

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Києво-Могилянська академія»  
Факультет інформатики  
Кафедра математики

**Кваліфікаційна робота**  
освітній ступінь – бакалавр

на тему: «Розробка математичної моделі поширення епідемії Covid-19 в  
Україні в умовах воєнного стану»

Виконала  
Ляпіна Анна Юріївна  
студентка 4-го року навчання,  
освітньої програми «Прикладна математика», 113

Керівник  
Власенко Катерина Володимирівна  
доктор педагогічних наук, професор

Рецензент  
Олександр Анатолійович Костіков  
доцент, кандидат фізико-математичних наук

Кваліфікаційна робота захищена з оцінкою

\_\_\_\_\_

Секретар ЕК

\_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

Київ – 2023

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики  
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Зав. кафедри математики,  
Доцент, кандидат ф.-м. наук  
Руслан Костянтинович Чорней

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2023

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ  
на кваліфікаційну роботу студентці 4-го курсу факультету інформатики  
Ляпіній Анні Юріївні

Тема: Розробка математичної моделі поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану.

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

- 1 Анотація
- 2 Вступ
- 3 Аналіз предметної області
- 4 Корегування моделі відповідно до умов воєнного стану
- 5 Програмне моделювання отриманої моделі
- 6 Висновки
- Література
- 7 Додаток

Дата видачі “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2023 р. Керівник \_\_\_\_\_  
Завдання отримано \_\_\_\_\_

## Календарний план виконання кваліфікаційної роботи

**Тема:** Розробка математичної моделі поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану

### Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу	03.11.2022	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи	11.2022	
3.	Аналіз предметної області	11.2022-12.2022	
3.	Модифікація моделі та її обрахунків	01.2023-02.2023	
4.	Візуалізація отриманої моделі	03.2023	
5.	Написання текстової частини	04.2023	
6.	Внесення змін до кваліфікаційної роботи відповідно до зауважень наукового керівника	11.2022-04.2023	
7.	Виступ на науковій конференції	11.05.2023	
8.	Попередній захист роботи	13.05.2023	
9.	Проходження перевірки на плагіат	28.05.2023	
10.	Захист роботи	05.06.2023	

Студент Ляпіна А.Ю. \_\_\_\_\_

Керівник Власенко К.В. \_\_\_\_\_

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2023 р.

<b>ЗМІСТ</b>	<b>Стор</b>
<b>Анотація</b> .....	5
<b>Вступ</b> .....	6
 <b>Розділ 1: Аналіз предметної області</b>	
1.1 Аналіз літератури по тематиці дослідження .....	8
1.2 Опис математичних моделей поширення епідемій .....	10
1.3 Математичні основи моделі SIR .....	23
1.4 Варіації моделі SIR .....	26
1.5 Висновки до першого розділу .....	28
 <b>Розділ 2: Корегування моделі відповідно до умов воєнного стану</b>	
2.1 Умови, що сприяли корегуванню моделі .....	29
2.2 Модифікація моделі SIR із врахуванням воєнного стану ..	30
2.3 Розрахунки отриманої моделі .....	32
2.4 Висновки до другого розділу .....	36
 <b>Розділ 3: Програмне моделювання отриманої моделі</b>	
3.1 Вибір мови програмування .....	37
3.2 Програмування моделі .....	38
3.3 Висновки до третього розділу .....	41
 <b>Висновки по роботі</b> .....	 43
<b>Використана література</b> .....	44
<b>Додаток А</b> .....	47

## Анотація

Кваліфікаційна робота присвячена пошуку моделі поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану 2022-ого – 2023-ого років. Для дослідження використовувались англomовні джерела та офіційні дані про статистику поширення вірусу. Результатом аналізу джерел та порівняння моделей став вибір моделі SEIRD, що було взято за основу для здійснення модифікації. З метою модифікації моделі було запроваджено додаткові умови, що було виокремлено, через введення воєнного стану в країні. Програмування отриманої моделі відбувалось за допомогою мови програмування R. Також використовувалось відкрите інтегроване середовище розробки для R – R Studio.

Ключові слова: математична модель, модель SEIRD, COVID-19, воєнний стан, умови, модифікація.

## Вступ

У грудні 2019-го року в людини була вперше виявлена коронавірусна хвороба у місті Ухань, Центрального Китаю. Хвороба розпочалася як спалах, що перетворився у пандемію. Пандемія, викликана цим COVID-19, мала і має значний вплив на життя людей за 2019-2023-і роки, як на світовому, так і на національному рівнях. По-перше, епідемія забрала багато життів, по-друге, вжиті заходи по боротьбі з пандемією вплинули на економіки країн, і Україна, зокрема, не стала винятком. Пандемія COVID-19 також серйозно вплинула на систему охорони здоров'я, перевантаживши пацієнтів із COVID-19 і затримавши лікування інших хвороб. Незважаючи на вакцинацію, випадки захворювання на COVID-19 трапляються й сьогодні. Саме тому дослідники Aniruddha Adiga [1], Saeed Ahmad [2], Gerardo Chowell [3], Muhammad Altaf Khan та Abdou Atangana [4] та інші, прагнуть якнайшвидше зрозуміти логіку вірусу: як він поширюється, побачити закономірність, аби будували математичні моделі, виявити завчасно піки захворюваності, та у свій час запровадити заходи безпеки, такі як: карантинні обмеження, вакцинація, належне дотримання гігієни та масковий режим.

Дана кваліфікаційна робота мала на меті знайти та модифікувати математичну модель, що зможе описувати поширення коронавірусної інфекції в Україні під час воєнного стану 2022 – 2023-іх роках.

Для реалізації мети роботи постали наступні задачі: проаналізувати літературу по заданій тематиці та дослідити вже наявні математичні моделі разом з їх варіаціями, знайти модель, яку можна буде використати за основу для створення моделі, що буде враховувати умови воєнного стану в Україні, та візуалізувати отриману модель програмними засобами.

Предметом дослідження є математичні моделі, що описують поширення та спалахи пандемії COVID-19. Об'єктом цього дослідження є модель SIR, як основа для модифікації через запровадження умов відповідно до воєнного стану в країні.

Дана робота складається із трьох розділів.

У першому розділі наведено огляд та аналіз літератури, розглянуті та порівняні математичні моделі, що уможливають вирішення проблеми дослідження.

Другий розділ присвячено корегуванню моделі SEIRD відповідно до умов воєнного стану, а саме: представлено причини, що зумовили модифікацію моделі, скореговано модель, здійснено її обрахунок.

У третьому розділі представлено програмування уточненої моделі. Для запрограмування моделі була використана мова програмування для статистичних обчислень, аналізу та зображення даних в графічному вигляді R, вільне та відкрите інтегроване середовище розробки (IDE) для R – R Studio.

## 1. Аналіз предметної області

### 1.1 Аналіз літератури по тематиці дослідження

Поточна пандемія COVID-19 спричинила розгортанню значної кількості досліджень математичних моделей. У міру того, як пандемія поширювалась, дослідники розглядали: стратегії втручання та контролю поширення хвороби, моделі прогнозування рівня захворюваності, госпіталізації та смертності, ефективність розподілу обмежених медичних ресурсів для лікування пацієнтів та запровадження змін в індивідуальній і колективній поведінці, що підпорядковуються державною політикою. Так, досліджуючи типи і форми моделей, науковець Aniruddha Adiga [1] зазначав, що їхнє залучення має залежати від фази епідемії, де і як почалася пандемія, ризику її поширення в регіоні, ризику занесення в інші регіони світу, базове розуміння збудника та його епідеміологічних характеристик. У своїй науковій роботі під назвою "Mathematical models to characterize early epidemic growth: A review." [3] дослідник Gerardo Chowell трохи детальніше розкрив цю тему і більше поринув у моделювання та виведення характеристики ранніх моделей зростання епідемії та створення механічних моделей, що представляють собою профілі зростання епідемії. Також при цьому, пан Gerardo Chowell намагався робити спроби прогнозування епідемії інфекційних захворювань. Науковців хвилювало питання – як можна зменшити ризики зараження. Логічним висновком, до якого прийшов математик-дослідник Muhammad Altaf Khan використовуючи математичне моделювання, було наступне: найефективнішим способом зменшення інфекції є ізоляція та карантин [4]. Також науковці зазначали, що засоби контролю можуть бути корисними для мінімізації кількості інфікованих осіб і покращення здоров'я населення [9]. Проте, під час проведення досліджень, з'явився новий штаб COVID-19, що мав

назву Omicron. Саме Omicron змусив Muhammad Altaf Khan рухатись далі. Для дослідження поширення Omicron розглядалась диференціальна модель епідемії другого порядку. Цю ж модель було залучено для вивчення можливих декількох хвиль хвороби. Оскільки, кожна наступна «версія» вірусу ставала все небезпечнішою, то потрібно було визначити на скільки люди є обізнаними в питанні безпеки. Саме так на світ з'явилась модель та її блок-схема, яка розглядає різні стратегії госпіталізації для легких та важких випадків. Її автором став Salihu Sabiu Musa [7].

Використовуючи вслід за Adam Kucharski [5] у своїх працях математичні графіки та формули Saeed Ahmad [2] застосовував теорію функції Ляпунова та їїню лінеаризацію задля виведення умов для аналізу стійкості можливих станів рівноваги. Таким чином він запропонував удосконалену модель. Її залучення враховувало резистивний клас людей разом із карантинним для відстеження динаміки передачі COVID-19. У свою чергу Adam Kucharski, моделюючи процес спостереження Пуассона та використовуючи послідовне моделювання методом Монте-Карло, продемонстрував графіки динаміки поширення захворюваності у місті Ухань, що вважається Батьківщиною коронавірусу. Також слідкування за динамікою спалахів пандемії відбувалось за допомогою моделі Гауса та континуальної моделі, представлених у роботі Vishnu Vytla [8]. Своїми висновками Donald Ludwig [6] намагався підтвердити, що людство ще далеке від адекватного та точного розуміння епідемічних явищ. На думку науковця, чисто емпіричний підхід забезпечує лише обмежене розуміння та інколи, навіть, може призвести до ще більших ускладнень. Незважаючи на суперечливі думки, вчені винайшли вакцин, Zhong-Hua Shen продемонстрував модель вакцинації [9] та разом із Ssebuliba [10] прийшов до висновку, за яким розробка і аналіз детермінованої математичної моделі має

залежати від розміру середовища існування, в якому здійснюється дослідження.

## 1.2 Опис математичних моделей поширення епідемії

Модель Гауса [8] для прогнозування поширення COVID-19 у Німеччині та Європі:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(t) = d_{max} \exp \left\{ \frac{(t-t_{d,max})^2}{(\omega_d)^2} \right\}, \\ d_m(t) = \frac{dD_m(t)}{dt}, \\ \ln(d_m(t)) = \ln \left( d_{max} - \left( \frac{t-t_{d,max}}{\omega_d} \right)^2 \right) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2, \\ c_0 = \ln d_{max} - \frac{(t_{d,max})^2}{(\omega_d)^2}, c_1 = \frac{2t_{d,max}}{(\omega_d)^2}, c_2 = \frac{1}{(\omega_d)^2}. \end{array} \right.$$

Де:

$\omega_d$	ширина функції Гауса
$d_{max}$	максимальне значення смертей
$t_{d,max}$	момент часу з максимальною кількістю смертей
$c_0, c_1, c_2$	коефіцієнти полінома

Модель Гауса зазвичай використовується для прогнозування тенденцій на основі історичних даних і не враховує вплив змінних умов, таких як соціальні обмеження, дії лікування та вакцинації або воєнний стан. Через свою простоту Модель Гауса не може охопити всі випадки, що нас цікавлять. Отже, дана модель може бути недостатньою для прогнозування поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану.

*Метапопуляційні моделі перехресного зв'язку* не моделюють процес контактування осіб із різних груп. Вони, скоріше, пропонують матрицю контактів, яка описує їх силу. Цю контактну матрицю іноді називають WAIFW або матрицею «хто від кого заражається». У найпростіших моделях перехресного зв'язку елементи цієї матриці представляють як вплив взаємодії між будь-якими двома субпопуляціями, так і ризик передачі хвороби як наслідок цих взаємодій.

Моделі перехресно зв'язаних метапопуляцій можна використовувати для вивчення деяких аспектів епідемій, але вони не враховують детальних механізмів передачі інфекції серед людей. Таким чином, дана модель не є достатньо детальною, щоб використовувати її для побудови математичних моделей поширення епідемії Covid-19 в умовах воєнного стану в Україні.

*Феноменологічна модель [3]* характеризує ранню фазу зростання інфекційного захворювання.

$$\frac{dC(t)}{dt} = C'(t) = rC(t)^p,$$

Де:

$C'(t)$	описує криву падіння за час $t$
$C(t)$	описує кумулятивну кількість випадків за час $t$
$r$	позитивний параметр, що позначає швидкість зростання
$p \in [0; 1]$	параметр «уповільнення зростання»

Якщо  $p = 0$ , тоді це рівняння описує постійну кількість випадків у часі, а сукупна кількість випадків зростає лінійно. У той же час, якщо  $p = 1$ , то рівняння моделює експоненціальну динаміку зростання (рівняння Мальтуса). Проміжні значення  $p$  між 0 і 1 описують суб-експоненціальні моделі

зростання. Наприклад, якщо  $p = \frac{1}{2}$ , то частота випадків зростає лінійно, тоді як сукупна кількість випадків відповідає квадратичному поліному. Для суб-експоненціального зростання (тобто  $0 < p < 1$ ) розв'язок цього рівняння дається наступним поліномом ступеня  $m$ :

$$C(t) = \left(\frac{r}{m}t + A\right)^m,$$

Де:

$m$	додатне ціле число
$A$	константа, що залежить від початкової умови $C(0)$

Параметр «уповільнення зростання»  $p$  визначається як  $p = 1 - \frac{1}{m}$ . Зокрема,  $A = \sqrt[m]{C(0)}$ .

Феноменологічні підходи підходять для моделювання розповсюдження хвороби та зростання епідеміології інфекційної хвороби, враховуючи потенційний внесок декількох шляхів передачі. У таких ситуаціях феноменологічні моделі забезпечують відправну точку для створення ранніх оцінок потенціалу передачі та формування короткострокових прогнозів траєкторії епідемії та прогнозів остаточного розміру епідемії.

Феноменологічні моделі зазвичай описують динаміку поширення інфекції на ранніх стадіях захворювання, коли інформація про характеристики інфекції ще не повністю вивчена. Однак у стані війни ситуація з COVID-19 стає складнішою через масштабну військову мобілізацію, евакуацію населення, пандемію з кількома варіантами, різні умови догляду тощо. Це вимагає більш складної моделі для врахування інших факторів та їхній потенціал впливати на різні групи людей.

Уявлення про модель динаміки зараження на COVID-19, а також його версії Omicron [4], може бути отримане з трансмісійної схеми (рис. 1.2.1).

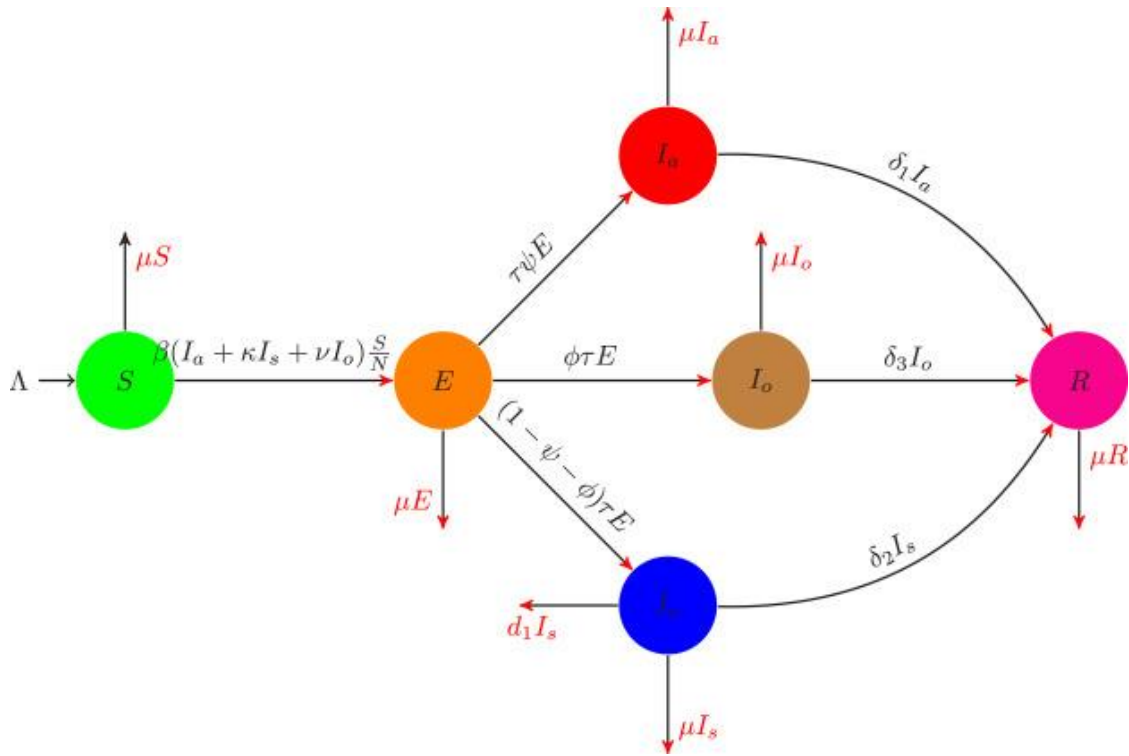


Рис. 1.2.1. Трансмісійна схема моделі

Модель представлена еволюційними диференціальними рівняннями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta(I_a + \kappa I_s + \nu I_o)}{N} S - \mu S, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta(I_a + \kappa I_s + \nu I_o)}{N} S - (\tau + \mu) E, \\ \frac{dI_a(t)}{dt} = \tau \psi E - (\delta_1 + \mu) I_a, \\ \frac{dI_s(t)}{dt} = (1 - \psi - \phi) \tau E - (\delta_2 + \mu + d_1) I_s, \\ \frac{dI_o(t)}{dt} = \phi \tau E - (\delta_3 + \mu) I_o, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta_1 I_a + \delta_2 I_s + \delta_3 I_o - \mu R. \end{array} \right.$$

Де:

$\Lambda$	народжуваність вразливого населення
$\mu$	люди, які помирають природним шляхом
$\beta$	здорові особи, інфіковані після контакту з безсимптомними інфікованими
$\kappa$	ймовірність заразності від хворого із симптомами
$\nu$	ймовірність заразності від хворого на Omicron
$\tau$	інкубаційний період інфікованих осіб
$\psi$	пропорція, яка сприяє зараженню до безсимптомного класу
$\phi$	пропорція, яка сприяє зараженню до класу інфікованих варіантом Omicron
$\delta_1$	одужання осіб із безсимптомного класу
$\delta_2$	одужання осіб із класу з симптомами
$\delta_3$	одужання осіб із Omicron інфікованого класу
$d_1$	особи із симптомами, що вмирають від інфекції

Модель динаміки зараження COVID-19 та її версію Omicron можна використовувати для аналізу поширення епідемій за конкретних умов, але вони не підходять для створення математичних моделей у стані війни, оскільки не враховують специфіку воєнного стану та його вплив на динаміку поширення інфекції.

*Модель, що розглядає спосіб передачі захворюваності від людини до людини як потенційний шлях передачі та ігнорує інші шляхи через їх менший вплив на передачу в громаді [7]. Рівняння моделі задано наступною нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь:*

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dS_a}{dt} &= -\frac{\alpha\beta S_a(\sigma A+I)}{N} + \nu S_u, \\
 \frac{dS_u}{dt} &= -\frac{\beta S_u(\sigma A+I)}{N} - \nu S_u, \\
 \frac{dE}{dt} &= -\frac{\beta(\sigma A+I)(\alpha S_a+S_u)}{N} - \theta E, \\
 \frac{dA}{dt} &= k\theta E - \eta_a A, \\
 \frac{dI}{dt} &= (1-k)\theta E - (\eta_i + \tau + \rho + \delta_i)I, \\
 \frac{dH_m}{dt} &= \tau I + \psi H_s - (\eta_{H_m} + \varphi)H_m, \\
 \frac{dH_s}{dt} &= \rho I + \varphi H_m - (\eta_{H_s} + \psi + \delta_{H_s})H_s, \\
 \frac{dR}{dt} &= \eta_a A + \eta_i I + \eta_{H_m} H_m + \eta_{H_s} H_s, \\
 \frac{dD}{dt} &= \delta_i I + \delta_{H_s} H_s.
 \end{aligned} \right.$$

Де:

$N$	загальна кількість населення
$S_a$	обізнані вразливі особи
$S_u$	несвідомі вразливі особи
$E$	особи, що знаходяться в латентному періоді
$A$	безсимптомно інфіковані особи
$I$	симптоматично заразні особи
$H_m$	госпіталізовані/ізолювані особи з легкими симптомами
$H_s$	госпіталізовані/ізолювані особи з важкими симптомами
$R$	ті, хто одужав
$D$	ті, хто помер
$\beta$	частота передачі спільноти або успішного контакту
$\alpha$	параметр модифікації для зниження заразності в $S_a$

$\sigma$	фактор інфекційності для безсимптомних осіб
$\nu$	швидкість, з якою необізнані сприйнятливі дізнаються про хворобу
$\theta$	швидкість прогресування хвороби
$k$	частка інфекцій, які протікають безсимптомно
$\tau(\rho)$	показники госпіталізації від $I$ до $H_m$ ( $H_s$ )
$\psi$	швидкість, з якою госпіталізовані особи переходять від легкої до важкої ізоляції
$\varphi$	швидкість, з якою госпіталізовані особи переходять від важкої ізоляції до легкої
$\delta_i (j = i, H_s)$	смертність через COVID-19
$\eta_i (k = a, i, H_m, H_s)$	коефіцієнти відновлення

Нижче представлено схематичну діаграму моделі (рис. 1.2.2). Неінфіковані відсіки представлені зеленим кольором, відсік сірим позначає заражених осіб, тоді як заражені відсіки зображені помаранчевим кольором.

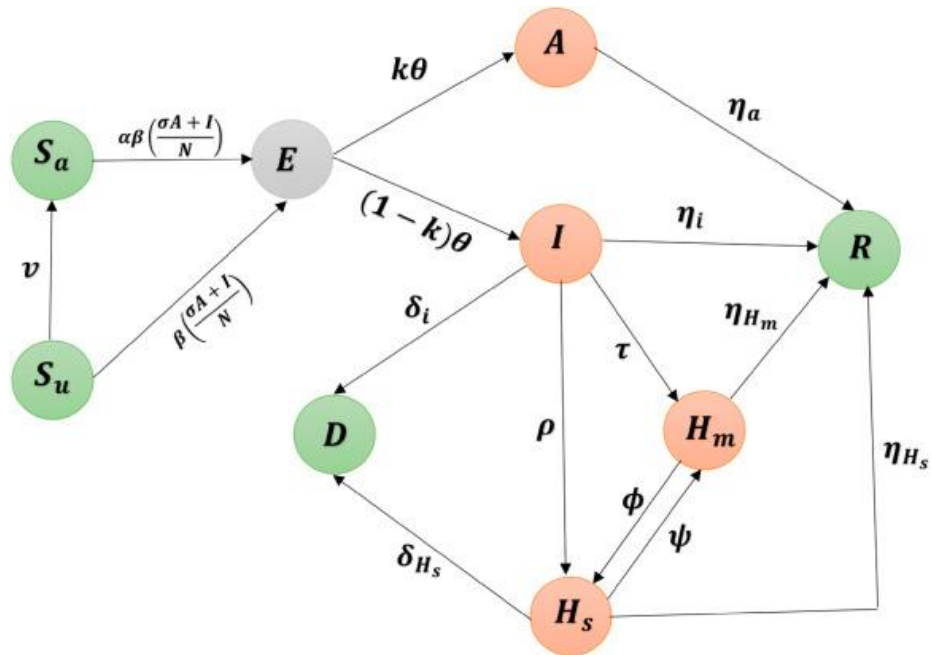


Рис. 1.2.2. Схематична діаграма моделі COVID-19 із програмами інформування

Модель, яка розглядає передачу вірусу від людини до людини як потенційний шлях, може бути недостатньою для моделювання поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану в 2022-2023 роках, оскільки вона ігнорує інші шляхи передачі, такі як контакт з окупантами, а також можливість зараження води та їжі. Крім того, воєнний стан може вплинути на поведінку населення – на масову евакуацію чи неможливість звернутись до лікарень, що може вплинути на поширення епідемії. Тому для побудови моделі поширення спалаху Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану у 2022-2023 роках необхідно врахувати більше факторів та розглянути інші моделі поширення хвороби.

Модель динаміки передачі COVID-19 [10] серед населення з часткою осіб із супутніми захворюваннями. В основі побудови моделі лежить діаграма (рис. 1.2.3) динаміки коморбідності COVID-19.

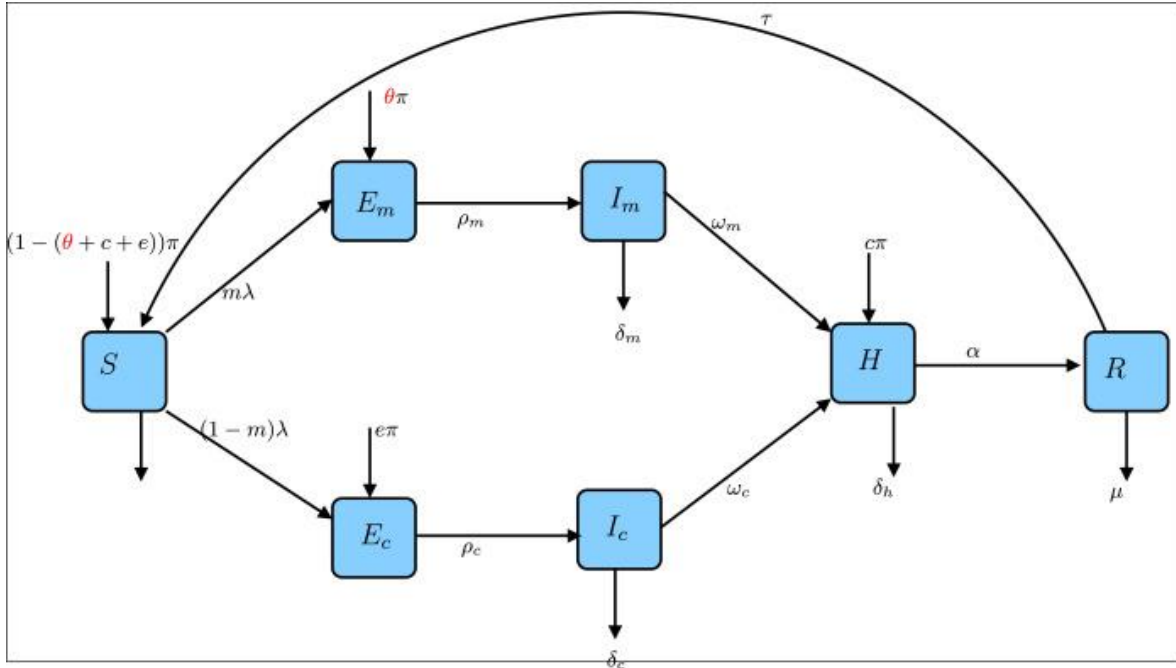


Рис. 1.2.3. Принципова діаграма динаміки коморбідності COVID-19

Сама ж модель задається наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1 - (\theta + c + e))\pi - \frac{\beta b S (I_m + I_c + gH)}{A} - \mu S + \tau R, \\ \frac{dE_m}{dt} &= \theta\pi + \frac{m\beta b S (I_m + I_c + gH)}{A} - \rho_m E_m, \\ \frac{dE_c}{dt} &= e\pi + \frac{(1-m)\beta b S (I_m + I_c + gH)}{A} - \rho_c E_c, \\ \frac{dI_m}{dt} &= \rho_m E_m - \delta_m I_m - \omega_m I_m, \\ \frac{dI_c}{dt} &= \rho_c E_c - \delta_c I_c - \omega_c I_c, \\ \frac{dH}{dt} &= c\pi + \omega_m I_m + \omega_c I_c - \delta_h H - \alpha H, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha H - \mu R - \tau R. \end{aligned} \right.$$

Де:

$\pi$	постійна швидкість надходження осіб
$\theta$	особи, що надходять але латентно інфіковані із супутньою патологією
$c$	особи, для яких підтверджено інфікування в пунктах надходження та негайно госпіталізовано
$e$	латентно інфіковані без супутньої патології
$\mu$	сприйнятливі та одужалі особи

Ця модель може бути корисною для вивчення взаємодії COVID-19 з іншими захворюваннями, але вона не враховує вплив воєнного стану на поширення епідемії. Воєнний стан може значно впливати на поширення захворювання, як це було описано в попередніх прикладах. Тому потрібні більш складні та реалістичні моделі, які враховують ці фактори.

*Проста детермінована перехресно пов'язана модель епідемії [3]* побудована на основі моделі SIR (Susceptible, Infected, Recovered people) та використовується в епідеміології для обчислення кількості сприйнятливих, інфікованих та одужали людей у популяції.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_i}{dt} = \mu N_i - \mu S_i - S_i \sum_{j=1}^n \frac{\phi_{ij} I_j}{N_i}, \\ \frac{dI_i}{dt} = S_i \sum_{j=1}^n \frac{\phi_{ij} I_j}{N_i} - (\mu + \gamma) I_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = \gamma I_i - \mu R_i. \end{array} \right.$$

Де:

$i$ та $j$	субпопуляції
$S_i$	кількість вразливих
$I_i$	кількість заразних
$R_i$	кількість одужалих
$N_i$	загальний розмір популяції в субпопуляції $i$
$\gamma$	коефіцієнт відновлення
$\mu$	рівень народжуваності (і смертності) за припущенням, що населення не зростає (загальна кількість народжуваності = загальна кількість смертей)
$ij$	швидкість ефективного контакту між субпопуляцією $i$ та субпопуляцією $j$

Однією із сильних сторін моделі є те, що вона дозволяє оцінити взаємодію між різними групами населення та ефективність заходів щодо зниження захворюваності. Оскільки воєнний стан може призвести до змін у складі та поведінці населення, моделі SIR можна використовувати для прогнозування та контролю епідемій у таких ситуаціях. Проте слід зазначити, що модель має свої обмеження та потребує додаткових коригувань з урахуванням особливостей епідемії COVID-19 та умов воєнного стану.

*Детермінована модель [9]* описує динаміку передачі COVID-19 у суспільстві та представлена нелінійними диференціальними рівняннями:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Pi - \frac{\beta_1 A + \beta_2 I}{N} S - \mu S, \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta_1 A + \beta_2 I}{N} S - (\delta + \mu) E, \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \rho \delta E - (\gamma_1 + \mu) A, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - \rho) \delta E - (\gamma_2 + \mu + d) I, \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma_1 A + \gamma_2 I - \mu R. \end{aligned} \right.$$

Де:

$\Pi$	швидкість зростання сприйнятливої популяції
$\beta_1, \beta_2$	швидкість, з якою безсимптомні та симптоматичні інфіковані люди передають інфекцію COVID-19 чутливим особам
$\delta$	особи, які зазнали впливу та завершують інкубаційний період
$\rho \delta$	особи, які зазнали впливу, завершують інкубаційний період приєднуючись до класу безсимптомних
$(1 - \rho) \delta$	особи, які зазнали впливу, завершують інкубаційний період приєднуючись до класу симптоматичних
$\gamma_1$	безсимптомні люди, що одужали
$d$	симптоматичні інфіковані люди, які помирають після інфікування
$\gamma_2$	симптоматичні люди, що одужали
$\mu$	Швидкість, з якою гинуть природним шляхом у кожному відділенні моделі

Дана детермінована модель, яка описує динаміку передачі COVID-19 у суспільстві, є математичною моделлю, яка враховує широкий спектр факторів, таких як вакцинація, введення обмежень і контактний пошук, та може бути

застосована для прогнозування поширення епідемії в різних сценаріях. Модель представлена нелінійними диференціальними рівняннями, що дозволяє врахувати нелінійний характер передачі інфекції. Це може бути особливо корисним в умовах воєнного стану, де можуть бути різні фактори, які впливають на поширення епідемії.

Модель для поточного COVID-19 [2] заснована на вразливих хворобі індивідуумах S, здорових або резистентних індивідуумах H, інфікованих і карантинних індивідуумах I та Q відповідно. Виражається у формі наступних автономних диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \gamma S(t)I(t) - (d + \mu)S(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} = \alpha - \beta H(t)I(t) + \theta I(t) - (d + \mu)H(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma S(t)I(t) + \beta H(t)I(t) + \delta Q(t) - (d + \mu + \eta + \theta)I(t), \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \eta I(t) - (d + \mu + \delta)Q(t). \end{array} \right.$$

Де:

$\lambda$	вразливі люди
$\gamma$	швидкість передачі захворювання
$d$	природна смертність
$\alpha$	коефіцієнт здорової людини
$\beta$	швидкість передачі здорової людини
$\mu$	смертність інфікованих або підозрюваних осіб, пов'язаних із захворюваннями
$\delta$	швидкість зараження людей, які знаходяться на карантині
$\theta$	виліковність інфікованих у карантинному класі

Усі параметри, що задіяні в моделі, вважаються невід’ємними. Сприйнятливі особи спочатку переходять до інфекційного класу з постійною швидкістю потоку. Підозрювані на хворобу або вже інфіковані особи переміщуються в карантинний клас, а підтверджені випадки повертаються в інфікований відсік для подальшого лікування (рис. 1.2.4).

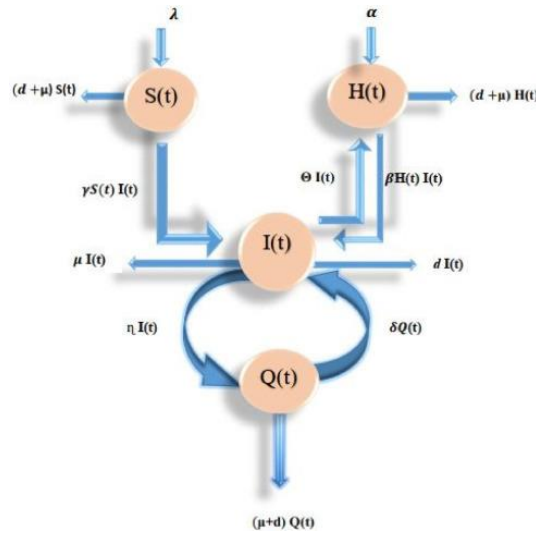


Рис. 1.2.4 Блок-схема моделі

Модель заснована на вразливих, здорових, інфікованих і на карантинних може бути використана для аналізу поширення епідемії Covid-19 в Україні в умовах воєнного стану, проте вона має бути уточнена і доповнена. Модель дозволяє розглянути різні сценарії поширення вірусу та оцінити ефективність різних заходів контролю. Враховуючи воєнний стан, як додаткові зміни, які можна включити, ми можемо оцінити вплив війни на динаміку пандемії та визначити необхідні заходи для забезпечення безпеки населення.

### 1.3 Математичні основи моделі SIR

Модель *SIR* (модель Кермака-МакКендріка) є однією з найпростіших моделей для опису динаміки груп уразливих, інфікованих та видужалих осіб,

яка описується за допомогою диференціальних рівнянь. Основними складовими моделі є три наступні групи: **S (Susceptible)**: кількість людей, що є сприйнятними до хвороби, тобто тих, хто не мають імунітету до даного вірусу та потенційно можуть заразитись. **I (Infected)**: кількість інфікованих за певний проміжок часу. Саме ці індивіди здатні заразити тих, хто відноситься до вразливої групи S. **R (Recovered)**: кількість людей, що видужали та вже мають імунітет (у деяких джерелах також означають кількість померлих). Таким чином, ми маємо три величини, які можуть змінюватись із часом:  $S(t), I(t), R(t)$ .

Запишемо коефіцієнти моделей переходу від одного стану до іншого, які описуються похідними, що продиференційовані за часом  $t$ :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)I(t)}{N} - \sigma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t). \end{cases}$$

Для будь-якого моменту часу сума трьох величин дорівнює загальній кількості досліджуваної популяції  $N$ :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Де:

$\alpha$	швидкість, з якою передається інфекційне захворювання, при цьому $\alpha > 0$
$\sigma$	швидкість, з якою поновлюється хворий, при цьому $\sigma > 0$
$\alpha = c\tau$	
$c$	ймовірність контакту особи, що інфікована, із будь-якою іншою з інших груп
$\tau$	ймовірність зараження вірусом

А частки уразливих, інфікованих та видужалих відносно населення можна записати так:

$$s = \frac{S(t)}{N}, \quad i = \frac{I(t)}{N}, \quad r = \frac{R(t)}{N}$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь, якою описується модель SIR, виглядає наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = -\alpha si, \\ \frac{di}{dt} = \alpha si - \sigma i, \\ \frac{dr}{dt} = \sigma i, \\ s(t) + i(t) + r(t) = 1. \end{array} \right.$$

Розглянемо початкові умови:  $s(0) = s_0, i(0) = i_0, r(0) = 0$ .

Підставивши у загальне рівняння маємо:

$$s_0 + i_0 = 0$$

Якщо шукати максимальну кількість сприйнятливих індивідів при  $t = 0$ , то отримаємо, очевидно, 0. А пандемія буде розвиватись лише тоді, коли кількість інфікованих протягом часу буде зростати. З рівняння

$$\frac{di}{dt} = \alpha si - \sigma i > 0$$

маємо, що захворюваність буде поширюватись при  $s > \frac{\sigma}{\alpha}$ . Тобто якщо частка інфікованих на початку  $s_0 > \frac{\sigma}{\alpha}$ .

Саме тому одним із важливих факторів моделі SIR є базове репродукційне число захворювань  $R_0$ , яке також називають епідемічним порогом. Це міра поширення інфекції у популяції, що визначається як середня кількість нових

випадків зараження від однієї інфікованої особи. Розраховується  $R_0$  наступною рівністю –  $R_0 = \frac{\alpha}{\sigma}$  та розглядається три випадки:

- Якщо  $R_0 > 1$ , то кількість нових випадків інфекції збільшується, що свідчить про активне поширення епідемії.
- Якщо  $R_0 \leq 1$ , то кількість нових випадків інфекції зменшується, що свідчить про спад епідемії.
- Якщо  $R_0 = 1$ , то інфекція перебуває у сталому стані кількості випадків.

Також, для моделі SIR вважається, що кількість населення є сталою величиною, тобто народжуваність, смертність та міграції не беруться до уваги. А ще тому, що зміни в одній групі компенсуються змінами в іншій групі, ми рахуємо, що швидкість зміни трьох груп дорівнює нулю:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = 0$$

## 1.4 Варіації моделі SIR

Через те, що модель SIR не може передбачити піки інфекційного захворювання та змодельовати дані спалахи, у 2020-ому році під час початку пандемії, була винайдена модель *SIRD* [16]. Тут додається нова група людей – **D (Deceased)**: ті, хто помер внаслідок інфікування. Описується дана модель наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\frac{\alpha S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\alpha S(t)I(t)}{N} - (\sigma + \delta)I(t), \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t),$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \delta I(t),$$

$$S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N.$$

Де:

$\delta$	коефіцієнт смертності від захворювання, при цьому $\delta > 0$
----------	--

Також була запропонована модель *SEIR* [17], що враховує інкубаційний період. Це такий період часу, коли особа вже встигла проконтактувати у будь-який спосіб із інфікованим, тобто вже вважається зараженою вірусом, але ще не проявляє симптомів та не може заразити інших. Цих осіб ми відокремлюємо у нову групу **E (Exposed)**. Маємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)I(t)}{N} - \gamma E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma E(t) - \sigma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t), \\ S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N. \end{array} \right.$$

Де:

$\gamma$	інкубаційний період, при цьому $\gamma > 0$
----------	---

На основі моделей SIRD та SEIR було розроблено математичну модель *SEIRD* [18]. У даній моделі інфікована група I може переходити або до

видужалих  $R$  або до групи  $D$ , тобто, на жаль, померли внаслідок хвороби. Описується дана модель так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)I(t)}{N} - \gamma E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \gamma E(t) - (\sigma + \delta)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \delta I(t), \\ S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N. \end{array} \right.$$

## 1.5 Висновки до першого розділу

У першому розділі був пророблений аналіз предметної області, а саме: розглянута література по тематиці дослідження та розібрані різні види моделей, такі як: модель Гауса, метапопуляційні моделі перехресного зв'язку, феноменологічна модель, модель динаміки зараження на COVID-19 і його версії Omicron, модель, що розглядає спосіб передачі захворюваності від людини до людини як потенційний шлях передачі, модель динаміки передачі COVID-19 серед населення з часткою осіб із супутніми захворюваннями, проста детермінована перехресно пов'язана модель епідемії, детермінована модель, модель для поточного COVID-19. Також було детально розібрано математичні основи моделі  $SIR$ , оскільки її було вибрано за основу для створення моделі, та розглянуті її варіації.

## 2. Корегування моделі відповідно до умов воєнного стану

### 2.1 Умови, що сприяли корегуванню моделі

У розділі 1.4 було розглянуто різні варіанти математичної моделі SIR для опису поширення COVID-19 із врахуванням інкубаційного періоду та смертельних випадків. Проте, виявилось, що цього, достатньо всеохоплюючого розподілу популяції на групи буває недостатньо.

Із лютого 2022-го року в Україні почалась повномасштабна війна із росією, що ускладнила процес відстежування та лікування вірусу. У цей період з'явилися додаткові фактори, які потрібно розглядати для побудови моделей. Враховуючи це, було запропоновано найочевидніші та найвпливовіші з них, такі, що ускладнюють слідкування за процесом.

Отже, групи було змінено. До першої групи було віднесено людей, які ігнорують симптоми хвороби – по своїй волі або частково. З одного боку, через стрес та страх перед наслідками війни люди почали менше звертати увагу на симптоми коронавірусу, які у них з'являються. З іншого боку, у деяких людей можливість звернутись до лікарів просто відсутня (будь то окуповане місто, чи зруйнована лікарня). Саме тому з'явилися люди, що вже проконтактували із інфікованим і також заразились (відносяться до групи  $I$ ), але не переходять у групу  $E$ , а навпаки продовжують заражати інших протягом довшого відрізка часу, ніж могли б під час мирного часу.

Також було виокремлено тих осіб, які були змушені покинути свої домівки через війну – біженці. До цієї групи було віднесено людей, які мігрують всередині країни та тих, хто виїхав закордон. Перша частина людей була віднесена до тих, хто ігнорує симптоми у зв'язку із постійними переїздами. Особливої уваги в моделі було приділено тільки другій частині.

## 2.2 Модифікація моделі SIR із врахуванням воєнного стану в Україні

Для побудови моделі візьмемо останню розглянуту модель у пункті 1.4 – модель SEIRD і будемо її доповнювати двома нововведеннями. Для початку зробимо список із наявних вже груп:

- $S(t)$  – кількість осіб, які ще не захворіли в момент часу  $t$ ,
- $E(t)$  – кількість осіб, які вже заразились, але ще не можуть заражати інших в момент часу  $t$ ,
- $I(t)$  – кількість інфікованих осіб в момент часу  $t$ ,
- $R(t)$  – кількість одужалих осіб від COVID-19 в момент часу  $t$ ,
- $D(t)$  – кількість померлих осіб від COVID-19 в момент часу  $t$ ,
- $N$  – кількість населення України, що наразі перебуває на території України.

Розіб'ємо групу  $I$  на дві частини:  $i_1 + i_2 = I$ , де:

$i_1$	кількість людей, які не ігнорують свої симптоми та звертаються до лікаря, вакцинуються або самі лікуються
$i_2$	кількість людей, які ігнорують свої симптоми з тих або інших причин, продовжуючи інфікувати інших

А групу  $N$  поділимо також поділимо на:  $n_1 + n_2 = N$ , де:

$n_1$	кількість людей, які перебувають вдома
$n_2$	кількість людей, які переїхали закордон у якості біженців

Тоді матимемо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N} - \gamma E(t), \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = \rho \gamma E(t) - \sigma_1 i_1 - \xi_1 i_1, \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = (1 - \rho) \gamma E(t) - \sigma_2 i_2 - \xi_2 i_2, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma_1 i_1 + \sigma_2 i_2, \\ \frac{dD(t)}{dt} = \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2, \\ n_1 = S(t) + E(t) + (1 - \sigma_1) i_1, \\ n_2 = (1 - \alpha)(1 - \sigma_2) i_2, \\ S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + R(t) + D(t) = n_1 + n_2. \end{array} \right.$$

Де:

$I_1(t)$	кількість осіб, які проявляють симптоми, але ізолюються
$I_2(t)$	кількість осіб, які проявляють симптоми і не ізолюються
$\delta_1$	коефіцієнт смертності від захворювання людей, що не ігнорують симптоми
$\delta_2$	коефіцієнт смертності від захворювання людей, що ігнорують симптоми
$\rho$	коефіцієнт міри, в якій інфіковані особи з підгрупи $I_1$ впливають на поширення інфекції у системі

А рівняння про  $n_1$  та  $n_2$  описують динаміку переходу інфікованих осіб у стани, які впливають на епідеміологічну ситуацію у популяції.

### 2.3 Розрахунки отриманої моделі

Для проведення розрахунку моделі, необхідно визначити початкові умови та значення параметрів моделі. За початкові умови візьмемо дані із сайту офіційної статистики поширення коронавірусу в Україні [11]. За даними сайту (рис. 2.3.1) на момент 23-го лютого 2022-го року маємо:

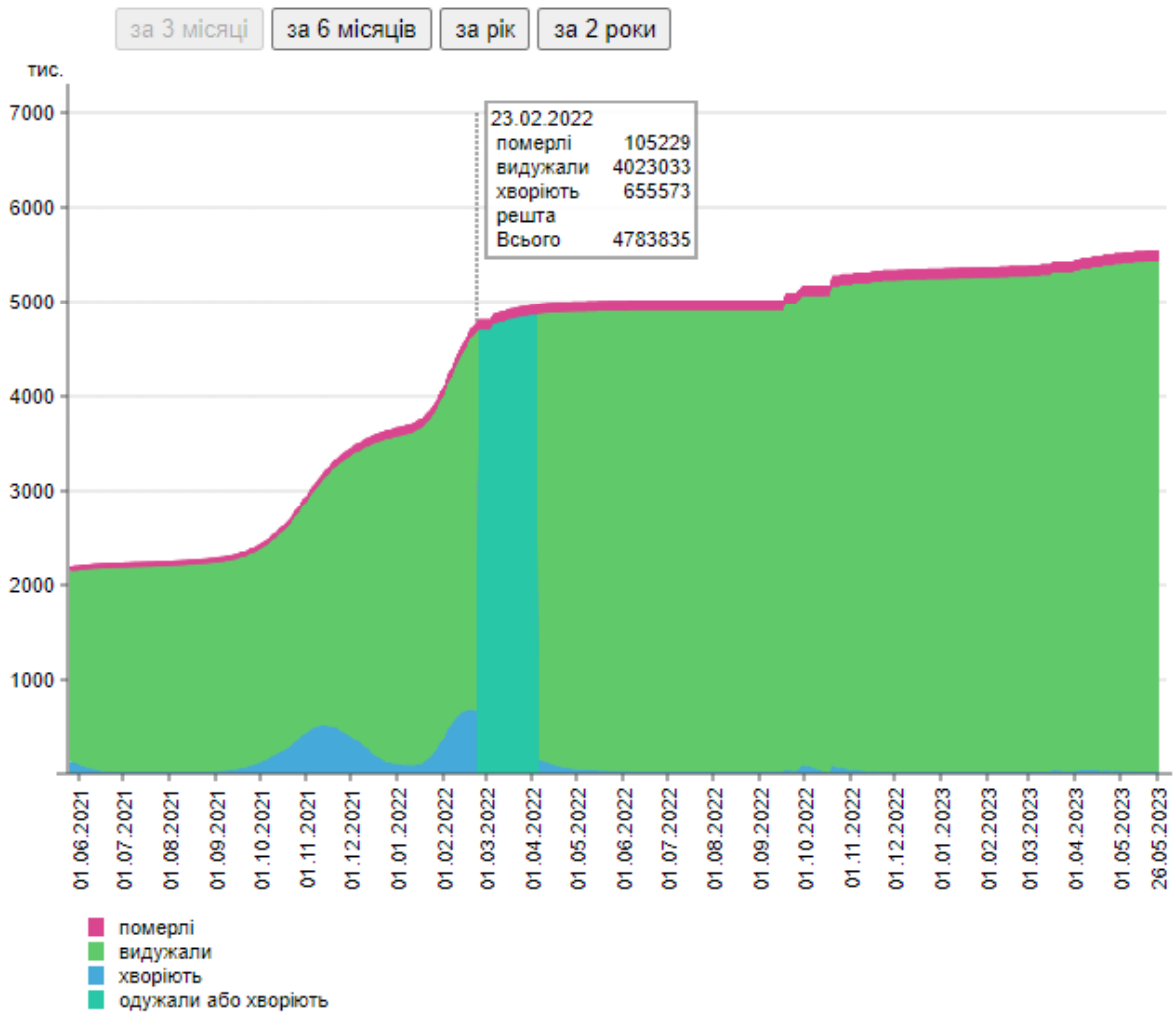


Рис 2.3.1. Дані про стан людей

Дані беремо за 23-є лютого 2022-го року, оскільки починаючи із 24-го лютого точними обрахунками та веденням статистики ніхто не займався. Облік заново почав вестись тільки із 7-го квітня 2022-го року.

За даними з рисунку 2.3.1 ми маємо:

- Початкова кількість вразливих осіб  $S(0) = 4783835$ .
- Початкова кількість осіб, що одужала  $R(0) = 4023033$ .
- Початкова кількість померлих складає  $D(0) = 105229$ .

Для того, щоб обрахувати кількість людей для підгрупи  $E(0)$  скористаємось даними за 22-е та 23-є лютого, оскільки, середня тривалість стадії експозиції становить 2 дні. Згідно із статистикою, що наведена на сайті Українського національного інформаційного агентства [14], в Україні станом на ранок 22-го лютого 2022 року зафіксовано 24 440 випадків зараження коронавірусом. А станом на 23-є лютого 2022 року виявлено 25 062 нових випадків зараження.

- З цього, випливає, що початкова кількість інкубованих людей дорівнює:

$$E(0) = 24\,440 + 25\,062 = 49502.$$

Для обрахунку кількості людей, що відносяться до підгруп  $I_1(0)$  та  $I_2(0)$  проведемо наступні дії:

$$I = (\text{ті, хто хворіють}) - E = 655573 - 49502 = 606071.$$

- Візьмемо, що  $I_1(0) = \frac{1}{3}I$ , а  $I_2(0) = \frac{2}{3}I$ . Тоді, матимемо, що початкові дані для людей, які не ігнорують та ігнорують симптоми, будуть наступними:

$$I_1(0) = \frac{1}{3} * 606071 \approx 202024, \quad I_2(0) = \frac{2}{3} * 606071 \approx 404047.$$

Отже, можемо записати такі початкові умови:

$$S(0) = 4783835,$$

$$E(0) = 49502,$$

$$I_1(0) = 202024,$$

$$I_2(0) = 404047,$$

$$R(0) = 4023033,$$

$$D(0) = 105229.$$

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь нам необхідно задати значення параметрів моделі:  $\alpha, \gamma, \rho, \sigma_1, \sigma_2, \delta_1, \delta_2$ . Для цього скористаємось приблизними значеннями, які ми виведемо із статті інтернет-видання [15] про захворюваність на коронавірус. Там, ми бачимо, що за перші два тижні 2023-го року: тих, хто захворів 9634, померлих 8, а вилікувалось 247 особи. Оскільки, нам потрібні хоча б приблизні значення, то для параметрів  $\sigma_1, \sigma_2$  та  $\delta_1, \delta_2$  нам не принципово, за який рік брати дані. Тоді, матимемо:

- Показник смертності  $\delta = \frac{8}{9634} = 0.00083$ . У якості експерименту, можемо взяти, що  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ .

Коефіцієнт швидкості, з якою поновлюється хворий, дорівнює:

$$\sigma = \frac{247}{9634} = 0.02564.$$

- Тоді,  $\sigma_1 = \frac{2}{3}\sigma = \frac{2}{3} * 0.02564 = 0.017094$ .

$$\text{А } \sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma = \frac{1}{3} * 0.02564 = 0.008547.$$

- Коефіцієнт інкубаційного періоду ми обрахуємо приблизно, як 2 дні за 2 тижні, що людина в середньому хворіє. Тоді матимемо:  $\gamma = \frac{2}{14} = 0.1429$ .
- Значення для швидкості, з якою передається інфекційне захворювання та міри, в якій інфіковані особи з підгрупи  $I_1$  впливають на поширення інфекції у системі, візьмемо умовно:  $\alpha = 0.2, \rho = 0.2$ .

Отже, параметри моделі будуть наступними:  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 0.1429$ ,  $\rho = 0.2$ ,  $\sigma_1 = 0.017094$ ,  $\sigma_2 = 0.008547$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.00083$ .

Підставимо наші початкові значення у систему рівнянь:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N} = -\frac{0.2*4783835*(202024+404047)}{5031908+320475} \approx -108338.4,$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)(i_1+i_2)}{N} - \gamma E(t) = \frac{0.2*4783835*(202024+404047)}{5031908+320475} - 0.1429 * 49502 \approx 101264.6,$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \rho\gamma E(t) - \sigma_1 i_1 - \delta_1 i_1 = 0.2 * 0.1429 * 49502 - 0.017094 * 202024 - 0.00083 * 202024 \approx -2206.3,$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = (1 - \rho)\gamma E(t) - \sigma_2 i_2 - \delta_2 i_2 = (1 - 0.2) * 0.1429 * 49502 - 0.008547 * 404047 - 0.00083 * 404047 \approx 1870.3,$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma_1 i_1 + \sigma_2 i_2 = 0.017094 * 202024 + 0.008547 * 404047 \approx 6906.8,$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 = 0.00083 * 202024 + 0.00083 * 404047 \approx 503,$$

$$n_1 = S(t) + E(t) + (1 - \sigma_1)i_1 = 4783835 + 49502 + (1 - 0.017094) * 202024 \approx 5.031907601744 * 10^6,$$

$$n_2 = (1 - \alpha)(1 - \sigma_2)i_2 = (1 - 0.2)(1 - 0.008547) * 404047 \approx 320475,$$

$$S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + R(t) + D(t) = n_1 + n_2.$$

Отримані значення є похідними відповідних змінних в системі моделі. Вони відображають швидкості зміни кількості осіб у кожній з груп, що ми описували. За ними, ми бачимо, що швидкість зміни для груп  $S(t)$  та  $I_1(t)$  є від'ємними, що означає, що кількість людей, що є вразливими до хвороби та тих, хто не ігнорують свої симптоми й лікуються, наприклад колють вакцину, дотримуються карантинних обмежень тощо, зменшується. У той же час, не

дивлячись на те, що смертність залишається додатною, ми можемо побачити що дане число є значно меншим за інші швидкості, а значить, кількість смертей, в порівнянні із тими, хто одужує, набагато менше. Все це свідчить про те, що із плином часу, хвороба все ж таки відступає, та більше людей отримують імунітет.

## 2.4 Висновки до другого розділу

У другому розділі було пояснено причини й умови, що сприяли корегуванню вже існуючої моделі *SIR*. Оскільки із лютого 2022-го року почалась агресія росії та повномасштабне вторгнення на територію України, то процес відстежування та лікування вірусу значно ускладнився. Тому одну із варіацій моделі *SIR*, а саме *SEIRD* було модифіковано. Було відокремлено людей на нові групи ( $i_1 + i_2 = I$  та  $n_1 + n_2 = N$ ). Також було здійснено розрахунки отриманої моделі. Розрахунки показали, що кількість людей, які одужали, збільшується та підтвердили висновок про посилення імунітету українців.

### 3. Програмне моделювання отриманої моделі

#### 3.1 Вибір мови програмування

Наразі, у світі прогресуючих технологій, у XXI-столітті, існує безліч мов програмування. Тому, при підготовці до даного розділу були сумніви щодо того, яку мову програмування обрати. Заслужували на увагу дві: Python та R. Обидві мови широко й активно використовуються для наукових досліджень й аналізу даних. Їхній успіх пояснюється тим фактом, що вони можуть легко перевести математичні моделі в код. Саме тому, пропоную оглянути переваги кожної із мов.

Серед переваг мови програмування Python можна віднести: простий та лаконічний синтаксис, що дає змогу швидше читати та розуміти суть коду. Також Python забезпечує високо рівневі структури даних, такі як списки, словники, модулі, класи та автоматичне керування пам'яттю. До плюсів даної мови можна віднести той факт, що Python розробники використовують у своїх роботах досить часто, а тому і з проблемами стикаються частіше. Звідси випливає, що в інтернеті у більшості випадках, можна знайти проблему, із якою зіткнувся, та одразу дізнатись, як вийти із положення, на відміну від R, про яку значно менше інформації. Python вважається потужною, простою та швидкою мовою програмування, що підтримує інші технології.

Якщо ж розглядати таку мову програмування як R, то можна помітити, що вона може виконувати широкий спектр математичних і статистичних завдань. Оскільки R є відкритим вихідним кодом, то це означає, що вона постійно перевіряється та вдосконалюється. За словами Mark Gardener [12], R є більшим, ніж просто програмою для статистики. Це комп'ютерна мова та середовище для статистичних обчислень і графіки. R є дуже потужною та

гнучкою. Не дивлячись на те, що особисто я, рідше зустрічала у роботах дану мову програмування, інформації про неї достатньо.

Тож, підбиваючи підсумки, бачимо, що обидві мови є швидкими, простими та зручними для моделювання поставленої задачі. З огляду на те, що Python вже використовувався для моделювання захворюваності, для програмування моделі було обрано R.

### 3.2 Програмування моделі

Для програмування моделі SEIRD, що була модифікована, потрібно скористатись наступними пакетами:

- Пакет deSolve [13] – розв'язувач початкового значення диференціального рівняння. Пакет містить підпрограми, що розроблені для чисельної обробки систем диференціальних рівнянь, а саме: звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, рівнянь з частинними похідними, алгебраїчних диференціальних рівнянь (DAE) та інші.
- Пакет ggplot2 – система для побудови гарних графіків.

Після цього, задаємо диференціальні рівняння, якими описується модель, що була модифікована (рис 3.2.1).

```
# Задаємо диференціальні рівняння, якими описується модель
dS <- -alpha * S * (I1 + I2) / N
dE <- (alpha * S * (I1 + I2) / N) - gamma * E
dI1 <- rho * gamma * E - sigma1 * I1 - delta1 * I1
dI2 <- (1 - rho) * gamma * E - sigma2 * I2 - delta2 * I2
dR <- sigma1 * I1 + sigma2 * I2
dD <- delta1 * I1 + delta2 * I2
```

Рис 3.2.1. Система рівнянь

Вводимо початкові дані, які ми використовували у розділі 2.3 – рис 3.2.2.

```
# Задаємо початкові значення
S0 <- 4783835 # кількість сприйнятливих
E0 <- 49502 # початкова кількість хворих
I1_0 <- 202024 # початкова кількість хворих, які не ігнорують симптоми
I2_0 <- 404047 # початкова кількість хворих, які ігнорують симптоми
R0 <- 4023033 # початкова кількість одужалих
D0 <- 105229 # початкова кількість померлих
```

Рис 3.2.2. Початкові дані

Створюємо послідовність часових точок *times*, у яких буде проведено чисельне розв'язування. В даному випадку, створюється послідовність рівномірно розподілених точок від 0 до 100 із 1000 значеннями. Ці значення використовуються як вхідні аргументи *times* для функції *ode()*. Після цього викликаємо саму функцію *ode()* з вказаними аргументами. Вона розв'язує систему диференціальних рівнянь, використовуючи початкові значення, часові точки, задану модель та параметри.

Будуємо модель, що показує залежності між групами, на які розділені люди – рис 3.2.3.

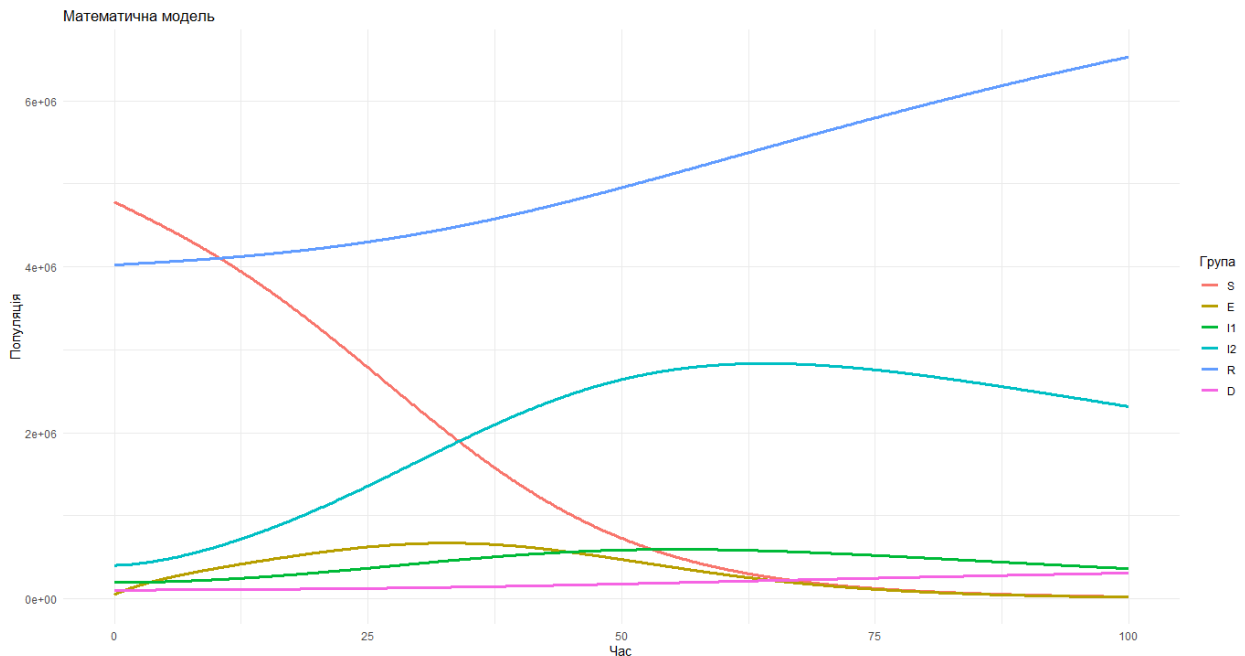


Рис 3.2.3. Отримана модель

За рисунком 3.2.3 бачимо, що із плином часу із початку повномасштабного вторгнення росії на території України:

- Кількість людей із S-групи (Susceptible – сприйнятливі, тобто ті, хто може заразитись) зменшується;
- Кількість людей із E-групи (Exposed – заражені вірусом, але ще не заразні) залишається майже такою самою, близькою до нуля, хоча й був піковий момент;
- Кількість людей із обох підгруп I-групи (Infected – інфіковані, які або ігнорують або не ігнорують свої симптоми) збільшується. При цьому є логічним, що кількість тих людей, хто через ті чи інші причини ігнорують симптоми, збільшується більше та швидше;
- Кількість людей із R-групи (Recovered – видужалівші) збільшується, при чому графік йде майже прямою, що вказує на відносно швидкий темп зростання;
- Кількість людей із D-групи (Deceased – ті, що померли внаслідок хвороби) не значно зростає.

З цього можна зробити висновок, що за період 100 днів ситуація покращується – більше людей одужують, менше заражається.

Також, якщо знову звернутись до загальної статистики [11], можна побачити (рис 3.2.4) причину, чому Всесвітня організація охорони здоров'я скасувала статус пандемії 05-го травня 2023-го року.

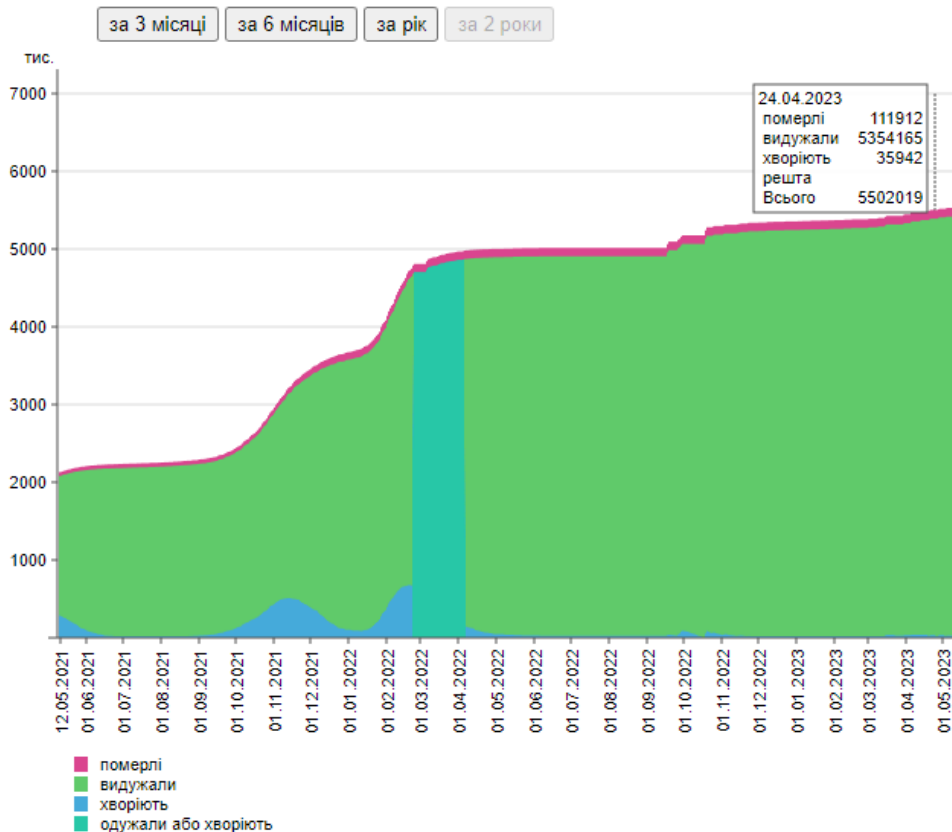


Рис 3.2.4. Дані про стан людей на момент 24.04.23

За рисунком можна помітити поступове збільшення одужалих осіб, незважаючи на те, що кількість смертей залишається присутньою.

### 3.3 Висновки до третього розділу

У третьому розділі був проведений аналіз щодо вибору мови програмування для моделювання заданого випадку. За допомогою мови програмування R та середовища розробки R Studio було запрограмовано уточнюючу модель *SEIRD*. Отримані графіки вказують на покращення ситуації – люди починають менше хворіти, а ті, що хворіли, починають виліковуватись. Дані результати збігаються із тими, що були отримані у

другому розділі та із загальною тенденцією, що продемонстрована на графіках із статистикою хворих в Україні.

## Висновок

Дана кваліфікаційна робота була присвячена пошукам математичної моделі, яка описує поширення COVID-19 в Україні в умовах воєнного стану та дослідженню цього процесу загалом. Під час цього було проаналізовано літературу з проблеми дослідження, був проведений пошук і порівняння моделей та обрано SIR, яку потім взято за основу для здійснення модифікації. З цією метою було виокремлено додаткові умови для побудови моделі, такі як: врахування людей, що ігнорують симптоми захворювання під час війни та людей-біженців.

Результатом виконання роботи стала модифікація вже наявної моделі SEIRD та її візуалізація. Візуалізовано отриману модель за допомогою мови програмування R. Результати, що були обраховані вручну співпали із тими, що були отримані внаслідок програмування моделі. Наявний додаток A із програмним кодом.

## Список літератури

1. Adiga, Aniruddha, et al. "Mathematical models for covid-19 pandemic: a comparative analysis." *Journal of the Indian Institute of Science* (2020): 793-807.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s41745-2-200-6%23auth-Bryan-Lewis>
2. Ahmad, Saeed, et al. "Mathematical analysis of COVID-19 via new mathematical model." *Chaos, Solitons & Fractals* 143 (2021): 110585.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920309760>
3. Chowell, Gerardo, et al. "Mathematical models to characterize early epidemic growth: A review." *Physics of life reviews* 18 (2016): 66-97.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1571064516300641>
4. Khan, Muhammad Altaf, and Abdon Atangana. "Mathematical modeling and analysis of COVID-19: A study of new variant Omicron." *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 599 (2022): 127452.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122003326>
5. Kucharski, Adam J., et al. "Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study." *The lancet infectious diseases* 20.5 (2020): 553-558.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1473309920301444>
6. Ludwig, Donald. "Mathematical models for the spread of epidemics." *Computers in biology and medicine* 3.2 (1973): 137-139.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0010482573900607>

7. Musa, Salihu Sabiu, et al. "Mathematical modeling of COVID-19 epidemic with effect of awareness programs." *Infectious disease modelling* 6 (2021): 448-460.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468042721000154>
8. Vytla, Vishnu, et al. "Mathematical models for predicting COVID-19 pandemic: a review." *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1797. No. 1. IOP Publishing, 2021.  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1797/1/012009/pdf>
9. Shen, Zhong-Hua, et al. "Mathematical modeling and optimal control of the COVID-19 dynamics." *Results in Physics* 31 (2021): 105028.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379721010214>
10. Ssebuliba, J., et al. "Mathematical modelling of COVID-19 transmission dynamics in a partially comorbid community." *Partial Differential Equations in Applied Mathematics* 5 (2022): 100212.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666818121001108>
11. МінФін "Коронавірус в Україні" (статистика)  
<https://index.minfin.com.ua/ua/reference/coronavirus/ukraine/>
12. Gardener, Mark. "Beginning R: the statistical programming language", 2012.  
<https://books.google.com/books?>
13. Karline Soetaert, R. Woodrow Setzer, Thomas Petzoldt "Package deSolve"  
<https://desolve.r-forge.r-project.org/>

14. Українське національне інформаційне агентство «Укрінформ»  
<https://www.ukrinform.ua/tag-statistika>
  
15. Інтернет-видання та радіостанція «Радіо Свобода»  
<https://www.radiosvoboda.org/a/news-koronavirus-gryp-kyiv/32225567.html>
  
16. Sedaghat, Ahmad, et al. "Modeling and sensitivity analysis of coronavirus disease (COVID-19) outbreak prediction." 2020 IEEE 3rd International Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE).2020.  
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9337772>
  
17. Widyaningsih, P., D. R. S. Saputro, and A. W. Nugroho. "Susceptible exposed infected recovery (SEIR) model with immigration: Equilibria points and its application." AIP Conference Proceedings. Vol. 2014. No. 1. AIP Publishing LLC,2018.  
<https://pubs.aip.org/aip/acp/article/2014/1/020165/724431/Susceptible-exposed-infected-recovery-SEIR-model>
  
18. Arhin, Joseph Roger, et al. "An SEIRD epidemic model for predicting the spread of COVID-19 over a Period of one year: A case of the United States." American Journal of Mathematical and Computer Modelling 5.3 (2020): 70-76.  
<https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/93739062>

## Додаток А. Програмний код

```
# Встановлюємо пакети
install.packages("deSolve")
install.packages("ggplot2")

# Підключаємо необхідні бібліотеки
library(reshape2)
library(deSolve)
library(ggplot2)

# Опис моделі
model <- function(t, y, parameters) {
  S <- y[1]
  E <- y[2]
  I1 <- y[3]
  I2 <- y[4]
  R <- y[5]
  D <- y[6]
  N <- S + E + I1 + I2 + R + D

  alpha <- parameters["alpha"]
  gamma <- parameters["gamma"]
  rho <- parameters["rho"]
  sigma1 <- parameters["sigma1"]
  sigma2 <- parameters["sigma2"]
  delta1 <- parameters["delta1"]
  delta2 <- parameters["delta2"]

  # Задаємо диференціальні рівняння, якими описується модель
  dS <- -alpha * S * (I1 + I2) / N
  dE <- (alpha * S * (I1 + I2) / N) - gamma * E
  dI1 <- rho * gamma * E - sigma1 * I1 - delta1 * I1
  dI2 <- (1 - rho) * gamma * E - sigma2 * I2 - delta2 * I2
  dR <- sigma1 * I1 + sigma2 * I2
  dD <- delta1 * I1 + delta2 * I2

  return(list(c(dS, dE, dI1, dI2, dR, dD)))
}
```

```

# Задаємо параметри моделі
parameters <- c(alpha = 0.2, gamma = 0.1429, rho = 0.2, sigma1 = 0.017094,
sigma2 = 0.008547, delta1 = 0.00083, delta2 = 0.00083)

# Задаємо початкові значення
S0 <- 4783835 # кількість сприйнятливих
E0 <- 49502 # початкова кількість хворих
I1_0 <- 202024 # початкова кількість хворих, які не ігнорують симптоми
I2_0 <- 404047 # початкова кількість хворих, які ігнорують симптоми
R0 <- 4023033 # початкова кількість одужалих
D0 <- 105229 # початкова кількість померлих

y0 <- c(S = S0, E = E0, I1 = I1_0, I2 = I2_0, R = R0, D = D0)

# Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь
times <- seq(0, 100, length.out = 1000)
sol <- ode(y = y0, times = times, func = model, parms = parameters)

sol_df <- as.data.frame(sol)
sol_df$time <- times

# Побудова графіку
plot_data <- melt(sol_df, id.vars = "time", variable.name = "group", value.name =
"population")

ggplot(plot_data, aes(x = time, y = population, color = group)) +
  geom_line(size = 1.2) +
  labs(title = "Математична модель",
x = "Час",
y = "Популяція",
color = "Група") +
  theme_minimal()

```