Презентація курсової роботи на тему "Парно-знакові графи" студентки 3 курсу спеціальності "Прикладна математика" Гунази Анни

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Козеренко С.О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

Основні терміни

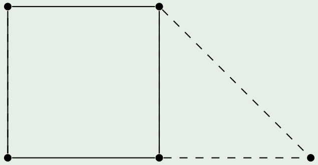
Означення

Знаковий граф – це пара $S = (G, \sigma)$, де

$$G \text{ – граф,}$$
$$\sigma : E(G) \to \{+, -\}$$

Ребра зі знаком $+(-)$ називають *позитивними (негативними)* ребрами графа S.

Приклад



Основні терміни

Розглянемо бієкцію $f : V(G) \to \{1, 2, ..., n\}$, яка індукує $\sigma_f : E(G) \to \ \{+, -\}$ наступним чином:

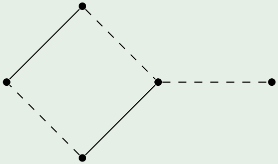
$$\sigma_f(uv) = \begin{cases} + & \text{, якщо } f(u) \text{ та } f(v) \text{ однакової парності,} \\ - & \text{, якщо } f(u) \text{ та } f(v) \text{ різної парності.} \end{cases}$$

Означення

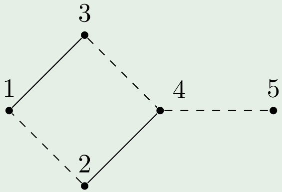
Знаковий граф $S = (G, \sigma)$ називається *парно-знаковим графом*, якщо існує така бієкція f, що $\sigma = \sigma_f$.

Надалі парно-знакові графи можуть називатися PSG, з англійської - parity signed graphs.

Приклад



(a) Знаковий граф G



(б) Парно-знаковий граф над G

$\longrightarrow$

Збалансованість і характеризація PSG

Означення

Якщо добуток знаків будь-якого циклу графа S додатний, то S називають *збалансованим знаковим графом*.

Теорема

Будь-який парно-знаковий граф є збалансованим.

Збалансованість і характеризація PSG

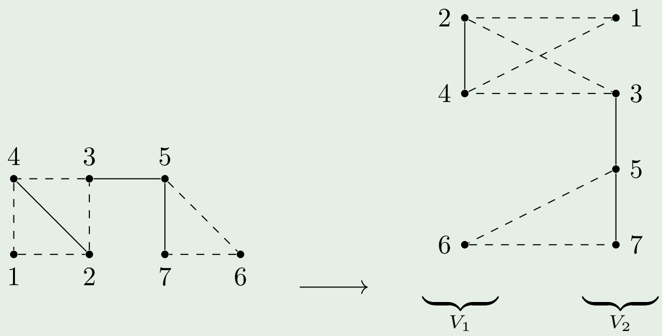
Теорема

Нехай S - зв'язний знаковий граф. Тоді S є збалансованим тоді і тільки тоді, коли множину вершин графа $V(S)$ можна розділити на дві підмножини V_1 і V_2 так, щоб ребра $uv \in E(V_1, V_2)$ були негативними і лише вони.

Теорема

Нехай S - зв'язний знаковий граф. Тоді S є парно-знаковим графом тоді і тільки тоді, коли $V(S)$ можна розділити на дві підмножини V_1 і V_2 так, щоб ребра $uv \in E(V_1, V_2)$ були негативними і лише вони, а також щоб $||V_1| - |V_2|| \leq 1$.

Приклад (Розбиття Харарі)



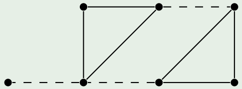
Алгоритм перевірки, чи є знаковий граф PSG

1. Перевірити, чи S є збалансованим. Якщо ні, то S не є PSG.
2. Стягнути кожну позитивну компоненту в точку і помітити її числом вершин, які були в компоненті.
3. Кожна непомічена вершина отримує номер 1.
4. Отриманий граф є негативно-однорідним та збалансованим, а тому і двочастковим. Знайти двочасткове розбиття і просумувати мітки в кожній частці. Якщо суми відрізняються більш, ніж на 1, то S не є PSG. Інакше - PSG.

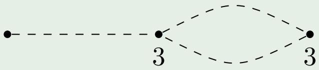
Алгоритм перевірки, чи є знаковий граф PSG

Приклад

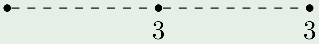
Покажемо як діє алгоритм на даному графі G:



1. Усі цикли графа є додатніми, тому G є збалансованим.
2. Стягуємо позитивні компоненти та проставляємо мітки на вершинах.



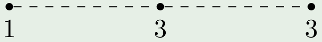
Оскільки наявність подвійних ребер не впливає на двочасткове розбиття, то приберемо їх та отримаємо:



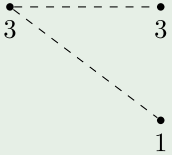
Алгоритм перевірки, чи є знаковий граф PSG

Приклад

3. Маркуємо одиницею непомічену вершину:



4. Знаходимо двочасткове розбиття і сумуємо мітки в кожній частці:



У результаті маємо, що у першій частці три вершини, у другій – чотири, тобто $|3-4| \leq 1$, а отже граф S є PSG.

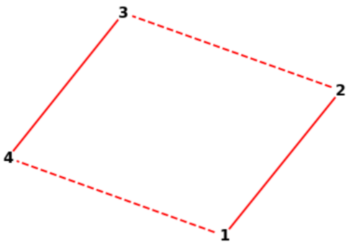
Програмна реалізація алгоритму на мові Python

Приклад

Перевірити, чи знаковий граф G_1 є PSG.

In [7]:
```
G1 = nx.Graph()
edges1 = [(1, 2, {"label": "+"}),
          (2, 3, {"label": "-"}),
          (3, 4, {"label": "+"}),
          (4, 1, {"label": "-"})]
G1.add_edges_from(edges1)

if is_parity_signed_graph(G1):
    print("G1 is a PSG")
else: print("G1 is not a PSG!")
```




```
G1 is a PSG
```

Число ‘rna’

Означення

Для графа G число ‘rna’ – це найменша кількість негативних ребер $E^{-}(S_f)$ серед всіх можливих знакових графів S_f над G, утворених біекцією $f : V(G) \to \{1, ..., n\}$. Позначається $\sigma^{-}(G)$.

Наслідок

Для будь-якого натурального числа k існує парно-знаковий граф S, такий що $\sigma^{-}(S) = k$.

Теорема

Нехай G – зв'язний граф. Тоді $\sigma^{-}(G) = 1$ тоді і тільки тоді, коли G має міст, який з'єднує два підграфи, потужність яких відрізняється не більше, ніж на 1.

Нехай T – дерево. Для будь-якої вершини x дерева T розглянемо компоненти зв’язності $T \backslash \{x\}$.

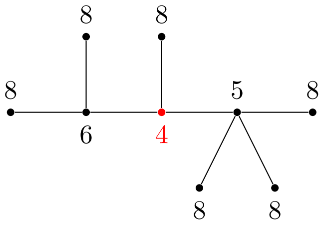
Означення

Вагою $w(x)$ вершини x називають потужність максимальної такої компоненти. Множина вершин x із найменшою вагою називається *центроїдом* дерева.

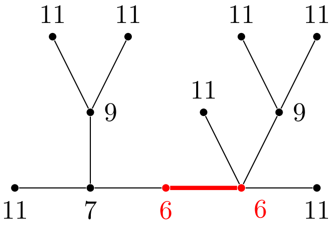
Наслідок

Центроїд дерева є вершиною або ребром.

Верхня оцінка на ‘rna’ для дерев



(а) Дерево з центроїдом-вершиною



(б) Дерево з центроїдом-ребром

Рис.: Приклади дерев з позначеною вагою вершин

Верхня оцінка на ‘rna’ для дерев

Наслідок

Нехай T *– дерево із 1-точковим центроїдом* $\{u\}$. *Тоді*

$$\sigma^{-}(T) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - w(u) + 1.$$

Література

- Mukti Acharya, Joseph Varghese Kureethara, *Parity labeling in signed graphs*, https://arxiv.org/pdf/2012.07737, (2020), 10.
- Mukti Acharya, Joseph Varghese Kureethara, Thomas Zaslavsky, *Characterizations of Some Parity Signed Graphs*, Australasian journal of combinatorics Volume 81(1), (2021), 89–100.
- F. Harary: On the Notion of Balance of a Signed Graph, The Michigan Math. J., 2(1953), 143–146.
- F. Harary, J.A. Kabell, *A simple algorithm to detect balance in signed graphs*, Mathematrcal Socrul Soences, (1980), 1-6.
- Ligang Jin, Xiaoyue Chen, Yingli Kang, *A study on parity signed graphs: the rna number*, https://arxiv.org/abs/2111.04956, (2021), 1-5.