Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

МІНІМАКСНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Курсова робота за спеціальністю "Прикладна математика"6.040103

Керівник курсової роботи
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач
Тимошкевич Л. М.

____
(підпис)
«____» __________ 2021р.

Виконала студентка
3-го року навчання
Фісун Є.Б.
«____» __________ 2021р.

Київ - 2021

Тема: Максимінні теореми теорії графів

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	15.10.2020	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	20.10.2020	
3.	Аналіз літератури за темою роботи.	10.11.2020	
4.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	28.12.2020	
5.	Аналіз отриманих результатів з керівником.	14.01.2021	
6.	Оформлення курсової роботи.	19.04.2021	
7.	Створення презентації до курсової роботи.	15.05.2021	
8.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Зміст

1 Вступ

Теорія графів - є важливим розділом дискретної математики, адже він дозволяє зручно представляти різні математичні об'єкти. Існує багато видів графів: орієнтовні, неорієнтовні, регулярні, двочасткові і так далі. В даній курсовій роботі, ми зосередимося на двочасткових графах, які використовуються для моделювання зв'язків між двома різними множинами об'єктів. Уявімо, що перед нами постає така задача: дано m кандидатів та n вакансій, потрібно знайти такі зв'язки в двочастковому графі, щоб усі люди отримали роботу, і так само усі вакансії мають бути закритими. На цьому етапі виникає питання пошуку досконалого парування. А в цьому нам як раз допоможе Теорема Холла (або ще відома як теорема про весілля) сформульована Філіпом Холлом в 1935 році, яка визначає достатні та необхідні умови існування досконалого парування. Ще однією основною теоремо, яка виводиться за допомогою теореми Холла — є теорема Кеніга (1931).

1.1 Мета дослідження

Мета роботи зумовила наукове завдання, яке полягає в :

1. Систематизації основних понять двочасткових графів

2. Дослідженні теореми Холла, Кеніга та алгоритму знаходження максимального парування

3. Прикладному застосуванні в задачах

2 Основні поняття теорії графів

Означення 1. [1, ст.160]

Графом (неорієнтованим графом) G називають пару множин (V, E), де V — множина вершин, E — множина ребер.

Означення 2.[1, ст.160]

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть що вершини v і w ***суміжні***. Якщо $e = (v, w)$ — ребро графа, то вершини v і w називають ***кінцями ребра*** e. Вершину v і ребро e називають ***инцидентними***, якщо v кінець ребра e. Два ребра називають ***суміжними***, якщо вони мають спільну вершину.

Означення 3. [1, ст.164]

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називають ***підграфом*** графа $G = (V, E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ та $E_1 \subseteq E$.

Означення 4.[1, ст.165]

Операція вилучення вершини v із графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v, а з множини E — усіх ребер інцидентних v.

Означення 5. [1, ст.165]

Операція вилучення ребра e із графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини E елемента e. При цьому всі вершини зберігаються.

Означення 6. [1, ст.169]

Степенем $\delta(v)$ вершини v називають кількість інцидентних їй ребер. Вершину степеня — 0 називають ***ізольованою***.

Означення 7. [1, ст.171]

Маршрутом (або шляхом) у графі $G = (V, E)$ називають послідовність $(v_1, e_1, v_2, e_2, e_k, ..., v_{k+1})$ вершин v_i і ребер e_i таку, що кожні два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже $e_i = (v_i, v_{i+1}), i = 1, 2, .., k$. Вершину v_1 називають ***початком***, а вершину v_{k+1} ***кінцем*** шляху. Усі інші вершини цього шляху називають ***внутрішніми***.

Означення 8.[1, ст.172]

Маршрут, у якого усі ребра попарно різні, називають ***ланцюгом***, а той, у якого усі вершин попарно різні, — ***простим ланцюгом***.

Означення 9. [1, ст.172]

Маршрут називають ***замкненим (або циклічним)***, якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають ***циклом***, а замкнений простий ланцюг — ***простим циклом***.

3 Двочасткові графи

Означення 10.[2]

Двочастковим графом (біграфом) називається граф, множина вершин якого може бути розбита на дві підмножини так, що кожне ребро графа має одну вершину з першої підмножини і одну з другої.

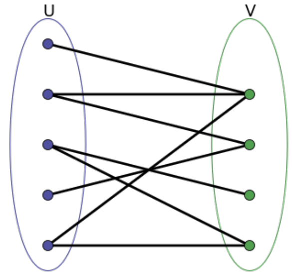
$$U \cup V = W,$$

$$|U| > 0,$$

$$|V| > 0$$

так, що жодна вершина в U не з'єднана з вершинами в U і жодна вершина в V не з'єднана з вершинами в V.

Рис.1 [2]



3.1 Критерій двочастковості

Критерій двочастковості[3]

Граф є двочастковим тоді й лише тоді, коли він не містить циклів непарної довжини. Як утворити такий поділ на дві множини? Уявімо, що поділ — це колір, тоді виникає питання чи можна розфарбувати вершини в два кольори, щоб кінці будь-якого ребра були різного кольору.

Доведення Якщо в графі є цикл непарної довжини, то його не можна розфарбувати: сусідні вершини повинні бути різних кольорів, коли ми дійдемо до кінця цього циклу, ми отримаємо суперечність (наприклад трикутник).

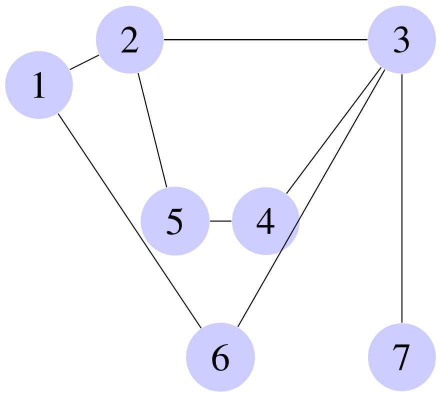
Щоб довести протилежне, припустимо, що циклів непарної довжини немає. Виберемо довільну вершину a та пофарбуємо її в білий колір. Не втрачаючи загальності можемо пофарбувати в чорний колір, заміна кольорів не впливає на розв'язок. Для будь-якої іншої вершини b порахуємо кількість ребер від a до b. Скористаємось наступною лемою, якщо існує два шляхи з a в b, то, або в обох число ребер парне, або в обох непарне. Якщо існує шлях $a \to b$ з парним числом ребер, а також інший шлях $a \to b$ з непарним числом ребер, то існує цикл з непарним числом ребер. Тобто, з a в b ми підемо по одному шляху, а повернемося по іншому. Це суперечить припущенню.$\square$

Означення 11.[2]

Хроматичне число графа G — мінімальна кількість кольорів, в які можна розфарбувати вершини графа G таким чином, щоб кінці будь-якого ребра мали різні кольори. Позначається як $\chi(G)$.

Граф є двочастковим тоді й лише тоді, коли $\chi(G) = 2$.

Розглянемо не дуже очевидний приклад двочасткового графа. Його можна розбити на дві множини вершин, а саме $V = \{1, 5, 3\}$ та $U = \{2, 4, 6, 7.\}$



3.2 Приклади на двочасткові графи

Розглянемо деякі приклади задач на двочасткові графи.

Приклад 1

В місті відбулися олімпіади з фізики, математики та інформатики. В кожній з них брала участь непарна кількість учнів класу, причому ніхто не брав участь рівно в двох олімпіадах. Всього в класі 20 учнів. Доведіть, що хтось з них не був ні на одній олімпіаді.

Розв'язання

Зобразимо граф таким чином, множину вершин можна розбити на дві долі, одна відповідає за учнів, а інша за олімпіади. Ребро відображає відношення "брати участь в олімпіаді". Скористаємось основною лемою про рукостискання, яка стверджує, що сума усіх степенів вершин — це парне число, подвоєна кількість ребер.

$$\sum_{v \in V(G)} deg\ v = 2|E(G)|$$

Доведемо від супротивного, нехай всі учні (20 — парне число) брали участь в олімпіадах. Обчислимо загальну кількість вершин, 20+3=23. Маємо непарну кількість вершин, а сума непарної кількості непарних вершин — непарна. Отже, це суперечить лемі про рукостискання, тому хтось з учнів не був ні на одній олімпіаді.

Приклад 2

В класі кожен хлопчик дружить з трьома дівчатками, а кожна дівчинка – з 5 хлопчиками. 17 з них люблять гру «Математичне шоу», і в класі 15 парт. Скільки всього учнів у класі?

Розв'язання

Розглянемо двочастковий граф, одна доля відповідає за дівчат, а інша за хлопців. Позначимо за x - кількість дівчат, y - кількість хлопців. В задачі маємо деякі умови-обмеження на мінімальну та максимальну кількість учнів, а саме можливо від 17 до 30 (2 людини за партою, 15 парт). $5x$ - кількість ребер з долі дівчат, $3y$ - кількість ребер з долі хлопців, сума кількості ребер однакова, тому що у нас немає висячих вершин, так як кожна дівчина та хлопець має ребро дружби.

$$3x = 5y$$

$$x = \frac{5y}{3} \quad (1)$$

Запишемо суму усіх учнів $x + y$, використовуючи співвідношення (1). Маємо,

$$\frac{5y}{3} + y$$

$$\frac{8y}{3} - \text{загальна кількість учнів.}$$

З цього робимо висновок, що кількість учнів має націло ділитись на 8, з можливого діапазону 17-30, це єдине число 24. Отже, всього в класі 24 учні.

Приклад 3

Яка найбільша кількість ребер може бути в двочастковому графі з

а) b білими і r чорними вершинами?

б) з 2n вершинами?

с) з 2n+1 вершиною?

Розв'язання

а) Максимальна кількість ребер може бути у випадку повного двочастковому графа, тому br найбільша кількість ребер.

б) Кількість вершин в першій долі позначимо за x, тоді в іншій долі буде $2n - x$

вершин. Повний граф складатиметься з $x \cdot (2n - x)$ ребер. Нам потрібно знайти x, причому він має бути максимальним, скористаємось похідною.

$$2n - 2x = 0$$

З цього випливає, що $x = n$

Тоді максимальна кількість ребер дорівнює $n \cdot (2n - n) = n^2$.

с) Кількість вершин в першій долі позначимо за x, тоді в іншій долі буде $(2n+1) - x$ вершин. Повний граф складатиметься з $x \cdot (2n + 1 - x)$ ребер. Нам потрібно знайти x, причому він має бути максимальним, скористаємось похідною.

$$2n + 1 - 2x = 0$$
$$x = \frac{2n+1}{2}$$
$$x = n + \frac{1}{2}$$

Тоді максимальна кількість ребер дорівнює

$$n + \frac{1}{2} \cdot (2n + 1 - n - \frac{1}{2}) = n + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} = n^2 + n + \frac{1}{4}$$

4 Парування

Означення 12.[4]

Множина вершин $U \subset V(G)$ називається ***незалежною***, якщо жодні дві її вершини не суміжні.

Означення 13. [4]

Множина ребер $M \subset E(G)$ називається ***паруванням***, якщо жодні два її ребра не мають спільної вершини.

Означення 14.[4]

Множина ребер $F \subset E(G)$ ***покриває*** вершину $v \in V(G)$, якщо існує ребро $f \in F$, інциденте v.

Означення 15.[4]

Парування M графа G називається ***досконалим(повним)***, якщо воно покриває усі вершини графа.

Означення 16.[4]

Розмір (кардинальність) парування M це кількість ребер в M, позначимо $|M|$.

4.1 Максимальне парування

Означення 17.[5]

Ланцюгом що чергується відносно деякого парування, називатимемо простий шлях довжиною k, в якому ребра по черзі належать чи не належать паруванню.

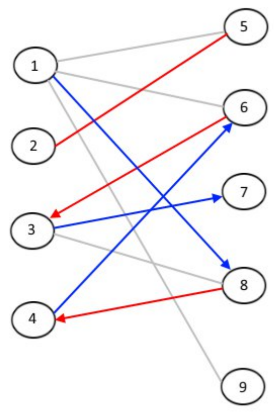
Означення 18.[5]

Ланцюгом що збільшується відносно деякого парування, називатимемо ланцюг, що чергується, у якого початкова та кінцева вершини, не належать паруванню.

Означення 19.[6]

Вершину, яка покривається ребром з парування M назвемо ***насиченою відносно*** M. Інакше вершина називається ***ненасиченою або вільною відносно*** M.

Рис.2 [5]



Червоним кольором помічені вершини парування, а в графі є ланцюг, що збільшується $1 \to 8 \to 4 \to 6 \to 3 \to 7$.

За допомогою ланцюгів, що збільшуються ми можемо збільшити потужність парування на одиницю. Можна обрати такий шлях та провести чергування — видалити з парування усі ребра та ланцюги, і навпаки додати усі інші ребра. Отже, потужність парування збільшиться на одиницю.

В даному прикладі додадуться сині ребра $(1,8), (3,7), (4,6)$, а видаляться червоні $(3,6)$ та $(4,8)$. Ребро $(2,5)$ не міститься в ланцюгу, що збільшується. Таким чином розмір парування збільшиться на одиницю.

Теорема К.Берж (1975)[6]

Парування M у графі G найбільше, тоді і тільки тоді, коли в G немає ланцюгів, що збільшуються відносно парування M.

Доведення Нехай парування M не містить ланцюгів, що збільшуються, а парування M' — найбільше парування. Розглянемо підграф графа G, який складається з ребер симетричної різниці $M \bigoplus M'$. В ньому степінь кожної вершини не перевищує 2, завдяки цьому підграф розпадається на цикли та прості ланцюги. Так як в циклі ребра з M та M' чергуються, цикл має парну довжину. Чергування відбувається в кожному ланцюгу. Ланцюг не є ланцюгом, що збільшується, ні відносно M, ні M', довжина ланцюга — парне число. Симетрична різниця $M \bigoplus M'$ містить порівну ребер з M та M', а множини M і M' — рівнопотужні, тобто M як і M' є найбільшим паруванням.$\square$

Алгоритм [6]

1) Побудувати будь-яке парування M.

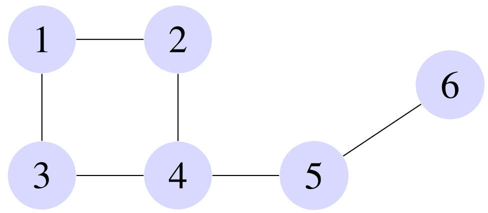
2) Вільні відносно M вершини з долі V_1 позначимо нулем, а інші вершини вважатимемо непозначимими.

3) Для кожної позначенної на попередньому кроці вершини $v_i \in V_1$ позначити її номером i усі непозначені вершини з V_2, які з'єднуються з v_i білими ребрами.

Якщо при цьому виявиться позначенною вільна вершина, то P ланцюг, що збільшується знайдено: він відновлюється за мітками, починаючи з вказанної вершини: мітка вершини є послідовний номер вершини P. На цьому етапі потрібно перефарбувати ланцюг, що збільшується, тобто замінити M на $M \bigoplus P$ та перейти до кроку 2.

4) Для кожної поміченої на попередньому кроці вершини $u_j \in V_2$ позначити її номером j непомічену вершину з V_1, яка зєднується з u_j чорним ребром. Якщо нових поміток на цьоме кроці не виникає, перейти до кроку 5, інакше повернутися до кроку 3.

5) Дане парування M є найбільшим. Кінець алгоритму.



Досконале парування $M_1 = \{(1,3),(2,4),(5,6)\}$.

Парування в двочастковому графі

Нехай є граф $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$

Розглянемо **задачу на незалежну множину вершин.**[3]

Знайти максимальний розмір незалежної множини у графі-шляху S_n.

Відповідь залежить від парності n. Для парних n максимальний розмір незалежної множини дорівнює $n/2$. Наприклад, незалежна множина складається з вершин парних номерів 2,4,...,n. Для непарних n максимальний розмір незалежної множини дорівнює $(n+1)/2$. Незалежна множина такого розміру складається з вершин непарних номерів 1,3,...,n. Потрібно також довести, що незалежних множин більшого розміру в графі-шляху немає. Нехай вершини $i_1 < i_2 < ... < i_k$ утворюють незалежну множину в графі-шляху. За означенням, маємо, що між цими вершинами немає ребра, тобто $i_{j+1} - i_j > 1$. Це означає, що між кожною парою вершин незалежної множини існує хоча б одна. А всього за умовою n вершин у графі-шляху. Тому

$$2k - 1 = k + (k-1) \leq n, \text{що рівносильно } k \leq (n+1)/2$$

Зауваження: Розмір незалежної множини — ціле число.

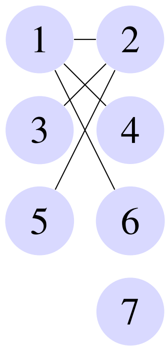
5 Теорема Холла

Теорема Холла

У двочастковому графі G існує таке парування, яке покриває усі вершини долі $V_1(G)$, тоді і тільки тоді, коли для кожної множини $U \subset V_1(G),\ |U| \leq |N_G(U)|$.

Нерівність про розмірність з теореми Холла називатимемо ***умовою Холла*** для долі $V_1(G)$.

Розглянемо приклади на умову Холла.

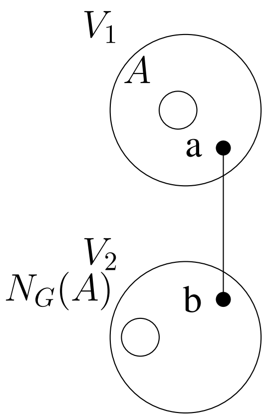


Розглянемо $U = \{1, 3\}$, $N_G(U) = \{2, 4, 6\}$, тобто $|U| \leq |N_G(U)|$, умова Холла виконується.

Якщо $U = \{3, 5\}$, $N_G(U) = \{2\}$, $|U| \nleq |N_G(U)|$, в цьому випадку умова Холла не виконується.

Теорема Холла (1935)

Парування в двочастковому графі, яке покриває усі вершини долі V_1 існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова Холла.



Доведення (за математичною індукцією)[7]

Індукція по $|V_1|$

База індукції $|V_1|= 1$, $|V_2|$ - будь-яка. Зрозуміло, що існує таке парування, адже в нас одна єдина точка в долі V_1 щоб її покрити.

Індукційне припущення Припустимо, що при $|V_1| \leqslant k$ та при будь-якій V_2, якщо виконується умова Холла, то парування існує. Доведемо, що виконується також при $|V_1|= k + 1$

Випадок 1 $\forall A \subsetneq V_1$ (власна підмножина, не співпадає з V_1), $|A|< |N_G(A)|$.

Доведення Розглянемо довільну вершину $a \in V_1$. Візьмемо будь-яку вершину $b \in V_2 : (a, b) \in E(G)$. Видалимо з G вершини a та b. Перевіримо, що для нового графа G' виконується умова Хола. Розглянемо довільну множину A $\subset V_1 \setminus\{a\}$ $\Rightarrow A \neq V_1 \Rightarrow |A|< |N_G(A)|$, $|N_G{'}(A)| \geq |N_G(A)|-1$.

Якщо точка b потрапила в $N_G(A)$, тоді ми маємо відняти цю точку і отримуємо $|N_G{'}(A)|$ > $|N_G(A)|-1$. Інакше, $|N_G(A)|$=$|N_G{'}(A)|$.

$|A| \leqslant |N_G(A)|-1 \leqslant |N_G{'}(A)|$.Що і треба було довести, умова Холла виконується. Отже, в графі G' існує парування, яке покриває усі вершини $V_1 \setminus\{a\}$, а значить і з ребром (a, b) отримуємо парування яке покриває всю долю V_1 графа G.

Випадок 2

$A \subseteq V_1$, $|N_G(A)|= |A|$. G_1 - це підграф, породжений долями A та $N_G(A)$, звісно для цього грфа виконується умова Холла, адже для початкового графа G вона виконується. Розглянемо граф G_2 породжений долями $A' = V_1 \setminus A$ $B' = V_2 \setminus N_G(A)$. Зрозуміло, що і для цього графа нам потрібно перевірити умову Холла, проте чи завжди вона буде виконуватись.

$U \subseteq A'$. Припустимо, що для графа G_2 умова Холла не виконується, адже ми могли видалити сусідів U з $N_G(A)$. Тоді маємо, $|N_{G2}(U)|< |U|$.

$|N_G(A\cup U)|= |N_G(A)|+|N_{G2}(U)|< |A|+|U|= |A\cup U|$. Ми прийшли до суперечності з нашим початковим припущенням, отже умова Холла виконується для графа G_2.$\square$

5.1 Вершинне покриття, теорема Кеніга

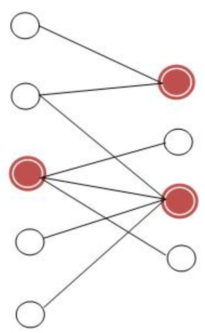
Означення 17.[8]

Вершинне покриття графа $G = (V, E)$ називається така підмножина S множини вершин V, що будь-яке ребро графа G інциндентно хоча б одній вершині з множини S.

Означення 18.[8]

Мінімальне вершинне покриття графа $G = (V, E)$ називається вершинне покриття, яке складається з найменшого числа вершин.

Рис.3 [8]



Множина вершин червоного кольору —мінімальне вершинне покриття

Теорема Кеніга (у формі Холла)

В будь-якому довільному двочастковому графі потужність максимального парування дорівнює потужності мінімального вершинного покриття.

Доведення[7] Виведемо теорему Кеніга з теореми Холла. Непорожній двочастковий граф $G = (V, E)$, $V = A \cup B$. Розглянемо мінімальне вершинне покриття G, $X = X_1 \sqcup X_2$. Побудуємо новий двочастковий граф G' з долями $X, (A \cup B) \setminus X$, очевидно що в новому графі G' у нас не буде ребер з графу G. Перевіримо чи виконується умова Холла для графу G'. Нехай $S \subseteq X$, тоді $S = S_1 \sqcup S_2,\ S_1 \in X_1,\ S_2 \in X_2$. Припустимо, що $|N_{G'}(S_1)| < |S_1|$. Тоді якщо ми замінимо S_1 на $N_{G'}(S_1)$, отримаємо наступне вершинне покриття $(X_1 \setminus S_1) \cup (N_{G'}(S_1)) \cup X_2$. Ми відняли більшу за потужністю множину та додали меншу, маємо ще менше вершинне покриття, а це суперечить початковій умові про мінімальне вершинне покриття. Ми дійшли до суперечності, отже $|N_{G'}(S_1)| \geq |S_1|$, аналогічно $|N_{G'}(S_2)| \geq |S_2|$, а з цього випливає, що $|N_{G'}(S)| \geq |S$. Отже, якщо умова Холла виконується, тоді в G' існує досконале вершинне покриття, яке покриває вершини з множини X. А це і доводить, що потужність максимального парування (в нашому випадку досконале) дорівнює потужності мінімального вершинного покриття. □

Наведемо ще один приклад доведення теореми Кеніга через теорему Холла.[9, ст 45]

Нехай задана прямокутна таблиця, в клітинах якої стоять нулі та одиниці. Лінією в таблиці називатимемо як рядок, так і стовпчик цієї таблиці. Тоді мінімальне число ліній, які містять всі одиниці, дорівнює максимальному числу одиниць, які можна обрати так, щоб серед них не знайшлось двох, які знаходяться на одній і тій самій лінії.

Нехай m — мінімальне число ліній, які містять всі одиниці, а M — максимальне число одиниць, будь-які дві з яких не лежать на одній лінії. Очевидно, що $m \geq M$. Доведемо, що $m \leq M$. Нехай мінімальне покриття m лініями складається з s рядків та r стовпців, де $r + s = m$. Так як перестановка рядків та стовпців не впливає на m та M, можна так переставити рядки і стовпці, щоб лінії покриття були першими s рядками та r стовпцями. Назвемо юнаками перші s рядків таблиці, а дівчат — r стовпців. Юнака і дівчину вважатимемо знайомими, якщо на перетині відповідного рядка та стовпця стоїть одиниця. Умови теореми Холла виконуються завдяки мінімальності числа ліній, інакше можна було б замінити якісь K рядків покриття $K - 1$ стовпчиком і всі одиниці залишаться викреслиними. Тоді, можна одружити юнаків, тобто обрати в кожній з перших s рядків по одиниці так, щоб жодні дві одиниці не лежали в одному стовпці і жодна не лежить в перших r стовпцях. Аналогічно, ми можемо обрати r одиниць, які лежать в різних рядках та не лежать в перших r рядках. Отже, ми довели існування m одиниць, жодні дві з яких не лежать на одній лінії. Тому, $m \leq M$, доведення завершено.□

6 Латинський прямокутник

Означення 19.

Регулярний граф- це граф, всі вершини якого мають однаковий степінь.

Теорема (А.Пуанкаре, 1901р.) [10] В будь-якому непорожньому регулярному дводольному графі $G = (V, U)$ існує досконале парування.

Доведення Нехай степені усіх вершин графа G дорівнюють k. Перевіримо умову Холла. Нехай $A \subset V_1(G)$, тоді з вершин A виходять $k|A|$ ребер до вершин $N_G(A)$, а в кожну вершину $b \in N_G(A)$ входить не більше ніж k ребер з вершин множини A. Звідси маємо, $|A| \leq |N_G(A)|$ та за теоремою Холла існує парування M, яке покриває $V_1(G)$. Проте в регулярному двудольному графі $|V_1(G)| = |V_2(G)|$. Доведемо це твердження від супротивного, нехай граф G регулярний і двудольний, але кількість вершин в долях різна. Припустимо $|V_1(G)| = m$, $|V_2(G)| = n$, $m \neq n$, а степінь кожної вершинки дорівнює k. Ми знаємо, що сума степеней вершин в двудольному графі однакова, так як ребро інцинденте рівно двом вершинам з різних долей. Сума степеней вершин $V_1(G) = mk$, а сума степеней вершин $V_2(G) = nk$. Тоді так як $m \neq n$, $mk \neq nk$, а це неможливо за властивістю суми степенів вершин у дводольному графі. Отже, ми переконались, що в регулярному графі $|V_1(G)| = |V_2(G)|$, тоді парування M покриває як і множину вершин $V_1(G)$ так і $V_2(G)$. $\square$

Прямокутник $m \times n$, $m \leq n$ називається латинським прямокутником, якщо він заповнений натуральними числами від 1 до n так, що в кожному рядку і в кожному стовпчику стоять різні числа. Доведіть, що латинський прямокутник можна доповнити до латинського квадрата $n \times n$.

Наприклад,

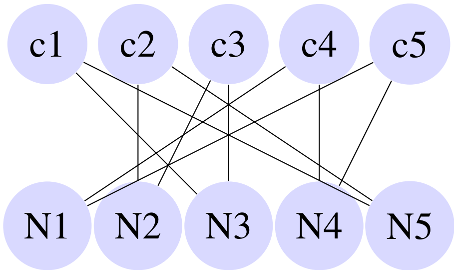
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3×5

$r < n$. Будь-який $r{\times}n$ латинський прямокутник може бути розширений до $n{\times}n$ латинського квадрата.

Розглянемо дводольний граф G, $U = c_1, ..., c_n$ (стовпчики), $V = N_1, .., N_n$ (числа).
З'єднуємо вершини c_i та N_j ребром, якщо у відповідній колонці c_i немає відповідного числа N_j.

Матимемо наступний граф.



Потрібно перевірити чи є наш граф регулярним. Степінь будь-якої вершини з долі U буде $n - r$. З іншого боку будь-яке число з долі V зустрічається в r рядках латинського прямокутника r разів, значить воно зустрічається також і в r стовпчиках та відсутнє у $n - r$. З цього випливає що степінь будь-якої вершини з долі V дорівнює $n - r$. Отже, граф регулярний та розпадається на досконалі парування. Досконале парування полягає у тому,щоб додати у колонку числа, якого не було, додати $n - r$ рядків.

Досконале парування задає рядок, який потрібно додати $\{13, 25, 32, 41, 54\}$ та $\{15, 22, 33, 44, 51\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Теорема Менгера

Означення 20. [12]

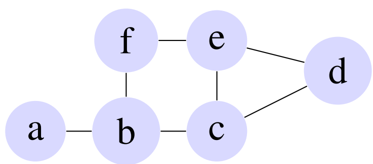
Зв'язний граф - це граф будь-яка пара вершин якого досяжна один до одного.

Означення 21. [12]

Вершинною зв'язністю $\kappa(G)$ називається мінімальна кількість вершин $|S|$, $S\subset V(G)$, яку потрібно видалити, щоб граф $G - S$ став незв'язним або мав єдину вершину.

Означення 22. [12]

Підмножина $S \subset V(G)$ ***називається вершинно роздільною множиною або вершинним розрізом графа, якшо при видаленні вершин з множини*** S ***граф*** $G - S$ ***стає незв'язним.***



Маємо множину $S = (e, c, b)$, яка розділяє вершини f, d, тобто вони потрапляють до різних компонент зв'язності.

Але нас цікавить саме мінімальна кількість вершин, яку потрібно видалити, щоб отримати $f - d$ роздільну множину. В нашому випадку це буде множина $S = e, c$.

Теорема Менгера (вершинна форма) (1927)[12]

Найменша кількість вершин, що розділяють дві несуміжні вершини s та t (тобто після видалення цих вершин s і t опиняються в різних компонентах зв'язності, дорівнює найбільшій кількості простих $s-t$ ланцюгів, що попарно не перетинаються.(internally disjoint paths)

Такі ланцюги мають різні "внутрішні"вершини, усі окрім початкової та кінцевої.

Наприклад в нашому графі це будуть такі шляхи $A = f, e, d$, $B = f, b, c, d$.

8 Задачі

Приклади задач на застосування леми Холла та теореми Кеніга

Задача 1

В кожному рядку та кожному стовпчику шахівниці стоять по дві тури. Доведіть, що можна обрати 8 тур так, що вони не битимуть одна одну.

Розв'язання

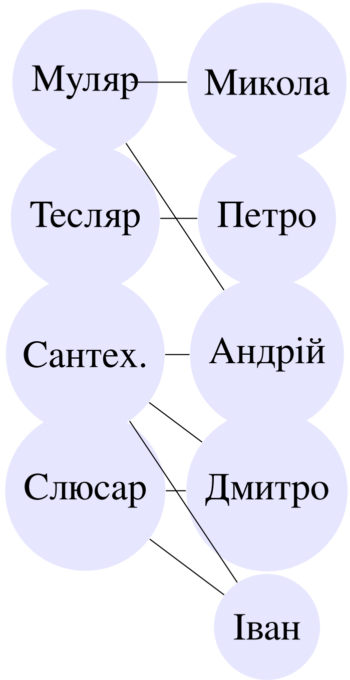
Розглянемо двочастковий граф, де одна підмножина (стовпці) відповідатиме за юнаків, а інша (рядки) за дівчат. Щоб обрати 8 тур, які не б'ють одна одну, за аналогією, нам потрібно одружити 8 юнаків та дівчат. Доведемо від супротивного. Нехай k юнаків знайомі менше ніж з k дівчатами, $n \leq k$. Тоді множина юнаків буде мати $2k$ ребер (т.як в кожному стовпці стоїть 2 тури, а всього їх k), при цьому юнаки знайомі лише з n дівчатами. А множина дівчат містить $2n$ ребер, які зєднуються з всіма юнаками. За умовою леми Холла має виконуватись така рівність $2n \geq 2k$. Але за умовою задачі ми зазначили, що $n \leq k$, тоді $2n \leq 2k$. Отримали суперечність, тоді юнаки мають бути знайомі не менше ніж з k дівчатами. Отже, ми можемо обрати 8 тур, так щоб вони не били одна одну.

Задача 2

Будівельний підрядник шукає муляра, тесляра, сантехніка і слюсаря і отримує п'ять претендентів: одного — на посаду муляра, одного — на тесляра, одного — на муляра і сантехніка, двох- на сантехніка і слюсара.

Розв'язання

Маємо наступний двочастковий граф G: V_1 — посади, V_2 — кандидати



Всі посади будуть зайняті кандидатами так як $|V_1| \leq |V_2|$, а це означає, що існує парування, яке покриває усі вершини долі V_1. А значить умова леми Холла виконується.

Задача 3

Компанія юнаків та дівчат складається з n осіб. Виявилось, що не можна зробити $n+1$ одружень. Доведіть, що можна обрати n людей так, що з будь-якої пари знайомих один обраний.

Розв'язання

Моделлючи умову задачі на мову графів, маємо, що мінімальне вершинне покриття двочасткового графа дорівнює n. За теоремою Кеніга маємо, що мінімальне вершинне покриття дорівнює максимальному паруванню в двочастковому графі, тобто в нашому випадку n. Отже, і максимальне вершинне покриття графа дорівнює n, так як нам потрібно n осіб обирати, що і потрібно було довести.

9 Висновки

В розділі 2 моєї курсової роботи описані основні терміни теорії графів (суміжність, інцидентність, степінь вершини ітд.). В розділі 3 наведено означення двочасткового графа, критерій дводольності, хроматичного числа, також представлені задачі на застосування двочасткових графів. В розділі 4 наведено означення парування, максимально незалежної множини та алгоритм її знаходження. В розділі 5 описані важливі теореми, а саме: теорема Холла та приклад теореми Кеніга через теорему Холла. В розділі 6 представлена класична задача про доповнення латинського прямокутника до квадрата. В розділі 7 сформульована теорема Менгера. В останньому розділі крусової роботи досліджені приклади на теорему Холла.

Теорема Холла має своє продовження, а саме узагальненням задачі про весілля є симетрична задача про весілля. В якій досліджується особливий випадок парування максимального зваженого двочасткового графа.[13]

10 Список використаної літератури

1. ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко.

2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Двочастковий_граф

3. А. Шень и др. Лекции по дискретной математике(ст.40)

4. Теория графов Д. В. Карпов

5. https://algorithmica.org/ru/matching

6. А. Ю. Эвнин, Вокруг теоремы Холла (окончание), Матем. обр., 2005, выпуск 4(35), 2–16 (ст. 2-4)

7. https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov

8. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Связь_максимального_паросочетания_и_мини

9. КВАНТ Научно-популярный физико-математический журнал(ст. 45, Задачи и теоремы о представителях А. Романов)

10. А. Ю. Эвнин, Дополнения до полных латинских квадратов, Матем. обр., 2012, выпуск 2(62), 71–75

11. http://www.math.toronto.edu/gscott/MAT332notes_latinsquares.pdf

12. Дистель Р. Теория графов

13.https://arxiv.org/pdf/1907.05870.pdf