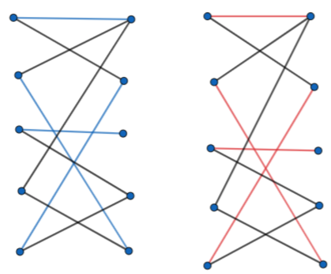


Рис. 8: Перший крок тривіальний

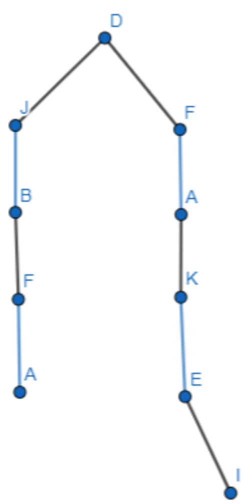


Рис. 9: Будуємо граф G_M

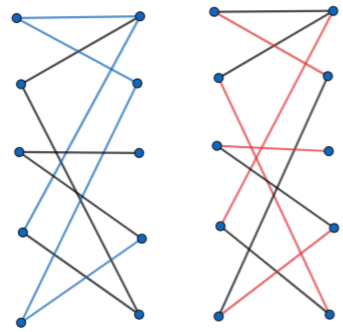


Рис. 10: P_0, та результат симетричної різниці $M_1 = M_0 \triangle P_0$

2.6 Теорема Кьоніга

Тепер задамося питанням чи можна оцінити парування в графі, не знаходячи його. Таку задачу на початку XX століття розв'язав угорьский математик Денеш Кьоніг, насправді приписуючи розв'язок своєму батькові Юлію.

Теорема 2.22. *[8] У будь-якому двочастковому графі кількість ребер в максимальному паруванні дорівнює кількості вершин у мінімальному вершинному покритті.*

Доведення. Нехай заданий двочастковий граф $G = (L \cup R, E)$. Нехай M — максимальне парування в G. За визначенням парування, ніяка вершина не може належати більш ніж одному ребру з $|M|$. Таким чином, якщо вершинне покриття за потужністю рівне M може бути побудовано, то воно мінімальне.

Якщо M — досконале парування, то $|L| = |R| = |M|$. Оскільки кожне ребро G з'єднане рівно з однією вершиною з L і рівно з однією вершиною з R, або L, іншими словами R є вершинним покриттям розміру $|M|$ і теорема доведена.

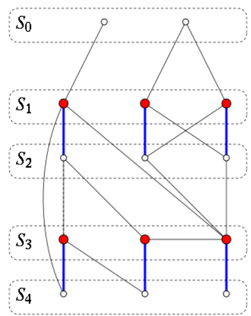
В іншому випадку використовуємо побудову шляху, який чергується для побудови мінімального покриття. При заданому M, розділимо множину вершин $V(G)$ графу G на підмножини S_i, так, що:

1. S_0 – всі вершини, що не належать M.

2. Для $j \in \mathbb{N} : j \geq 0$, S_{2j+1} – множина таких вершин, що кожна з них суміжна з деякою вершиною з S_{2j}, а інцидентне їм ребро належить $E \setminus M$. Або якщо таких вершин немає, але залишаються вершини, що не містяться

в раніше побудованих множинах S_k, вибираємо довільну з них і вважаємо, що S_{2j+1} складається з цієї єдиної вершини.

3. Для $j \in \mathbb{N} : j \geq 0$, S_{2j} – множина таких вершин, що кожна з них суміжна з деякою верщиною $v \in S_{sj-1}$, а інцидентне їм ребро належить паруванню. Зауважимо, $\forall v \ \exists u : (v, u) \in M$, якщо $v \notin S_0$.



Далі покажемо, що об'єднання підмножин з непарними індексами є вершинним покриттям з $|M|$ вершинами. Відмітимо, що ребра M завжди з'єднують вершини суміжних рівнів S_{2j-1} і S_{2j}. Покажемо, що ніяке ребро $e \in E \setminus M$ не з'єднує пару вершин, що лежать на парних рівнях.

Припустимо, що e зв'язує вершину $v \in S_{2j}$ з вершиною $u \in S_{2k}$ при $k < j$. Вершина, сполучена з u ребром e, знаходиться на рівні S_i де $i < 2k + 1 < 2j$, а тому u не може бути зв'язана ребром e з будь-якою вершиною з S_{2j}.

З іншого боку, застосовуючи той же прийом побудови покриття, дві вершини з S_{2j} можуть бути зв'язані один з одним дугою з $E \setminus M$.

Отже, будь-яке ребро з M має в точності одну вершину в непарній множині, а будь-яке ребро з $E \setminus M$ має щонайменше одну кінцеву вершину в непарній множині. Таким чином, об'єднання всіх непарних множин дасть вершинне покриття з $|M|$ вершинами. $\square$

2.7 Парування та відношення множин

Оскільки рисунки паруваннь дуже нагадують рисунки зображеннь, розглянемо зв'язок між цими розділами математики.

Означення 2.23. Відношенням множин $S_1, S_2, ..., S_n$ називається множина $R \subset S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Означення 2.24. Бінарне відношення на множині S – множина $R \subset M \times M$.

Означення 2.25. Бінарне відношення називають **симетричним**, якщо $\forall u, v \in S : (u, v) \in R \implies (v, u) \in R$.

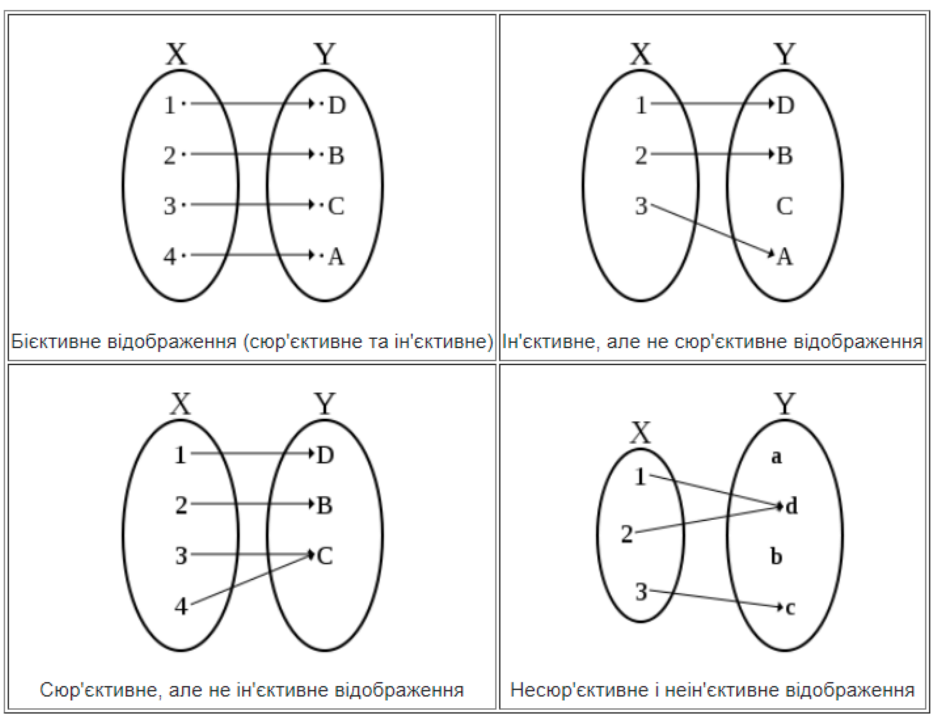
Означення 2.26. Відображенням називають відношення $R \subset X \times Y$ яке задовольняє наступним умовам:
1. Відображення R всюди визначене, тобто, для будь-якого $x \in X$ існує такий $y \in Y$, що xRy (y є образом x для відображення R).
2. Відображення R є ідображенням "багато-до-одного" тобто, якщо $(x, y) \in R$ та $(x, z) \in R$, то $y = z$, тобто, y може бути образом зразу декількох елементів з X, але один елемент x не може породжувати більше одного образа з Y.

Відображення позначають як $f : X \to Y$.

Означення 2.27. Відображення $f : X \to Y$ – **ін'єктивне** тоді й тільки тоді, коли для кожного $y \in Y$, існує не більш як один (або жодного) $x \in X$ такий, що $f(x) = y$, або $\forall x, x') \in X : f(x) = f(x')$ виконується рівність $x = x'$.

Означення 2.28. Відображення $f : X \to Y$ є **сюр'єктивним**, якщо для кожного $y \in Y$, існує щонайменш один $x \in X$ такий, що $f(x) = y$.

Означення 2.29. Бієкція – одночасно сюр'єктивне та ін'єктивне відображення.



Бієктивне відображення (сюр'єктивне та ін'єктивне)

Ін'єктивне, але не сюр'єктивне відображення

Сюр'єктивне, але не ін'єктивне відображення

Несюр'єктивне і неін'єктивне відображення

В загальному випадку між множиною всіх орієнтованих графів із множиною вершин V і множиною всіх антирефлексивних бінарних відношень на V існує взаємно однозначна відповідність: графу $G = (V, E)$ відповідає таке відношення R на V, що $(v, w) \in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v, w) \in E$, $\forall v, w \in V$.

Зокрема, порожньому графу $G = (V, \emptyset)$ відповідає порожнє відношення на V ($R = \emptyset$), а повному графу відношення $(V \bigtimes V) \setminus D$, де D – діагональне відношення: $D = \{(v, v) : v \in V\}$.

Тепер розглянемо орієнтований двочастковий граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Множина $E(G)$ задає відношення $R \subset V_1 \bigtimes V_2$.

Щодо нерієнтованого двочасткового графа $G = (V_1 \cup V_2, E)$, розглянемо $R \subset (V_1 \cup V_2 \bigtimes V_1 \cup V_2)$ таке, що $\forall (u, v) \in E(G)$, $(u, v) \in R$ та $(v, u) \in R$. Очевидно, що R – симетричне бінарне відношення.

При чому за означенням неорієнтованого графа $\exists R_1 \subset V_1 \bigtimes V_2$,
$\exists R_2 \subset V_2 \bigtimes V_1$ такі що, $R = R_1 \sqcup R_2$, і $\forall (v, w) \in R_1$, $(w, v) \in R_2$.

Надалі будемо говорити, що R_1 є відношенням яке визначає граф G, а R_2 є його симетричним доповненням.

Тепер відносно відношень визначимо поняття парування.

Означення 2.30. Для відношення $R \subset V_1 \bigtimes V_2$, множина $M \subset R$ називається **паруванням**, якщо при $V_{1M} \subset V_1, V_{2M} \subset V_2$; $M \subset V_{1M} \bigtimes V_{2M}$ – бієкція, іншими словами, парування є бієкцією для множин, на яких воно визначене.

Теорема 2.31. *Означення парування в термінах двочасткових графів та відношень еквівалентні.*

Доведення. Нехай дано двочастковий граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, відношення R, породжене ним, та його парувальний підграф $M = (V_1' \cup V_2', E_M)$. Покажемо, що парувальний підграф породжує відношення, яке є паруванням в R.

Розглянемо відношення $R_M \subset V_1' \bigtimes V_2'$, що породжується графом M. Оскільки за означенням $\forall u \in V_1' \cup V_2'$
$deg(u) = 1$, тоді $\forall u, v \in V_1'; u \neq v \nexists m \in V_2'$, таких, що $(u, m) \in R$, та $(v, m) \in R_M \implies R_M$ – ін'єкція.

Оскільки будь-яке відношення задане неорієнтованим двочастковим графом графом – симетричне, з попереднього пункту випливає сюр'єктивність відношення R_M, отже, R_M – бієкція, а отже, R_M – парування на R.

Нехай задано відношення $R \subset V_1 \bigtimes V_2$, породжене двочастковим графом $G = (V_1 \cup V_2, E)$, а також відношення $R_M \subset V_1' \bigtimes V_2'$, $V_1' \subset V_1$, $V_2' \subset V_2$, покажемо, що R_M породжене деяким парувальним підграфом в G.

Розглянемо граф G_M, який породжує R_M. Оскільки R_M – відношення, $G_M = (V_1' \cup V_2', E_M)$. $R_M \subset R \implies E_M \subset E$, оскільки R_M – бієкція, тоді $\forall v \in V_1'\ \exists! u \in V_2' : (u, v) \in R_M \implies \forall u \in V_1' \cup V_2'\ \ deg(u) = 1$. Отже, за означенням, G_M – парувальний підграф в G. □

Означення 2.32. Для відношення $R \subset V_1 \bigtimes V_2$, підмножина R, $M \subset V_1 \bigtimes V_2$ називається **досконалим паруванням**, якщо M – бієкція.

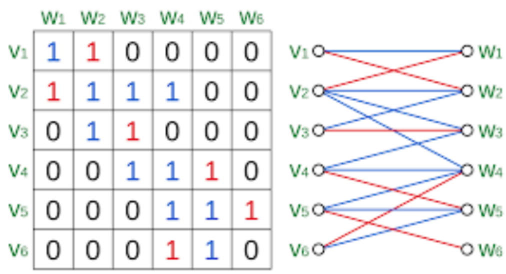


Рис. 11: Двочастковий граф, та породжене ним відношення, червоним виділені парування

Теорема 2.33 (теорема Холла для відношенн)**.** *В відношенні $R \subset X \bigtimes Y$, існує досконале парування, тоді і тільки тоді, коли для будь-якої множини $K \subset X$, або $K \subset Y$, $|Im(K)| \geq |K|$.*

Доведення. Розглянемо граф G, що задає R, $Im(K)$ – множина вершин, суміжних K, а отже доведення аналогічне доведенню теореми Холла для двочасткових графів. □

3 Задачі

3.1 Про студентів та піцу

На чаювання зібралися N студентів, кожен приніс одну піцу масою щонайменше m кг. Усі піци якось розрізали та розклали на M тарілок так, що у кожній тарілці лежить не більше m кг.

Доведіть, що можна роздати студентам по тарілці так, що кожному дістанеться хоча б один шматочок піци, який він сам приніс.

Розв'язання: Побудуємо двочастковий граф G, де вершини будуть ділитись на множину студентів та тарілок, на яких розкладені шматочки піцци, а ребрами будуть поєднаємо студентів з тарілками, на яких є шматочки їх піц.

Оскільки кожен студент приніс як мінімум m кг, то будь-які $K \leq N$ студенти разом принесли не менше як Km кг піци, оскільки Km кг за умовою розкладаються щонайменш на K тарілок, маємо, що для будь-якої підмножини студентів, множина суміжних їм вершин не менша за потужністю.

Одже, існує досконале парування, за яким кожен студент може отримати тарілку зі шматочком своєї піци.

3.2 Узагальнення задачі про студентів та піцу

Прямокутна таблиця m х n заповнена невід'ємними числами, причому існує число $s > 0$ таке, що сума чисел у будь-якому стовпчику не менша s, а сума чисел у будь-якому рядку не більша за s.

Доведіть, що тоді можна з кожного стовпця вибрати клітинку з додатним числом так, що вибрані клітини стоятимуть у різних рядках.

Розв'язання: Позначимо A – множина рядків, B – сповпчиків. Визначимо відношення $R \subset A \bigtimes B$, що $(a, b) \in R \implies$ рядок a та стовпчик b мають спільну клітинку.

Тоді граф G, що задає відношення R, ізоморфний графу, побудованому в попередній задачі, а отже, задачі еквівалентні.

3.3 Досконалі парування в регулярних графах

Чи існує для будь-якого регулярного двочасткового графа досконале парування.

Розв'язання: Нехай дано регулярний двочастковий граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $\forall v \in V_1 \cup V_2$, $deg(v) = n$. Для довільного $|V_1 \cup V_2| \geq k \geq 0$, розглянемо множину $A \ \subset V_1$, таку, що$|A| = k$. Всі вершини множини A мають разом kn інцидентних ребер, що зв'язують їх з вершинами B. З регулярності випливає, що степінь кожної вершини $v \in B$ не більша n, якщо $n \neq 0 \implies |B| \geq k$.

Отже, за теоремою Холла, будь-який непорожній регулярний двлчастковий граф має досконале покриття.

3.4 Розбиття аркуша на многокутники

Аркуш паперу з обох сторін розбитий на n многокутників рівної площі m. Доведіть, що його мого можна проткнути циркулем в n місцях так, щоб кожен многокутник був проткнутий рівно один раз.

Розв'язання: Поначимо множини A – многокутники на одній стороні аркуша, B – многокутники на іншій стороні. Задамо відношення $R \subset A \bigtimes B$, $(a, b) \in R$, якщо аркуш можливо проткнути один раз, так аби проткнути обидва прямокутники a та b. Розглянемо $K \subset A$, їх сумарна площа – km.

Розглянемо $Im(K)$, очевидно, загальна площа $Im(K) \geq km$, а оскільки кожний многокутник має площу m, то $|Im(K)| \geq |K|$. Отже, за теоремою Холла в R існує досконале парування.

3.5 Про шахову дошку

На шаховій дошці помітили 16 клітинок так, аби на кожній вертикалі та горизонталі було по дві помічені клітинки. Доведіть, що на помічених клітинках можливо розставити 8 білих та 8 чорних фігур, так щоб на всіх вертикалях і горизонталях стояли і чорні, і білі фігури.

Розв'язання: Позначимо рядки як V_1, а сповчики як V_2, тоді розглянемо двочастковий граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, де вершини зв'язані ребром, якщо відповідні стовпчик та рядок мають спільну клітинку, що була помічена за умовою.

За умовою степінь кожної вершини 2. А отже, регулярний двочастковий граф має досконале парування M_1, виключимо M_1 з E, степінь кожної вершини тепер буде 1, а отже, існує ще одне парування M_2, при чому $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

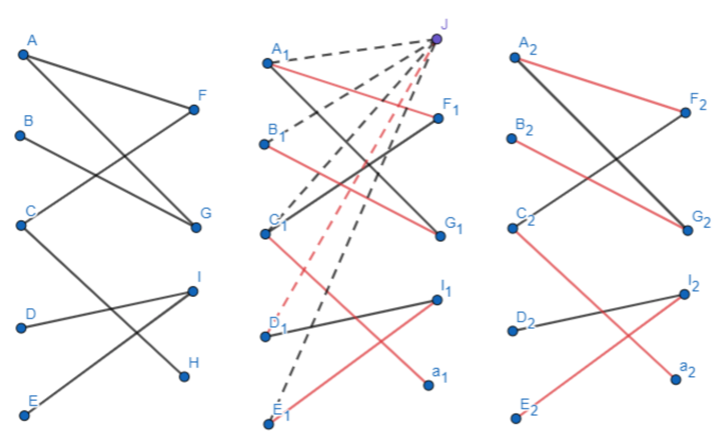
Оскільки ребра графу G – клітинки помічені за умовою, поставимо білі фігури в клітинках M_1, а чорні в клітинках M_2.

3.6 Теорема Холла з дефіцитом

Маємо двочастковий граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $|V_1| = n$, при чому $\forall K \subset V_1 \; : n \geq |K| = k \geq 1$, а також множина K' – суміжних до K веришн, має потужність $\geq k - d$, для деякого $d \leq k$. Чи існує досконале парування для графу $G' = (V_1' \cup V_2, E')$, де $V_1' \subset V_1 : |V_1'| = n - d$?

Розв'язання: Кожна множина $S \subset V_1$ має хоча б $k - d$ суміжних, додамо d "уявні"вершин до множини V_2, та зв'яжемо їх ребрами з кожною вершиною із V_1, тоді кожна $S \subset V_1$ має хоча б k суміжних, $\implies$ за теоремою Холла в новому графі існує досконале парування.

Тепер заберемо додані уявні вершини, а також ребра, в паруванні, які були їм інцидентні, а отже, маємо парування для $n - d$ вершин.



3.7 Формування команд

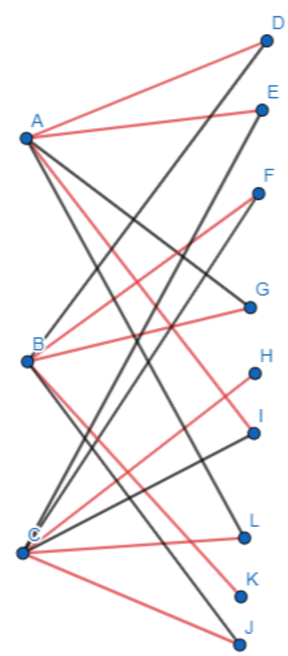
Маємо n команд студентів на олімпіаді з математики. Кожен тренер команди, має деяких студентів, яких вони хотіли б запросити.

Доведіть, що "будь-які k команд готові запросити разом не менш ніж km студентів є необхідним та достатнім критерієм аби всі команди обрали по m студентів кожна.

Розв'язання: Доведемо це твердження за індукцією по m. $m = 1 \implies$ маємо умову теореми Холла.

Припустимо, що твердження виконується для m, розглянемо ситуацію $m+1$, тобто будь-які k команд готові запросити $m+1$ студентів. Помітимо, що виконується теорема Холла, тому побудуємо парування M.

Видалимо з розгляду обраних в паруванні M студентів, тоді будь-які k команд, все ще готові запросити $\geq km$, студентів, а отже, за припущенням індукції тренени можуть набрати ще по m студентів, таким чином, що в кожну комманду буде набрано $m + 1$ студент.



3.8 Про знайомства юнаків та дівчат

У компанії юнаків та дівчат не менше n людей. Виявилося, що серед них не можна скласти $n + 1$ шлюб за знайомством.

Доведіть, що тоді можна вибрати n людей так, що з будь-якої пари знайомих хоча б одного вибрали.

Розв'язання: Розглянемо граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, де V_1 – юнаки, V_2 – дівчата, а юнак зв'язаний з дівчиною ребром, якщо вони знають один одного.

Розглянемо M – максимальне парування в G. За умовою, $|M| \leq n+1$, а отже, за теоремою Кьоніга, максимальне вершинне покриття за потужністю $\leq n$. Тоді, за означенням вершинного покриття, можна обрати $k = |M|$ вершин, які попарно не суміжні, але не існує ребра не інцидентного жодній з k вершин.

Отже, достатньо обрати цих n людей.

3.9 Турнір

В турнірі за круговою системою беруть участь $2n$ команд. Формат турніра такий, що кожного дня, протягом $2n-1$ днів, всі команди грають 1 матч проти однієї іншої команди, так, аби після останнього $(2n-1)$-го дня, кожна команда зіграла з кожною. Кожен матч має одного переможця та програвшого.

Чи можна кожного дня нагороджувати команду-переможця, аби вони не повторювались?

Розв'язання: За умовою, кожного дня маємо n переможців. Розглянемо будь-які $1 \leq k \leq 2n-1$ днів, разом за ці k днів маємо k унікальних переможців. Інакше покажемо суперечність з форматом проведення турніру.

Для $k \leq n$ суперечність очевидна.

Розглянемо $k \geq n$. Оскільки $2n-(k-1)$ команд тільки програвали всі k днів, вони програли $k(2n-k+1)$ ігор, а максимальна кількість ігор, що можливо зіграти за k днів.

$kn \geq k(2n-(k+1))$

$n \geq 2n-k+1$

$n \leq k-1$

Отримуємо суперечність.

Отже, за теоремою Холла, можливо обрати як мінімум одну унікальну команду-переможця кожного дня турніру.

4 Висновки

Теорія парувань – один з фундаментальних розділів теорії графів. В цій роботі ми розглянули та довели основні теореми на яких будується ця теорія, а саме теорема Холла та Кьоніга.

Також ми визначили зв'язок між теорією парувань на двочасткових графах, та на відношеннях, і довели їх еквівалентність. Також були наведені, сформульовані та розв'язані задачі з теорії парувань.

Література

1. Chartrand G. Introductory Graph Theory / G. Chartrand – 1945.
2. Plummer, M. D. (1986), Matching Theory, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, North-Holland.
3. Hall P. On Representative Subsets / P. Hall – 1935.
4. Jonathan Hirata. Notes on Matching, – 2013.
5. DeVos M. Graph Theory / Matt DeVos. – 2010.
6. https://brilliant.org/wiki/hall-marriage-theorem/.
7. https://brilliant.org/wiki/matching-algorithms/.
8. Biggs, N. L.; Lloyd, E. K.; Wilson, R. J. Graph Theory 1736—1936.