УДК 530.12:531.51

Опанасюк Ю. А.

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ-ШВАРІАНТНОСТІ В ДИНАМІЦІ ГРАВІТУЮЧИХ НЕТОЧКОВИХ ТІЛ

Стаття присвячена проблемам побудови релятивістичної динаміки гравітуючих неточкових об'єктів. Після стислого огляду принципів побудови пуанкаре-інваріантних форм механіки (ШФМ) пояснюються критерії, котрим повинні задовольняти усі "життєздатні теорії тяжіння", обговорюються можливості застосуванн ШФМ для опису гравітаційної взаємодії. Серед іншого розглядаються й питання, пов 'язані з перспективою подальшого застосування розвинутого формалізму до експериментів в Сонячній системі та до верифікації теорії тяжіння.

1. Необхідність пуанкаре-інваріантності (ПІ) математичного формалізму обумовлюється розвитком багатьох напрямів сучасної фізики та розширенням діапазону їх використання, що все частіше вимагає застосування апарату релятивістичної механіки навіть у тих галузях, де переважно використовувалися лише нерелятивістичні концепції. До останніх треба віднести й статистичну фізику та фізику твердого тіла, в якій врахування релятивістичних ефектів є необхідним вже хоча б у зв'язку з розширенням арсеналу експериментальних засобів — застосування високоенергетичних частинок стало звичним методом дослідження структури твердих тіл. Нема потреби обговорювати актуальність ПІ-методів у таких "традиційно релятивістичних" областях, як фізика елементарних частинок, астрофізика та космологія. При побудові й уточненні існуючих моделей різних фізичних процесів визначальну роль відіграє вибір адекватного математичного апарату, що, в свою чергу, залежить від величини допустимих динамічних параметрів системи. В цьому зв'язку апаратні обмеження можливих швидкостей виглядають досить штучними й пояснюються, передовсім, відсутністю належного математичного апарату, що, враховуючи релятивістичні ефекти, допускав би практичну реалізацію. Не менш штучним є й використання поняття "точкової маси" в тих випадках, коли доречніше було б застосовувати поняття протяжного тіла.

Така невідповідність теоретичного апарату вимогам фізичної реальності пояснюється трудннощами математичного характеру, що виникають в межах добре пристосованого до потреб релятивізму стандартного теоретико-польового підходу. Труднощі ці добре відомі й пов'язані, насамперед, зі скінченною швидкістю поширення взаємодії, що у випадку теоретико-польового опису взаємодії скінченного числа частинок змушує застосовувати нескінченне число степенів вільності. Як наслідок цього — найпростіша проблема в релятивістичній електродинаміці взаємодіючих частинок, а саме, проблема двох тіл — фактично залишається, в цілому, й досі нерозв'язаною, якщо не брати до уваги знайденого Шільдом розв'язку для колових орбіт та розв'язку проблеми двох тіл в наближенні, коли одна з мас прямує до нескінченності, що фактично означає вже вихід за межі власне проблеми двох тіл (стислий огляд та аналіз найістотніших математичних труднощів такого характеру зроблено у "Вступі" до праці [1], де наводиться й відповідна бібліографія).

Вільними чи, радше, майже вільними від згаданих проблем суть різні добре розроблені формалізми класичної механіки, що ґрунтуються на принципі ньютонової далекодії. В наш час спостерігається відродження зацікавленості математичними формалізмами, в яких польові змінні явно не фігурують [1—8]. Існують різні способи забезпечення в таких формально непольових підходах вимог релятивістичної механіки [3]. Аби уникнути хибного сприйняття цілей та кінцевої мети створення цих формалізмів, або, іншими словами, різних форм так званих релятивістичних теорій прямої взаємодії (РТПВ), слід зауважити, що жоден з них не претендує на заміну постулатів сучасної фізичної парадигми — концепція поля залишається в ній визначальною. Не маючи можливості більш детально зупинятися ні на цих безперечно важливих та цікавих концептуальних питаннях [2, 3, 8], ані на історії розвитку сучасних ПІ-методів опису механічних систем [1—7], зауважимо, що найбільш прийнятним з огляду на його самодостатність та універсальність є теоретико-груповий підхід до побудови РТПВ. Необхідні в подальшому поняття, означення та результати теоретико-групового підходу містяться в наступному пункті.

2. Розглянемо алгебру Лі групи Пуанкаре. Нехай G_r — r-параметрична група Лі точкових перетворень простору Мінковського M_4 з параметрами λ^α, [1—3]:

$$\left.\begin{array}{l} x^\mu \to x'^\mu = \varphi^\mu(x,\lambda), \\ x = \{x^\mu\} = \{ct, r\};\ \mu = 0,1,2,3 \\ \lambda = \{\lambda^\alpha\},\ \alpha = 1,\dots,r. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Інфінітізимальні перетворення

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \xi^\mu_\alpha(x)\delta\lambda^\alpha + O(\delta\lambda) \quad (2)$$

визначаються ґенераторами перетворень (1) (дотичними векторними полями):

$$X_\alpha = \xi^\mu_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu};\ \xi^\mu_\alpha(x) = \left.\frac{\partial\varphi^\mu(x,\mu)}{\partial\lambda^\alpha}\right|_{\lambda=0}, \quad (3)$$

які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[X_\alpha, X_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma, \quad (4)$$

або

$$\xi^\mu_\alpha\frac{\partial\xi^\nu_\beta}{\partial x^\mu} - \xi^\mu_\beta\frac{\partial\xi^\nu_\alpha}{\partial x^\mu} = c^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\nu_\gamma, \quad (5)$$

де $c^\gamma_{\alpha\beta}$ — тензор структурних констант групи G_r. Таким чином, оператори X_α породжують алгебру Лі AG_r групи G_r.

Для 10-параметричної групи Пуанкаре P ґенератори часових (X_0^T) та просторових (X_i^T) трансляцій, просторових (X_j^R) й лоренцевих (X_j^L) поворотів мають вигляд:

$$X_0^T = -\frac{\partial}{\partial t};\ X_j^T = -\frac{\partial}{\partial x^j}; \quad (6)$$

$$X_j^R = -\varepsilon_{jki}x^k\frac{\partial}{\partial x_i}; \quad (7)$$

$$X_j^L = -x_j\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial x^j}; \quad (8)$$

де ε_{jki} — символи Леві—Чівіти. Використовується система одиниць, в якій $c = h = 1$.

Для алгебри Лі групи Пуанкаре дістанемо наступні переставні співвідношення:

$$[X_i^T, X_0^T] = 0;\ [X_j^R, X_0^T] = 0;\ [X_i^T, X_j^T] = 0; \quad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} [X_i^R, X_j^T] = \varepsilon_{ijk}X_k^T;\ [X_i^R, X_j^R] = \varepsilon_{ijk}X_k^R \\ [X_i^R, X_j^L] = \varepsilon_{ijk}X_k^L; \end{array}\right\} \quad (10)$$

$$[X_i^L, X_0^T] = X_i^T; \quad (11)$$

$$[X_i^L, X_j^T] = \delta_{ij}X_0^T;\ [X_i^L, X_j^L] = -\varepsilon_{ijk}X_k^R. \quad (12)$$

Для того, щоб сформулювати умови пуанкаре-інваріантності одночасного описування релятивістичної системи частинок зі світовими лініями $x_a(t)$, необхідно побудувати представлення групи Пуанкаре, яке діє в деякому просторі станів цієї системи (конфіґураційному, або фазовому). При цьому трьом основним формалізмам (лаґранжевому, ньютоновому й гамільтоновому) відповідають три можливості:

1) нескінченне продовження $J^\infty(R \times E^{3N}) \equiv E$ (див. [2] та цитовану там літературу) розширеного конфіґураційного простору системи частинок зі стандартними координатами $(t, x, \overset{1}{x}, \dots, \overset{\sigma}{x}, \dots)$, де $\overset{\sigma}{x} = \{\overset{\sigma}{x}_a\}, a = 1,\dots,N;\ \overset{1}{x}_a = \dot{x}_a,\ \overset{\sigma}{x}_a = \partial^\sigma x/\partial t^\sigma$;

2) перше продовження $R \times TE^{3N}$ розширеного конфіґураційного простору з координатами $(t, x, \dot{x})$;

3) фазовий простір P системи з координатами (q, p), де $q = \{q_a^i\}$, $p = \{p_{ai}\}$, $a = 1,\dots,N$; $i = 1, 2, 3$ — канонічні координати та імпульси частинок.

Розглянемо представлення групи Пуанкаре в конфіґураційних змінних системи частинок.

Ґенератори групи перетворень G_r в E запишемо у вигляді

$$X_\alpha = \omega_\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a=1}^{N}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\xi^{(\sigma)i}_{\alpha a}\frac{\partial}{\partial^\sigma x_a^i},\ \alpha = 1,\dots,r. \quad (13)$$

Векторні поля ω_α й $\xi^{(\sigma)i}_{\alpha a}$ визначають інфінітізимальні перетворення координат точки в E

$$t' = t + \omega_\alpha\delta\lambda^\alpha;$$

$$\overset{\sigma}{x}{}'^i_a(t') = \overset{\sigma}{x}{}^i_a(t) + \xi^{(\sigma)i}_{\alpha a}\delta\lambda^\alpha. \quad (14)$$

Для груп просторових трансляцій $\left(\alpha \equiv \underset{j}{T}\right)$ та поворотів $\left(\alpha \equiv \underset{j}{R}\right)$, що не стосуються змінної $t(\omega_\alpha = 0)$, дістанемо

$$X_j^T = -\sum\frac{\partial}{\partial x_a^j};\ X_j^R = -\varepsilon_{ijk}\sum\sum\overset{\sigma}{x}{}^k_a\frac{\partial}{\partial\overset{\sigma}{x}_{ai}}. \quad (15)$$

Для ґенераторів бусту знаходимо

$$X_j^L = \sum_{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}\left(-t\delta_{jk} + v_{\alpha k}x_{\alpha j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}_{\alpha k}}. \qquad (16)$$

Для того, щоб дістати AP, необхідно взяти X_0^T у вигляді

$$X_0^T = \sum_{a=1}^{N}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\overset{\sigma+1}{x}{}_a^k\frac{\partial}{\partial \overset{\sigma}{x}{}_k^a} = \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}. \qquad (17)$$

Безпосередніми розрахунками неважко пересвідчитися, що генератори (15), (16) та (17) утворюють базис алгебри AP, тобто задовольняють співвідношення (9)—(12).

Побудуємо канонічне представлення групи Пуанкаре. Нехай група Лі G_r реалізується деякими перетвореннями фазового простору, що ґенерується набором операторів у вигляді

$$X_\alpha = \sum_m\left(\xi_\alpha^m\frac{\partial}{\partial q^m} + \eta_\alpha^m\frac{\partial}{\partial p^m}\right),\ \alpha = 1, \ldots, r. \qquad (18)$$

Ці перетворення будуть канонічними за умови, що вони зберігають гамільтонову структуру рівнянь руху

$$\dot{q}^m = \frac{\partial H}{\partial p_m}; \qquad \dot{p}_m = \frac{\partial H}{\partial q_m}. \qquad (19)$$

В цьому випадку існують функції, які називаються канонічними ґенераторами, такі що

$$\xi_\alpha^m = -\frac{\partial Y_\alpha}{\partial p_m},\ \ \eta_\alpha^m = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial q^m}. \qquad (20)$$

Оператори X_α можна записати у вигляді:

$$X_\alpha = \sum_m\left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial q^m}\frac{\partial}{\partial p_m} - \frac{\partial Y_\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial}{\partial q^m}\right) \equiv \{Y_\alpha, \ldots\}, \qquad (21)$$

де для довільної пари функцій $f(q,p)$, $g(q,p)$

$$\{f,g\} = \sum_m\left(\frac{\partial f}{\partial q^m}\frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial g}{\partial q^m}\right) \qquad (22)$$

— дужки Пуассона. Із співвідношень (4) для канонічних ґенераторів Y_α випливають класичні переставні співвідношення (в термінах дужок Пуассона):

$$\{Y_\alpha, Y_\beta\} = c_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma + d_{\alpha\beta},\quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r, \qquad (23)$$

де $d_{\alpha\beta}$ — набір сталих, що задовольняють ряду співвідношень.

Для того, щоб генеровані функціями Y_α-перетворення були симетріями рівнянь Гамільтона (19), достатньо (й при незначних передумовах, викладених в [2], необхідно), щоб Y_α були інтеґралами руху, тобто задовольняли співвідношенням

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial t} + \{Y_\alpha, H\} = 0. \qquad (24)$$

Для групи Пуанкаре, не втрачаючи загальності, можна покласти $d_{\alpha\beta} = 0$ для всіх α та β. Тоді співвідношення (23) для групи P набудуть вигляду:

$$\{P_i, H\} = 0, \qquad \{J_i, H\} = 0, \qquad \{P_i, P_j\} = 0, \qquad (25)$$

$$\{J_i, P_j\} = \varepsilon_{ijk}P_k, \{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k,\ \ \{J_i, K_j\} = \varepsilon_{ijk}K_k, \qquad (26)$$

$$\{K_i, H\} = P_i;\ \{K_i, P_j\} = \sigma_{ij}H;\ \{K_i, K_j\} = -\varepsilon_{ijk}J_k, \qquad (27)$$

де прийняті такі позначення:

$$H = -Y_0{}^T;\ \ P_i = Y_i{}^T;\ \ J_i = Y_i{}^R;\ \ K_i = -Y_i{}^L. \qquad (28)$$

При заміні в (25)—(27) канонічних операторів ермітовими операторами — ґенераторами унітарних перетворень, а дужок Пуассона — комутаторами (помноженими на $-\frac{i}{\hbar}$), дістанемо комутаційні співвідношення, що лежать в основі квантової релятивістичної гамільтонової теорії.

Вперше сформульована Діраком [4] задача побудови гамільтонового опису релятивістичних взаємодіючих частинок полягає у віднайденні набору десяти канонічних унітарних ґенераторів групи Пуанкаре як розв'язків відповідних переставних співвідношень типу (25) — (27). При цьому H, P_i, J_i, K_i ототожнюються з енерґією, імпульсом, моментом імпульсу та інтеґралом руху центру мас. Труднощі концептуального та математичного характеру, що при цьому виникають, детально обговорюються, зокрема, в працях [2, 3], в яких можна знайти й вичерпну бібліографію.

Застосування ньютонового формалізму в РТПВ обумовлює її формулювання, відоме як "предикативна ("передбачувальна") механіка". Вживання цього терміна обумовлене тим, що за умови задання звичайних початкових умов для положень та швидкостей з'являється можливість однозначно визначити еволюцію системи й передбачити її поведінку в майбутньому — в цьому незаперечна перевага цього напряму розвитку РТПВ перед іншими. Це дає можливість розвивати його за аналогією з прекрасно розробленим апаратом класичної механіки. Побудова предикативної механіки почалася з праць Каррі та Хілла [5, 6]. В цих працях для початкових (фізичних) координат частинок x_a^i задавалися рівняння руху ньютонового типу:

$$\ddot{x}_a^i - \mu_a^i(x,\dot{x},t) = 0\,;\quad x = \{x_b^j(t)\}\,;\quad \dot{x} = \{\dot{x}_b^j(t)\}\,. \qquad (29)$$

Вимога пуанкаре-інваріантності означає, що в системі рівнянь (29) в конфіґураційному просторі системи частинок діє представлення групи Пуанкаре з ґенераторами (13). Ця умова виражається рівністю:

$$X_\alpha\left[\ddot{x}_a^i - \mu_a^i\{x,\dot{x},t\}\right]\Big|_\mu = 0, \qquad (30)$$

де символ $|_\mu$ вказує, що вираз (30) належить обчислювати з урахуванням рівнянь (29). Підставляючи в (30) вирази (15) — (17), дістаємо для функцій систему рівнянь:

$$\frac{\partial\mu_a^i}{\partial t} = 0;\quad \sum\frac{\partial\mu_a^i}{\partial x_b^j} = 0; \qquad (31)$$

$$\sum_b \varepsilon_{jkl}\left(x_b^k\,\frac{\partial\mu_a^i}{\partial x_b^l} + \dot{x}_b^k\,\frac{\partial\mu_a^i}{\partial\dot{x}_b^l}\right) = \varepsilon_{jmi}\mu_a^n; \qquad (32)$$

$$\sum_b\frac{\partial\mu_a^i}{\partial\dot{x}_b^j} + \frac{1}{c^2}\left\{\sum_b\left[r_{ab}^j\left(\dot{x}_b^k\,\frac{\partial\mu_a^i}{\partial x_b^k} + \mu_b^k\,\frac{\partial\mu_a^i}{\partial\dot{x}_b^k}\right) - \dot{x}_b^k\dot{x}_b^j\,\frac{\partial\mu_a^i}{\partial\dot{x}_b^k}\right] + \right.$$

$$\left. + 2\mu_a^i\dot{x}_b^j + \mu_a^j\dot{x}_b^j\right\} = 0\,. \qquad (33)$$

Згідно з (31) та (32) μ_a^i функції повинні бути трансляційно інваріантними (тобто містити лише відносні координати частинок $r^i_{ab} = x_a^i - x_b^i$), незалежними від часу компонентами 3-векторів. Ці умови стосуються як релятивістичних, так і нерелятивістичних рівнянь руху. Рівняння (33), відомі як рівняння Каррі—Хілла. Вони виражають умови форм-інваріантності рівнянь (29) стосовно перетворень Лоренца (з перерахунком до нової одночасності). Вперше ці умови були знайдені Каррі [5] й, незалежно, Хілом [6] як необхідні умови ПІ-системи (29). Згодом Белль встановив їх достатність [7]. Основні труднощі цього підходу обумовлюються нелінійністю системи (33), що порушує принцип лінійної суперпозиції релятивістичних "сил" μ_a. Це стало причиною того, що й досі не вдалося віднайти точних фізично осмислених розв'язків рівнянь Каррі—Хілла. Винятком є результати роботи [1] та цитованих там отриманих раніше результатів [18], котрі реалізують певний феноменологічний підхід до проблеми руху в релятивістичній теорії тяжіння. Подальшим розвитком та поширенням підходу [1, 18] на інші форми РТПВ, зокрема на більш реалістичні моделі, є дана публікація.

3. Звернімося до іншого кола питань, пов'язаних з побудовою (наближеної) релятивістичної динаміки гравітуючих протяжних частинок. Окрім вже зазначених проблем у цьому випадку з'являються ще й зовсім нові. Річ у тім, що методи опису протяжних тіл в релятивістичних теоріях, зокрема в загальній теорії відносності (ЗТВ) [9, с. 149], суттєво відрізняються від класичних. Якщо в ньютоновій механіці існує поняття абсолютно жорсткого тіла — ідеальної моделі, що характеризується скінченним числом степенів вільності, то в релятивістичному випадку таке поняття входить у суперечність з основами теорії. Нетривіальними задачами суть введення центру мас й моменту імпульсу протяжної системи, а також характеристик, пов'язаних з інваріантним описом обертання [9, 10].

У найбільш поширених сучасних теоріях гравітації (ТГ) — метричних теоріях гравітації (МТГ) — постулюється, що електрично нейтральне пробне тіло рухається по геодезичній ріманового простору-часу [9—15]. За означенням геодезична крива — це лінія, вздовж якої функціонал

$$S = \int (g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^{1/2} \qquad (34)$$

досягає екстремуму, де $(g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta)^{1/2}$ — інтервал, $g_{\alpha\beta}$ — метричний тензор ріманового простору-часу. Зазначимо, що рух пробного тіла по геодезичній — фундаментальний принцип, відомий ще як принцип універсальності вільного падіння, або принцип рівності інертної та важкої мас тіла [13—15]. Ще Ньютон [16] надавав надзвичайно важливого значення цьому принципові. Тепер ньютонівський принцип еквівалентності прийнято називати слабким принципом еквівалентності (СПЕ): прискорення вільного падіння не залежить від внутрішньої структури та маси тіл. Згідно з цим принципом усі тіла в системі відліку (СВ), жорстко зв'язаній з вільно падаючим спостерігачем, не матимуть прискорення одне відносно одного. Винятком можуть бути хіба що так звані припливні ефекти, пов'язані з можливою неоднорідністю гравітаційного поля. Ці ефекти можна зробити нехтовно малими, зменшуючи розміри "ліфта". Коротко кажучи, у вказаній СВ усі тіла в усьому, що стосується їх механічного руху, поводять себе так, ніби тяжіння відсутнє. Айнштайн зробив наступний крок: припустив, що усі інші закони фізики (закони електродинаміки й решта законів) у ліфті, що вільно падає, діють так само, як і за відсутності гравітації. Таке припущення дозволило йому створити ЗТВ й відоме нині як Айнштайнівський принцип еквівалентності (АПЕ) [13]. АПЕ може виявитися зайвим, якщо справдиться так звана гіпотеза Шіффа, згідно з якою будьяка самоузгоджена теорія тяжіння, яка задовольняє СПЕ, задовольнятиме й АПЕ [12, с.21]. Слід зазначити, однак, що ця проблема є значно складнішою й при коректному та послідовному аналізі треба, за пропозицією Бонді [17], розглядати три "a priori" незалежні різновиди мас. Разом з гіпотезою Шиффа ці питання потребують окремого ґрунтовного висвітлення.

Аналіз існуючих на сьогодні ТГ — принаймні в першому наближенні — зручно проводити в межах так званої систематики Дікке, котра у викладі К. Уїлла [12] зводиться до двох основних припущень щодо математичного формалізму, який може використовуватись для побудови теорії.

(П1) Простір-час являє собою чотиривимірний диференційовний многовид, кожна точка якого може інтерпретуватися як фізична подія. Цей многовид апріорі не наділяється метричними чи афінними властивостями — на наявність тих або інших структур має вказати експеримент.

(П2) Рівняння гравітаційної теорії повинні записуватися у формі, що не залежить від вибору системи координат, тобто в коваріантній формі.

Дікке, крім того, вводить ще й два обмеження на всі прийнятні ТГ:

(П3) Гравітація повинна пов'язуватися з одним чи кількома полями тензорного характеру (скалярами, векторами чи тензорами різних рангів).

(П4) Динамічні рівняння, що описують гравітацію, повинні виводитися з принципу інваріантності дії.

Останні (зокрема четверте) припущення не є обов'язковими, але бажаними, оскільки вони різко зменшують кількість прийнятних теорій. В кожному разі, без цих двох обмежень, систематика Дікке дає можливість сформулювати наступні критерії, котрим повинна задовольняти ТГ, що претендує на достовірність:

(К1) Теорія має бути повною, тобто її можна аналізувати, спираючись на первинні принципи та результати будь-яких експериментів, що становлять практичний інтерес. Отже, можна сказати, що вже недостатньо просто постулювати однаковість прискорення вільного падіння тіл, виготовлених з різних матеріалів. Теорія повинна містити в собі повний набір законів електродинаміки та квантової механіки, за допомогою яких можна детально розрахувати поведінку тіл у полі тяжіння. Зауважимо, що вимога повноти не може сягати задалеко — зовсім не обов'язкове її поширення на царину дії, скажімо, сильної та слабкої взаємодії — теорія може й повинна містити достатню кількість довільних параметрів, аби бути спроможною пояснити ще не з'ясовані факти. Незважаючи на таку свободу щодо трактування повноти, цей критерій здатний відсіяти значну кількість нежиттєздатних ТГ, зокрема й тих, що неспроможні запропонувати гравітаційно-модифіковані рівняння Максвелла.

(К2) Теорія повинна бути самоузгодженою, що означає однозначність передбачень вислідів одного й того ж експерименту, розрахованого різними, але еквівалентними методами.

Ці обидва критерії перебувають цілком в межах стандартних й обов'язкових для усіх без винятку теорій вимог так званої аксіоматики Вейля. Наступні ж два критерії мають більш спеціальний характер й забезпечують відповідність прийнятних ТГ експериментальним даним:

(К3) Теорія має бути релятивістичною, тобто в граничному випадку "виключення" гравітаційної взаємодії за умови збереження усіх інших взаємодій, негравітаційні закони фізики повинні збігатися з законами спеціальної теорії відносності (СТВ).

(К4) Теорія повинна мати ньютонівську границю, тобто за умов слабкості поля тяжіння та малих швидкостей вона повинна зводитись до ньютонової теорії тяжіння (НТТ).

Перелічені чотири критерії є своєрідними тестами "на виживання ТГ" й водночас вони (особливо два останні) є визначальними при застосуванні методів РТПВ.

4. Однією з найбільш важливих переваг, розглянутих в другому пункті алгоритмів побудови формалізмів РТПВ [2, 8], є те, що відносно групи Пуанкаре енергія H та імпульс P_i перетворюються як компоненти 4-вектора, а момент імпульсу J_i та інтеграл руху центра мас K_i — як компоненти 4-тензора другого рангу (див. пункт 2, співвідношення (24)—(28) й коментарі до них). Іншими словами, вислідом теореми Е. Нетер є існування десяти величин, що зберігаються. Причому для системи взаємодіючих тільки поміж собою частинок ці величини мають такі ж трансформаційні властивості, як і відповідні характеристики окремої частинки. В цьому сенсі систему в цілому можна розглядати як одну частинку. Поняття руху центра мас набуває звичного характеру класичної нерелятивістичної механіки. Функція Лагранжа для довільної замкнутої системи явно не залежить від часу — маємо усі переваги класичного формулювання механіки й можемо використовувати закони збереження в стандартному вигляді.

Доречно зробити деякі застереження, аби не склалося хибне уявлення про РТПВ як про щось на зразок своєрідної " панацеї" для термінового й ґарантованого "лікування" від усіх хвороб явно пуанкаре-інваріантного теоретико-польового підходу. Побудова фізично-змістовної, наприклад, лаґранжевої тривимірної форми РТПВ є складною й ще досить далекою від свого завершення. Вичерпний аналіз труднощів на цьому шляху виводить за межі даної публікації [19]. Використання ж низки важливих й фізично-змістовних результатів цих формалізмів [2, 3, 19] є можливим в рамках згаданого в другому пункті феноменологічного підходу, котрий, діючи в межах так званої систематики Дікке, керується її головним принципом, відомим як "бритва Оккама" (1495 р.): "Природа любить речі настільки прості, наскільки це можливо" (цитується згідно з [20, с. 598]). Цей, на перший погляд, напівсерйозний (бо його повернення з середньовіччя в наші часи належить схильному до жартів К. Торну) принцип насправді є дуже серйозним й важливим. У нашому випадку він діє приблизно так: складні й незавершені ТГ, з одного боку, й не менш складні й ще більш незавершені РТПВ, з іншого, претендують на відповідність одній і тій самій фізичній реальності — згідно з принципом "бритви Оккама" вони повинні перетинатися в своїх найпростіших, найпривабливіших й найдосконаліших частинах. Той самий принцип максимальної простоти позбавляє необхідності невдячної праці відшуковування фізичного змісту у випадково вгаданих чи, можливо, просто "підігнаних" розв'язках визначальних рівнянь. Марно дошукуватися фізичного змісту там, де його, найвірогідніше, немає. Згідно з нашим підходом фізично-змістовні розв'язки конструюються так, аби описувати (чи, точніше, моделювати) уже наявну фізичну реальність й, оперуючи набором стандартних параметрів (що включають й ППН-параметри Уіла, але є ширшими, бо здатні описувати й неметричні теорії), відсіювати одночасно й нежиттєздатні ТГ (див. [1,18] й цитовані там праці інших авторів). Маючи на меті застосування отриманих результатів передовсім для експериментів в Сонячній системі, обмежуючись МТГ (див. третій пункт), скористаємося добре пристосованою для цього ППН-метрикою Уіла в модифікованому вигляді [12]:

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi \Phi W + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 + 2(1+\zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)A - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\omega^2 U - \alpha_2 \omega^i \omega^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)\omega^i V_i \tag{35}$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)\omega^i U - \alpha_2 \omega^j U_{ij} \tag{36}$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij}, \tag{37}$$

де потенціали метрики U, U_{ij}, Φ_W, A, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, V_i та W_i визначаються формулами:

$$U = \int \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}', \tag{38}$$

$$U_{ij} = \int \frac{\rho'(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{39}$$

$$\Phi_W = \int \frac{\rho'\rho''(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} - \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) d^3\vec{r}' d^3\vec{r}'', \tag{40}$$

$$A = \int \frac{\rho'\left[\vec{v}'(\vec{r} - \vec{r}')\right]^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{41}$$

$$\Phi_1 = \int \frac{\rho' v'^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{42}$$

$$\Phi_2 = \int \frac{\rho' U'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{43}$$

$$\Phi_3 = \int \frac{\rho' \Pi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{44}$$

$$\Phi_4 = \int \frac{p'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{45}$$

$$V_i = \int \frac{\rho' v_i'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{46}$$

$$V^i = \int \frac{\rho' v'^i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}', \tag{47}$$

$$W_i = \int \frac{\rho'\vec{v}'(\vec{r} - \vec{r}')(x_i - x_i')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'. \tag{48}$$

У формулах (35) — (48) використані такі позначення: γ, β, ξ, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 — ППН-параметри; $\vec{r}$, x^α, x^i, $x^0 \equiv t$ — майже глобальна лоренцева система координат [12, с. 91]; ρ — густина маси спокою, виміряна в локальній вільно падаючій СВ, що супроводжує гравітуючу матерію; $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ — координатна швидкість матерії; ω^i — координатна швидкість ППН-системи координат відносно системи відліку Всесвіту, котра в середньому перебуває в стані спокою; p — тиск, що вимірюється аналогічно ρ; Π — внутрішня енергія на одиницю маси спокою, що включає усі види енергії, крім маси спокою та тяжіння (наприклад, енергію стиснення та теплову енергію). В таких позначеннях запишемо тензор енергії-імпульсу ідеальної рідини:

$$T^{00} = \rho\left(1+\Pi+v^2+2U\right), \tag{49}$$

$$T^{0i} = \rho\left(1+\Pi+v^2+2U+\frac{p}{\rho}\right)v^i, \tag{50}$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j\left(1+\Pi+v^2+2U+\frac{p}{\rho}\right)+p\delta^{ij}\left(1-2\gamma U\right). \tag{51}$$

Введемо інваріантну густину:

$$\rho^* = \rho\left(-g\right)^{\frac{1}{2}}U^0, \tag{52}$$

де U^0 — компонента 4-швидкості, g — визначник метричного тензора. Поняття інваріантної густини зручне тому, що для довільної функції $f\left(\vec{r},t\right)$, заданої на об'ємі, границі якого лежать ззовні матерії, справедливе співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^* f d^3x = \int_V \rho^*\left(\frac{df}{dt}\right)d^3x, \tag{53}$$

згідно з яким, зокрема,

$$\frac{dm}{dt}=0;\; m\equiv\int_V \rho^* d^3x, \tag{54}$$

де m — повна маса спокою частинок в об'ємі V, що визначається за формулою (52),

$$m = \int \rho U^0\left(-g\right)^{\frac{1}{2}}d^3x = \int \rho dv. \tag{55}$$

Всюди, де це не обумовлено, використовується система одиниць, в якій $G = c = 1$.

Для коректності постньютонівського наближення необхідно, щоб максимальні значення ньютонівського потенціалу U, квадрата характерної швидкості v^2, питомого тиску $\frac{p}{\rho}$ та питомої внутрішньої енергії Π мали приблизно однаковий порядок малості $O(\varepsilon^2)$, де $\varepsilon \ll 1$ — деякий безрозмірний параметр. У цьому випадку тіла будуть перебувати в ближній зоні гравітаційного випромінювання, що зумовлюється її рухом. В області, зайнятій тілами, зміни всіх величин з часом обумовлюватимуться насамперед рухом речовини й, відтак, частинні похідні всіх величин за часом будуть малими в порівнянні з частинними похідними за координатами:

$$\frac{\partial}{\partial t} = O^{\alpha}\left(\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

Такі оцінки є типовими для Сонячної системи, при цьому $\varepsilon \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$.

Конструюючи відповідно до ідеології нашого феноменологічного підходу рівняння руху за критеріями (К3) та (К4) систематики Дікке, одночасно встановлюємо обмеження на ППН-параметри — описи руху речовини з постньютонівською точністю в межах різних ТГ відрізнятимуться лише значеннями десяти ППН-параметрів. Зрозуміло, що в кожному випадку (див. (П1) — (П4)) прийдемо до одного й того коваріантного рівняння збереження густини тензора енергії-імпульсу речовини в рімановому просторі-часі:

$$\nabla_{\beta}T^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}_{\beta} = 0. \tag{56}$$

Зауважимо, що реалізація конкретного шляху отримання ПН наближень (56) різного порядку змушує накладати обмеження та робити припущення різного характеру, хоча "технологія" приблизно однакова. Так, скажімо, в працях [21, 22] розгляд *a priori* обмежується тільки МТГ з інтегральними законами збереження, що цілком відповідає меті авторів опрацьовувати свою версію побудови релятивістичної теорії. В нашому підході отримання аналогічних обмежень виникає при виконанні вимог (К3), (К4). Наближені (в різних порядках) версії (56) необхідно подати в формі (29), де згідно з (К3) $\mu(0)$ відповідає ньютоновій границі, $\mu(1)$ — першому постньютонівському наближенню і т. д. Тобто розв'язки (29) маємо в вигляді ряду

$$\mu^i_a = \sum_{p=0}^{\infty}\mu^i_a\left\{p\right\}. \tag{57}$$

На основі відомих віріальних співвідношень класичної механіки й відповідних тверджень одночасових форм РТПВ [19] для кожного порядку ПН-наближення існують стандартні оцінки порядку середніх значень змінних та їх похідних. Виявляється, що для всіх порядків члени розкладу (57) зручно шукати у вигляді [1]:

$$\mu^i_a = \sum_{q=0}^{p}\overset{2(p-q)}{\underset{q+2}{\mu}}, \tag{58}$$

де $\overset{n}{\underset{k}{\mu}}$ — функція степеня n по v й k по $r^{-1}_{ab} = \left(x^i_{ab}x_{abi}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $v = \dot{r}(t)$; $x^i_{ab} = x^i_a - x^i_b$.

Введемо такі операторні позначення:

$$\alpha^j_1 = -\sum_b \delta^{kj}\frac{\partial}{\partial v^k_b}, \tag{59}$$

$$\alpha^j_2 = -2v^j_a + \sum_b v^k_b v^j_b\frac{\partial}{\partial v^k_b} + \sum_b v^k_b x^j_{ba}\frac{\partial}{\partial x^k_b}, \tag{60}$$

$$\alpha_3^j\{p\} = \sum_b x_{ba}^j \mu_b^k \{p\} \frac{\partial}{\partial v_b^k}, \qquad (61)$$

$$\alpha_3^j = \sum_{p=0}^{\infty}\{p\} = \sum_b x_{ba}^j \mu_b^k \frac{\partial}{\partial v_b^k}, \qquad (62)$$

$$\alpha_4^i = -v_a^i. \qquad (63)$$

Тоді рівняння Каррі — Хілла (33) набувають компактного вигляду:

$$\sum_{l=1}^{3}\alpha_l^j\mu_a^i + \alpha_4^i\mu_a^j = 0. \qquad (64)$$

Необхідні й достатні умови того, щоб сконструйовані описаним способом розв'язки задовольняли останньому рівнянню, сформульовані в [1] й мають вигляд:

$$\alpha_1^j\mu_a^i\{p+1\} + \alpha_2^j\mu_a^i\{p\} + \sum_{k=0}^{p}\alpha_3^j\mu_a^i\{p-k\} + $$
$$+ \alpha_4^i\mu_a^j\{p\} = 0. \qquad (65)$$

Це дає можливість не зважати на відсутність явного вигляду розв'язку умов Каррі—Хілла та будувати наближені ПІ-рівняння руху частинок в довільному порядку ПН-наближень. Застосовуючи всі можливі комбінації степенів v та r_{ab}^{-1}, природним чином дістаємо у вигляді коефіцієнтів в сумах для кожного значення p свій власний набір вільних параметрів формалізму. Довільність вибору параметрів анулюється накладанням конкретних фізичних обмежень — такий підхід до моделювання гравітаційної взаємодії (у відповідних ПН наближеннях) за цілком певних значень вільних параметрів містить в собі висновки різних ТГ, в тому числі й ЗТВ [1, 12].

Достатніми для експериментів у Сонячній системі є наближення $p = 0$; 1. При цьому:

$$\overset{0}{\underset{2}{\mu}}{}^i_a = \sum_{b\neq a}\frac{m_b x_{ab}^i}{r_{ab}^3}, \qquad (66)$$

$$\overset{2}{\underset{2}{\mu}}{}^i_a = \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}\{x_{ab}^i\Bigg[b_1(\vec{v}_a)^2 + b_2(\vec{v}_b)^2 + b_3(\vec{v}_a\vec{v}_b) +$$
$$+ b_4\frac{(\vec{r}_{ab}\vec{v}_a)^2}{r_{ab}^2} + b_5\frac{(\vec{r}_{ab}\vec{v}_b)^2}{r_{ab}^2} + b_6\frac{(\vec{r}_{ab}\vec{v}_a)(\vec{r}_{ab}\vec{v}_b)}{r_{ab}^2}\Bigg] +$$
$$+ v_a^i\left[c_1(\vec{v}_a\vec{r}_{ab}) + c_2(\vec{v}_b\vec{r}_{ab})\right] + v_b^i\left[d_1(\vec{v}_a\vec{r}_{ab}) + d_2(\vec{v}_b\vec{r}_{ab})\right]\}, \qquad (67)$$

$$\overset{0}{\underset{3}{\mu}}{}^i_a = \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}x_{ab}^i\left\{a_1\frac{m_a}{r_{ab}} + a_2\frac{m_b}{r_{ab}} + a_3\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c}{r_{bc}} + a_4\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c}{r_{ac}} +\right.$$
$$\left. + a_5\sum_{c\neq a,b} m_c\frac{(\vec{r}_{ab}\vec{r}_{bc})}{r_{bc}^3} + a_6\sum_{c\neq a,b} m_c\frac{(\vec{r}_{bc}\vec{r}_{ac})}{r_{ac}^3}\right\} +$$
$$+\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}}\left\{a_7\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c x_{bc}^i}{r_{bc}^3} + a_8\sum_{c\neq a,b}\frac{m_b x_{ac}^i}{r_{ab}^2 r_{ac}} + a_9\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c x_{bc}^i}{r_{ab}^2 r_{bc}} +\right.$$
$$\left. + x_{ab}^i\left[a_{10}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c(\vec{r}_{ab}\vec{r}_{ac})}{r_{ab}^4 r_{ac}} + a_{11}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_c(\vec{r}_{ab}\vec{r}_{bc})}{r_{ab}^4 r_{bc}}\right]\right\}. \qquad (68)$$

Умови (64) дозволяють усі довільні параметри виразити, наприклад, через

$$b_2 = \beta_{ab}, \quad b_4 = \gamma_{ab}, \quad c_1 = \delta_{ab}. \qquad (69)$$

Як бачимо, вимога ПІ "знищує" значну кількість параметрів.

Отримання більш реалістичних наближень вимагає заміни рівнянь для точкових мас рівняннями для протяжних тіл. Повертаючись до (56), на основі (36)—(55) обчислимо компоненти ріманових зв'язностей й разом з компонентами тензора енергії-імпульсу підставимо у вихідне рівняння. Маючи на увазі подальший аналіз у псевдоевклідовій метриці, окремо виділятимемо члени з частинною похідною за часом й тривимірну дивергенцію. В результаті дістанемо:

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{0i} + \partial_j T^{ij} + \rho\partial^i U + \frac{1}{2}(2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1)\rho\partial^i\Phi_1 -$$
$$- \frac{\zeta_1}{2}\rho\partial^i A + (3\gamma + 1 - 2\beta + \zeta_2)\rho\partial^i\Phi_2 + (1 + \zeta_3)\rho\partial^i\Phi_3 +$$
$$+ 3(\gamma + \zeta_4)\rho\partial^i\Phi_4 + 2\gamma\rho v^i v^k\partial_k U - \xi\rho\partial^i\Phi_\omega +$$
$$+ \rho\partial^i U\left(\Pi - \frac{1}{2}(2\gamma + 1)v_k v^k + \gamma\frac{p}{\rho} - (2\beta + 2\gamma + 1)U\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)\rho\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1)\rho\frac{\partial W^i}{\partial t} +$$
$$+ \rho\frac{\partial U}{\partial t}\left[2\gamma v^i - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)W^i\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1)\rho v_k\left[\partial^i V^k - \partial^k V^i\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\omega_k\omega^k\partial^i U - \frac{\alpha_2}{2}\omega_k\omega_l\rho\partial^i U^{kl} +$$
$$+ \frac{1}{2}(2\alpha_3 - \alpha_1)\omega_k\rho\partial^i V^k + \alpha_2\omega_k\rho\frac{\partial U^{ik}}{\partial t} -$$
$$- \frac{\alpha_1}{2}\rho v_l\left[\omega^i\partial^l U - \omega^l\partial^i U\right] = \rho O(\varepsilon^6). \qquad (70)$$

Подальша деталізація (70) вказує на еквівалентність характеру залежності від комбінацій змінних положень та швидкостей у виразах (66)—(69). Шляхом зіставлення однотипних виразів з використанням псевдоевклідового аналогу (70) здійснюється фізичне ототожнення вільних параметрів з відповідними ППН-параметрами. Одночасно встановлюються обмеження на ППН-параметри ТГ з наявністю інтегральних законів збереження. Реалізація цієї програми потребує окремих публікацій.

Відповідно до назви даної роботи звернемо увагу ще на деякі принципові питання.

Рівняння руху протяжного тіла з відомим тензором енергії-імпульсу природно виникають з коваріантного закону збереження (70) приведенням його до вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varsigma^{i0} = \aleph^{i}, \tag{71}$$

де ς^{i0} — густина повного імпульсу якогось тіла, а $\aleph^{i}$ являє собою усю решту рівняння (70) й може трактуватися як сила, що діє на це тіло. Така процедура розділення рівняння (70) містить, проте, суттєву невизначеність: частину позадивергенційних членів на рівних підставах можна зарахувати як до зміни імпульсу тіла, так й до сили, що діє на нього (див. [12, 21, 22]).

Усунути цю неоднозначність можна, використовуючи рівночасно й рівняння, записані на основі лаґранжевого підходу. Крім усунення вказаної невизначеності, шляхом лаґанжевого формулювання можна обійти й інші не менш принципові труднощі, про які вже йшлося.

Продовжуючи обговорення (див. другий пункт) ПІ-методів миттєвих форм механіки, звернімо увагу на те, що прикрий факт наявності в ПІ лаґранжіанах похідних нескінченного порядку (інакше маємо неприємну "теорему про відсутність взаємодії" [2, 3, 19]) в наших наближеннях є несуттєвим (!). ППН-наближення для експериментів в Сонячній системі не вимагають розгляду аж так екзотичних ситуацій. Натомість приємним фактом є існування певного взаємозв'язку між лаґранжевою та ньютоновою формами РТПВ [19]. На завершення вкажемо на можливості його використання.

Як уже йшлося вище, релятивістичні лаґранжіани взаємодії в загальному випадку містять вищі похідні всіх порядків, а в наближеннях по c^{-2} існують, втім, й лаґранжіани, що залежать від похідних скінченного порядку. Відповідні рівняння Ейлера—Лаґранжа, взагалі кажучи, будуть диференціальними рівняннями вище другого порядку (в точній теорії — нескінченного порядку), так що постановка звичної для механіки задачі Коші втрачає сенс. В [19] розглянута процедура виділення з множини всіх розв'язків підмножини таких, що одночасно є розв'язками рівнянь типу (29). При цьому припускається, що лагранжіан L має структуру:

$$L = L^{(0)}\left(x,\dot{x},t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n} L^{(n)}\left(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots,t\right), \tag{72}$$

де ε — деякий малий параметр (як правило, це константа взаємодії або c^{-1}), а лаґранжіан $L^{(0)} = L\big|_{\varepsilon=0}$ невироджений, тобто для матриці Гессе

$$H_{abij} \equiv \frac{\partial^{2} L^{(0)}}{\partial \dot{x}_{a}^{i} \partial \dot{x}_{b}^{j}} = H_{baji} \tag{73}$$

виконується умова

$$\det\|H\| \neq 0\,. \tag{74}$$

В представленому феноменологічному підході вже існують певні способи зіставлення різних форм релятивістичної динаміки (див. [1, 18] та цитовані в них інші праці авторів). Новим напрацюванням будуть присвячені наступні публікації.

1. *Opanasyuk Yu.* On single-time methods in relativistic gravity dynamics // Condenced Matter Physics.— 1998.— Vol. 1.— N 3. (15).- P. 537—551.
2. *Гайда Р. П.* Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // Физ. ЭЧАЯ.— 1982.— № 13.— Вып. 2.— С. 427—493.
3. *Владимиров Ю. С, Турыгин А. Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 135 с.
4. *DiracP. A. M.* Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys.— 1949.— Vol. 21.— P. 392 — 399.
5. *Currie D. J.* Poincaré — Invariant equations of motion for classical particles // Phys. Rev.— 1969.— Vol. 142.— P. 817—824.
6. *Hill R. N.* Instantaneous action-at-a-distance in classical relativistic mechanics // J. Math. Phis.— 1967.— Vol. 8.— P. 201—220.
7. *BelL.* Predictive relativistic mechanics // Ann/ Inst. H. Poincaré/— 1971.— A 14.- N 3.— P. 189—203.
8. *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Формы релятивистской динамики в классическом лагранжевом описании системы частиц//Теорет. мат. физ.— 1983.— Т. 55.—С. 88—105.
9. *Пирагас К. А., Жданов В. И., Александров А. Н, КудряЮ. Н, Пирагас Л. Е.* Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике.— М.: Энергоатомиздат, 1995.— 448 с.
10. *Меллер К.* Теория относительности / Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1975.
11. *Петров А. 3.* Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука, 1966.
12. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике/Пер. с англ.— М.: Энергоатомиздат, 1985.— 295 с.
13. *Мизнер Ч., Торн К., УилерДж.* Гравитация. Т. 1/Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 474 с.
14. *Там само.*— Т. 2 / Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 525 с.
15. *Там само.*— Т. 3 / Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 510 с.
16. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с англ.— Петроград: Изв. Николаевск, морск. акад., 1915.— Вип. IV. — 276 с.
17. *Bondi H* Negative Mass in general relativity // Rev. Mod. Phys.— 1957,— Vol. 29.—N 3.— P. 423—428.
18. *Жданов В. И., Опанасюк Ю. А.* Феноменологическая формулировка прямого межчастичного взаимодействия в релятивистской теории гравитации // Изв. вузов. Физика.— 1986.— № 11.— С. 69—74.

19. *Гайда Р. П.* Релятивистская классическая теория прямых взаимодействий частиц в трехмерной формулировке. Диссертация докт. физ.-мат. наук.— Львов,— 1984.—381 с.

20. *Thome K. S., Will C. M.* Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. I. Foundation *II* Astrophys. J.— 1971.— Vol. 169.—P. 125—140.

21. *Чугреев Ю. В.* Негеодезичность движения центра масс Земли и приливные эффекты.— Серпухов: 1985.— 30 с. Препринт Ин-т физ. вые. эн.— С. 85—90.

22. *Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* О соотношении между инертной и гравитационной массами протяженного тела в метрических теориях гравитации // Труды Мат. ин-та АН СССР.— 1985.—Т. 167.—С. 108—155.

Opanasjuk Yu. A.

ON PROBLEM OF POINCARÉ-INVARIANCE IN GRAVITY DYNAMICS OF NONPOINT OBJECTS

The problems of construction of the generalized Poincaré-invariant equations of motion of the nonpoint objects are discussed. A short outline of revived methods of an action-at-a-distance description of interacting particles is given. A new approach to the problem of motion in relativistic gravity is discussed. The generalized Poincaré-invariant equations of motion are derived in post-Newtonian approximations of the phenomenological formulation of the relativistic action-at-a-distance gravity.