

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр
на тему: **«Індекс злічених графів Костера»**

Виконав: студент 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Забродський Владислав Євгенович

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

«_____» _____ 20__ р.

Київ - 2023

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук

_____ Чорней Р.К.
(підпис)

“ _____ ” _____ 2023

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи

студенту 4-го курсу, факультету інформатики

Забродському Владиславу Євгеновичу

Тема: «Індекс злічених графів Костера»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація

1. Вступ

2. Основні теоретичні відомості

3. Індокси злічених графів Костера

4. Класифікація злічених графів Костера за індексом

Висновки

Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2023 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2023р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	02.10.2022			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.10.2022			
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.11.2022			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	17.02.2023			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	15.03.2023			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	18.04.2023			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	12.05.2023			

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

Зміст

1	Анотація	4
2	Вступ	5
3	Основні теоретичні відомості	6
3.1	Основні означення і твердження	6
3.2	Невід’ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса	8
3.3	Графи Динкіна–Костера	8
3.4	Висновок	9
4	Індекси злічених графів Костера	10
4.1	Операції на злічених графах Костера	10
4.2	Індекси графів, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга[8]	11
4.3	Формули Швенка для зважених графів	12
4.4	Висновки	13
5	Класифікація злічених графів Костера за індексом	14
5.1	Приклади	14
5.2	Теореми	22
5.3	Висновки	25
6	Висновки	26
7	Список літератури	27

1 Анотація

Метою цієї кваліфікаційної роботи є класифікація декількох графів Костера відносно індексу $\frac{3}{\sqrt{2}}$

У роботі були класифіковані графи типу $H_{1k\infty}$, $T_{1k\infty}$ та граф $T_{lk\infty}$ відносно індексу $\frac{3}{\sqrt{2}}$

2 Вступ

Спектральна теорія графів — важливий розділ математики, який вивчає властивості графів за допомогою теорії матриць і спектральних методів. Історія спектральної теорії графів сягає середини 20 століття, коли хімік Гастон Костер вперше використав спектральні властивості графів для дослідження різних хімічних сполук. Відтоді спектральну теорію графів застосовують у різних галузях, таких як теорія зв'язку, фізика тощо.

У сучасному світі, де графи моделюють взаємодію між різними типами об'єктів, аналіз їх спектральних властивостей стає актуальним завданням. Однією з ключових метрик у спектральній теорії графів є власні значення матриці суміжності графа, яка має багато застосувань у різних областях. Зокрема, індекс обчисленого графа Костера вивчає властивості графа, класифікуючи їх відповідно до відношення найбільшого власного значення матриці до значення $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Це значення є особливо важливим, оскільки воно стосується межі Костера. Метою даної дипломної роботи є класифікація декількох типів графів згідно їх індексів злічених графів Костера.

Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

- Аналіз літератури зі спектральної теорії графів і графів Костера
- Дослідження методів знаходження індексів графів Костера
- Знаходження індексів деяких типів графів Костера

Робота складається з трьох розділів

Перший розділ присвячено висвітленню основних теоретичних відомостей. Наведено основні означення теорії графів

Другий розділ присвячено висвітленню основного інструментарію використаного при дослідженні індекс злічених графів Костера

Третій розділ присвячений класифікації деяких злічених графів Костера відносно індексу $\frac{3}{\sqrt{2}}$

3 Основні теоретичні відомості

3.1 Основні означення і твердження

Означення 3.1. Граф $G = (V, E)$ - це пара множин, які задовольняють $E \subseteq V^2$, де V - вершини, а E - ребра [1]

Означення 3.2. Дві вершини v і w графа G є суміжними, якщо їх з'єднує ребро vw . [2]

Означення 3.3. Дві вершини ребра vw є інцидентними. [2]

Означення 3.4. Степінь вершини v графа G є кількістю ребер, інцидентних v , і записується $deg(v)$ [2]

Означення 3.5. Вершина степені 1 називається висячою. [2]

Означення 3.6. Вершина степені 0 називається ізольованою. [2]

Означення 3.7. Для графа $G = (V, E)$, порядок графа позначається $|V|$ і визначається як кількість вершин у графі. Іншими словами, це кількість елементів у вершинній множині V . [2]

Означення 3.8. Підграфом графа G називається граф, кожна вершина якого належить $V(G)$ і кожна з ребер якого належить $E(G)$. [2] Тоді через операції над графами

Означення 3.9. Граф Костера G -це сукупність (G, f) , де G – граф, f – відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел ≥ 3 , та символа ∞ . Граф G підпорядкований графу Костера $G = (G, f)$.

Граф Костера позначається як : підпорядкований граф з позначкою $f(e)$ над кожним ребром e . Число 3 над ребрами не пишеться і такі ребра є непозначеними. Інші - позначені. [3]

Означення 3.10. Нехай $G = (G, f)$ - граф Костера. Граф $G1 = (G1, f1)$ називається підграфом графа G , якщо $G1$ підграф G , і для всякого ребра e графа $G1$: $f1(e) \leq f(e)$. Позначається як $G1 \subset G$. [3]

Означення 3.11. Матриця суміжності має вигляд $A(G) = (a_{ij})_i^n, j = 1$, де n - порядок графа G .

$$a_{ij} = 2\cos\left(\frac{\pi}{k}\right), f(i, j) = k$$

$$a_{ij} = 2, f(i, j) = \infty$$

$$a_{ij} = 0 \text{ якщо вершини не з'єднані ребром [3]}$$

Матриця суміжності $A(G)$ симетрична, дійсна та містить нулі на головній діагоналі.

Матриця суміжності залежить від порядку, в якому розглядаємо вершини. Якщо граф G скінченний, $|V| < \infty$, то $A(G)$ буде квадратною матрицею порядку $|V|$. [3]

Означення 3.12. Спектр графа G з матрицею суміжності A — це набір власних значень A , що позначається $Spec(G)$ (або $\sigma(G)$) [4]

Означення 3.13. Індексом графу G називають найбільше власне значення λ матриці суміжності A графа G [4]

Означення 3.14. Характеристичним многочленом матриці G називають $\det|\lambda I - A(G)|$ [4]

Означення 3.15. Зліченим графом Костера називають граф зі зліченною множиною вершин. Для зручності записів позначимо через $Fin(\Gamma)$ множину всіх скінченних підграфів графа Γ .

Означення 3.16. Спектром зліченого графу G називають об'єднання спектрів його скінченних підграфів [5] $Fin(\Gamma)$

Означення 3.17. Індексом зліченого графу G Костера називають максимальне значення зі спектру графа G

3.2 Невід'ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса

Означення 3.18. Матриця A називається невід'ємною, якщо всі її елементи є невід'ємними числами.[6] Позначатимемо $A \geq 0$

Означення 3.19. Матриця A називається додатною, якщо всі її елементи є додатними числами.[6] Позначатимемо $A > 0$

Аналогічно, невід'ємний та додатний вектори – це вектори з невід'ємними координатами та додатними координатами відповідно. $x \geq 0$ невід'ємний вектор x та $x > 0$ – додатний.

Означення 3.20. Матриця називається розкладною якщо перестановкою рядів вона може бути приведена до вигляду $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, де B і D -квадратні матриці. В іншому випадку матриця A називається нерозкладною[6].

Теорема 3.1. Нехай A є дійсною квадратною матрицею розмірності $n \times n$ з позитивними компонентами. Тоді найбільше власне значення r матриці A є простим та відповідає позитивному власному вектору x , тобто всі компоненти вектора x є позитивними.[7]

Теорема 3.2. Нехай G є неорієнтованим зв'язним графом з матрицею суміжності A . Тоді найбільше власне значення λ_1 матриці A є простим та відповідає невід'ємному власному вектору x , такому що всі компоненти вектора x є позитивними.[7]

3.3 Графи Динкіна–Костера

На рис 2.1 зображені графи, які називаються графами Динкіна–Костера Для кожного з цих графів індекс в позначеннях дорівнює кількості вершин графа.

$$A_n \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$$

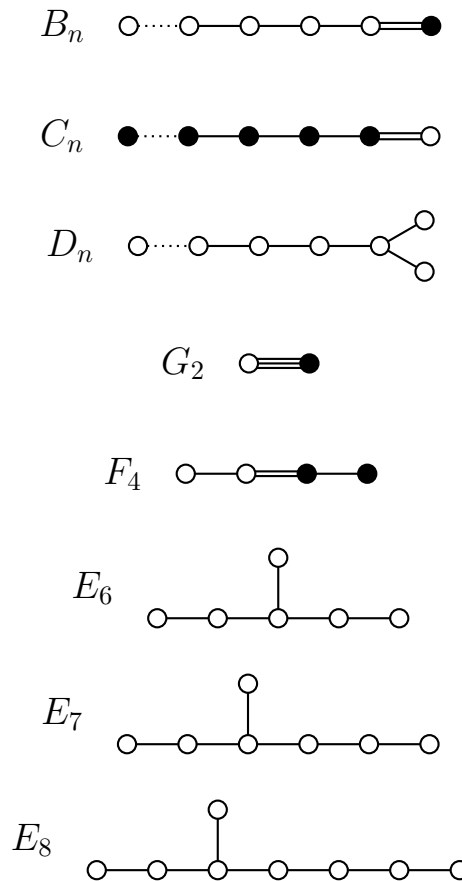


Рис. 2.1. Графи Динкіна–Костера A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , B_n , F_4 , G_2 , H_3 , H_4 , $I_2(p)$.

Формула визначника матриці суміжності $G = (G, w)$. Формула визначника матриці суміжності $G = (V, E)$ графу G з вагами w може бути виражена наступним чином: $\det(G) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n w_{i\sigma(i)}$, де S_n - симетрична група порядку n , $\text{sgn}(\sigma)$ - знак перестановки σ , w_{ij} - вага ребра між вершинами i та j . [4]

3.4 Висновок

В цьому розділі були представлені основні означення та твердження, які є основою для подальшого розгляду. Була розглянута теорема Фробеніуса, яка має важливе значення в дослідженні невід'ємних, нерозкладних матриць. Також були розглянуті графи Динкіна-Костера, їх властивості.

4 Індеси злічених графів Костера

4.1 Операції на злічених графах Костера

а) Видалення вершини.

Зафіксуємо вершину x графа Γ . Так як $\text{Fin}(\Gamma - x) \subset \text{Fin}(\Gamma)$, то

$$\text{ind}(\Gamma - x) = \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma - x)} \text{ind} G \leq \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma)} \text{ind} G = \text{ind} \Gamma.$$

б) Видалення ребра. Зафіксуємо ребро $e = \{u, v\}$ графа Γ . Так як $\text{Fin}(\Gamma - e) \subset \text{Fin}(\Gamma)$, то

$$\text{ind}(\Gamma - e) = \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma - e)} \text{ind} G \leq \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma)} \text{ind} G = \text{ind} \Gamma.$$

в) Зменшення мітки на ребрі. Зафіксуємо ребро $e = \{u, v\}$ графа Γ , позначимо граф, одержаний з графа Γ зменшенням мітки на ребрі e через Γ_1 . Так як $\text{Fin}(\Gamma_1) \subset \text{Fin}(\Gamma)$, то

$$\text{ind}(\Gamma_1) = \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma_1)} \text{ind} G \leq \sup_{G \in \text{Fin}(\Gamma)} \text{ind} G = \text{ind} \Gamma.$$

Теорема 4.1. *При видаленні вершини або ребра, зменшенні мітки індекс графа Костера G не збільшується.*

Твердження 4.2. *Індекс зліченного графа дорівнює супремуму індексів його компонент зв'язності*

Твердження 4.3. *Нехай G_1, G_2 — злічені графи Костера та $G_1 \subseteq G_2$. Тоді $\text{ind} G_1 \leq \text{ind} G_2$.*

Твердження 4.4. *G — злічений зв'язний граф. При видаленні вершини, ребра або зменшенні мітки графа G індекс графа G не збільшується.*

Твердження 4.5. Індекс зліченного графа дорівнює супремуму індексів його компонент зв'язності.

Твердження 4.6. Нехай G – злічений граф, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

$$1. G_n \subset G_{n+1} \forall n \in \mathbb{N};$$

$$2. Sn \in NG_n = G.$$

Тоді $indG = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$. [8]

Твердження 4.7. Нехай Γ^1, Γ^2 – злічені графи, $\{\Gamma_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \{\Gamma_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовності скінченних підграфів Γ^1 і Γ^2 відповідно. Припустимо, що ці послідовності задовольняють умови:

а) графи Γ_n^1 та Γ_n^2 ізоморфні при кожному $n \in \mathbb{N}$;

б) для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце включення $\Gamma_n^1 \subset \Gamma_{n+1}^1, \Gamma_n^2 \subset \Gamma_{n+1}^2$;

$$в) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n^1 = \Gamma^1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n^2 = \Gamma^2.$$

Тоді $ind\Gamma^1 = ind\Gamma^2$. [8]

4.2 Індеси графів, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга[8]

Такі графи складаються зі скінченного графа G , нескінченного ланцюга та ребра $\{x, y\}$, що їх з'єднує. (рис. 4.2.1)



Рис. 4.2.1

Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар (G, x) .

Теорема 4.8. Нехай злічений граф Костера (G, x) складається зі скінченного графа G та нескінченного ланцюга. Тоді:

1. Якщо $(G, x) \in \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $\text{ind}(G, x) = 2$.
2. Якщо $(G, x) \notin \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $\text{ind}(G, x) > 2$ та є максимальним коренем рівняння

$$\frac{P_{G-x}(\lambda)}{P_G(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Твердження 4.9. Нехай G – скінченний граф, x – його вершина. Тоді $\frac{P_{G-x}(\lambda)}{P_G(\lambda)}$ монотонно спадає при $\lambda > \text{ind}G$.

4.3 Формули Швенка для зважених графів

Теорема 4.10. Нехай v — вершина графа G , через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v . Тоді

$$P_G(x) = xP_{G-v}(x) - \sum_{u \sim v} w_{uv}^2 P_{G-v-u}(x) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{G-V(Z)}(x). [8]$$

Наслідок 4.10.1. (Розклад за висячою вершиною) Якщо v — вершина графа G та u — вершина суміжна з v , то

$$P_G(x) = xP_{G-v}(x) - w_{uv}^2 P_{G-v-u}(x). [8]$$

Теорема 4.11. Нехай uv — ребро графа G , через $C(uv)$ позначимо множину циклів, що містять uv . Тоді

$$P_G(x) = P_{G-uv}(x) - w(uv)^2 P_{G-v-u}(x) - 2 \sum_{Z \in C(uv)} w(Z) P_{G-V(Z)}(x). [8]$$

Наслідок 4.11.1. (Розклад за мостом). Нехай ребро $e = (v_1, v_2)$ — міст графа G , який при видаленні ребра e розпадається на графи G_1 та G_2 , при цьому вважаємо, що $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Характеристичний многочлен графа G можна знайти за формулою:

$$P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x) - w(e)^2 P_{G_1-v_1}(x)P_{G_2-v_2}(x). [8]$$

4.4 Висновки

У даному розділі було розглянуто операції на злічених графах Костера, що є важливими для їх подальшого аналізу. Були представлені індекси графів, які складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга, що відіграють значну роль у вивченні структури таких графів. Були представлені узагальнені формули Швенка для зважених графів, які дозволяють враховувати вагу ребер при аналізі графів Костера.

5 Класифікація зліченних графів Костера за індексом

5.1 Приклади

Твердження 5.1.

$$\lambda P_{\mathbf{D}^4_k} = \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^k - 2\mu^{k-2} + 2\frac{1}{\mu^{k-2}} - \frac{1}{\mu^k} \right)$$

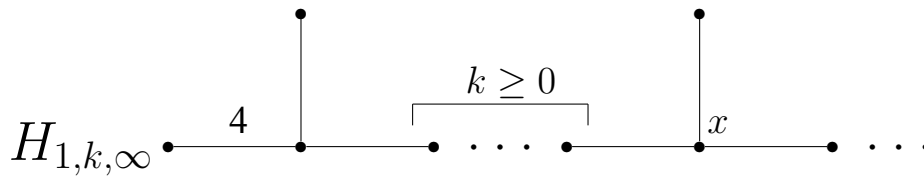
Доведення.

$$\lambda P_{\mathbf{D}^4_k} = \lambda P_{\mathbf{G}-x} - 4\cos^2\frac{\pi}{4}P_{\mathbf{G}-x-y} = \lambda P_{\mathbf{k}-1} - 2\lambda P_{\mathbf{k}-3} = \lambda(P_{\mathbf{k}-1} - 2P_{\mathbf{k}-3}) =$$

$$= \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\frac{\mu^k - \frac{1}{\mu^k}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \right) - 2\frac{\mu^{k-2} - \frac{1}{\mu^{k-2}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^k - 2\mu^{k-2} + 2\frac{1}{\mu^{k-2}} - \frac{1}{\mu^k} \right)$$

□

Означення 5.1.



Покладемо граф P_G рівним $P_{\mathbf{D}^4_{k+5}}$ І граф $P_{\mathbf{G}-x}$ рівним $\lambda P_{\mathbf{D}^4_{k+3}}$

Маємо Наступні співвідношення :

$$P_{\mathbf{G}-x} = \lambda P_{\mathbf{D}^4_{k+3}} = \lambda \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{k+3} - 2\mu^{k+1} + \frac{2}{\mu^{k+1}} - \frac{1}{\mu^{k+3}} \right)$$

$$P_{\mathbf{G}} = P_{\mathbf{D}^4_{k+5}} = \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \left(\mu^{k+5} - 2\mu^{k+3} + \frac{2}{\mu^{k+3}} - \frac{1}{\mu^{k+5}} \right)$$

Поділимо і прирівняємо до μ . Після деяких перетворень рівняння набуває вигляду :

$$\mu^{k+4}-2\mu^{k+2}+\frac{2}{\mu^k}-\frac{1}{\mu^{k+2}}+\mu^{k+2}-2\mu^k+\frac{2}{\mu^k+2}-\frac{1}{\mu^{k+4}}=\mu^{k+6}-2\mu^{k+4}+\frac{2}{\mu^{k+2}}-\frac{1}{\mu^{k+4}}$$

$$\mu^{k+6} - 3\mu^{k+4} + \mu^{k+2} + 2\mu^k - \frac{2}{\mu^k} + \frac{1}{\mu^{k+2}} = 0$$

$$Q_k(\mu) = \mu^{2k+8} - 3\mu^{2k+6} + \mu^{2k+4} + 2\mu^{2k+2} - 2\mu^2 + 1$$

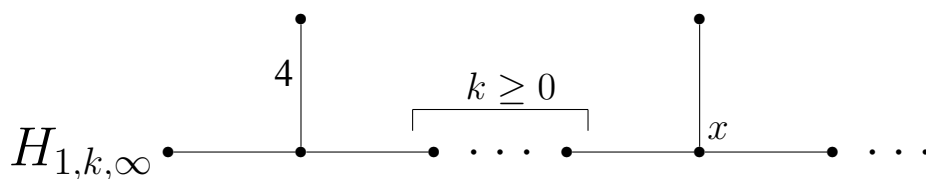
При підстановці $\mu = \sqrt{2}$ одержимо:

$$Q_k(\sqrt{2}) = -2k^{k+3} + 2^{k+3} - 4 + 1 = -3$$

Це від’ємне значення, а отже, максимальний корінь цього рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$. Відповідно $\lambda_{H_{1,k},\infty} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

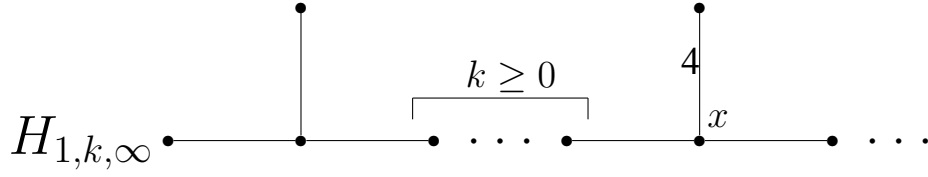
$$Q_k \uparrow, \rightarrow \mu > \sqrt{2}, \rightarrow indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Означення 5.2.



аналогічно до 4.2

Означення 5.3.



Маємо наступні співвідношення

$$P_{\mathbf{G}-x} = \lambda P_{\mathbf{D}_{k+3}} = \lambda^2 (P_{k+2} - P_k)$$

$$P_{\mathbf{G}} = P_{\mathbf{D}_{k+5}} = \lambda (P_{k+4} - P_{k+2})$$

поділивши отримуємо

$$\frac{\lambda(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}})}{\lambda\left(\mu^{k+3} + \frac{1}{\mu^{k+3}}\right) - 2\left(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}\right)} = \mu$$

після перетворень отримаємо рівносильне рівняння:

$$\begin{aligned} \lambda\left(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}\right) &= \lambda\mu\left(\mu^{k+2} + \frac{1}{\mu^{k+2}}\right) - 2\mu^{k+3} - 2\frac{1}{\mu^{k+1}} \\ \mu^{k+4} - 3\mu^{k+3} + \mu^{k+2} - \mu^{k+1} - 3\frac{1}{\mu^{k+1}} + \frac{1}{\mu^{k+2}} - \frac{1}{\mu^{k+3}} &= 0 \end{aligned}$$

домножаємо на $\frac{1}{\mu^{k+3}}$

$$\mu^{2k+7} - 3\mu^{2k+6} + \mu^{2k+5} - \mu^{2k+4} - 3\mu^2 + \mu - 1 = 0$$

$$\mu^{2k}(\mu^7 - 3\mu^6 + \mu^5 - \mu^4) - 3\mu^2 + \mu - 1 = 0$$

При підстановці $\mu = \sqrt{2}$ одержимо:

$$Q_k(\sqrt{2}) = (3 * \sqrt{2} - 7) * 2^{k+2} - 7 + \sqrt{2}$$

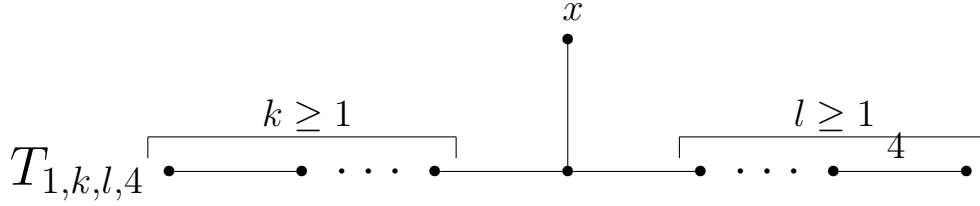
Це від'ємне значення, а отже, максимальний корінь цього рівняння буде біль-

шим за $\mu = \sqrt{2}$. Відповідно $\lambda_{H_{1,k,\infty}} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$Q_k(\sqrt{2}) < 0$$

$$Q \uparrow, \rightarrow \mu > \sqrt{2}, \rightarrow indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Означення 5.4.



Покладмео граф P_{G-x} рівним $\lambda P_{k+l+2} - P_{k+1}P_l$ і граф P_G рівний $\lambda P_{k+l+3,4} - P_{l+1,4}P_{k+1}$

Маємо наступні співвідношення :

$$P_{G-x} = \lambda P_{k+l+2} - P_{k+1}P_l$$

$$P_G = \lambda P_{k+l+3,4} - P_{l+1,4}P_{k+1}$$

Поділивши отримуємо :

$$\frac{\lambda \frac{\mu^{k+l+3} - \frac{1}{\mu^{k+l+3}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - \frac{\left(\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}}\right)\left(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{l+1}}\right)}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2}}{\lambda \left(\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}}\right) - \left(\mu + \frac{1}{\mu^{l+1}}\right) \frac{\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}}}{\mu - \frac{1}{\mu}}} = \mu$$

$$\frac{\left(\mu^2 - \frac{1}{\mu^2}\right) \left(\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}}\right) - \left(\mu^{k+l+3} - \mu^{k-l-1} - \mu^{l-k-1} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}}\right)}{\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) \left(\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}}\right) - \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) \left(\mu^{l+1} + \frac{1}{\mu^{l+1}}\right) \left(\mu^{k+2} - \frac{1}{\mu^{k+2}}\right)} = \mu$$

Знаменник:

$$\mu^{k+l+6} - 2\mu^{k+l+4} + \mu^{k+l} + \mu^{k-l} + \mu^{l-k} - \mu^{k-l+2} + \frac{1}{\mu^{k+l+6}} - 2\frac{1}{\mu^{k+l+4}} + \frac{1}{\mu^{k+l}} - \mu^{l-k-2}$$

$$Q(\mu) = 2\mu^{-5-k-l} - \mu^{-3-k-l} + \mu^{1-k-l} - \mu^{3+k-l} - 2\mu^{l-k-1} + \mu^{l+1-k} + 2\mu^{1+k+l} - 3\mu^{5+k+l} + \mu^{7+k+l} - \mu^{9+k+l}$$

Після деяких перетворень отримуємо рівносильне рівняння

$$Q(\mu) = \mu^{-5-a-b}(2 - \mu^2 - \mu^4 + \mu^6 - \mu^{8+2a} + 2\mu^{2(3+a+b)} + \mu^{2(4+a+b)} - 3\mu^{2(5+a+b)} + \mu^{2(6+a+b)} - 2\mu^{4+2b})$$

$$\text{Так як } 2 - \mu^2 - \mu^4 + \mu^6 \geq 1, -\mu^{8+2k} + \mu^{2(4+k+l)} > 0, -2\mu^{4+2k} + \mu^{6+2k} \geq -1$$

то дослідимо:

$$W(\mu) = \mu^{2(k+l+3)}(2 + \mu^6 - 3\mu^4)$$

$$\min W(\mu) = W(\sqrt{2})$$

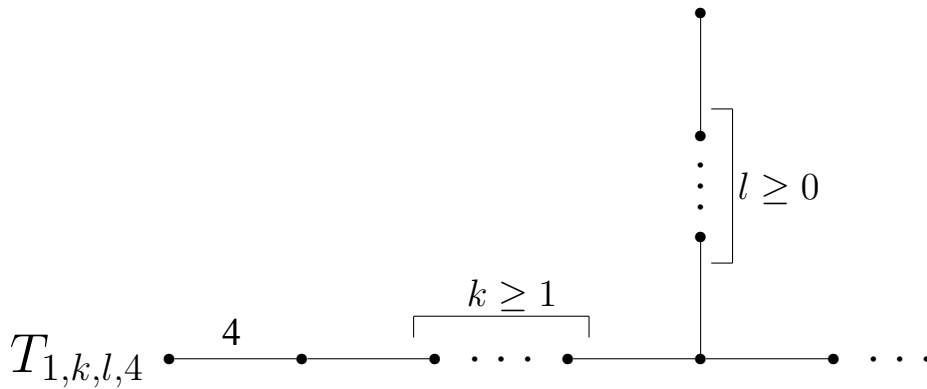
При підстановці $\mu = \sqrt{2}$ одержимо :

$$Q(\sqrt{2}) = (1 - 2^{k+2})\sqrt{2}^l - k - l - 1$$

Значення від'ємне, а отже, максимальний корінь цього рівняння буде більшим

$$\text{за } \mu = \sqrt{2}. \text{ Відповідно } \lambda_{T_{1,k,\infty}^6} > \frac{3}{\sqrt{2}}. Q(\sqrt{2}) < 0, W \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow \text{ind}G > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Означення 5.5.



Покладемо граф P_{G-x} рівним $P_{k+1,4}A_{l+1}$ і граф P_G рівним $P_{k+l+5,4}$

маємо наступні співвідношення :

$$P_{G-x} = P_{k+1,4}A_{l+1}$$

$$P_G = P_{k+l+5,4}$$

поділивши отримуємо:

$$\frac{P_{G-x}}{P_G} = \frac{\left(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) \left(\frac{1}{\mu^{-\frac{1}{\mu}}}\right)}{\mu^{k+l+3} + \frac{1}{\mu^{k+l+3}}} = \mu$$

після деяких перетворень отримуємо рівносильне рівняння:

$$\mu^{k+l+3} - \frac{1}{\mu^{l-k+1}} + \frac{1}{\mu^{k-l-1}} - \frac{1}{\mu^{k+l+3}} = -\mu^{k+l+3} - \frac{1}{\mu^{k+l+3}} + \mu^{k+l+5} + \frac{1}{\mu^{k+l+5}}$$

$$\mu^{k+l+5} - 2\mu^{k+l+3} + \mu^{k-l-1} - \mu^{l+1-k} + \frac{1}{\mu^{k+l+1}}$$

Домножаємо на μ^{k+l+1}

$$\mu^{k+l+6} - 2\mu^{k+l+4} + \mu^{2k} - \mu^{2l+2} + 1$$

Підставляємо $\mu = \sqrt{2}$

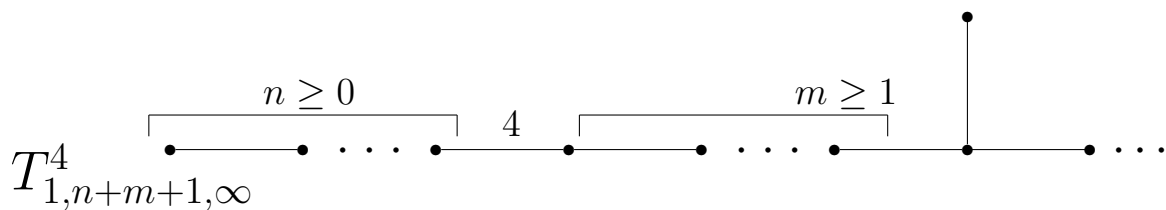
$$Q(\sqrt{2}) = -2^{l+1} + 2^k + 1$$

так як функція $Q(\mu)$ зростає , то

$$k \leq l, indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$k > l, indG < \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Означення 5.6.



Покладемо граф P_G рівним $P_n P_{m+3} - 2P_{n-1} P_{m+2}$ і граф P_{G-x} рівним $\lambda(P_n P_{m+1} - 2P_{n-1} P_m)$ поділимо і прирівняємо до μ

$$\begin{aligned} & \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\frac{\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \right) = \\ & = \mu \cdot \frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+4} - \frac{1}{\mu^{m+4}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+3} - \frac{1}{\mu^{m+3}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \end{aligned}$$

Домножимо праву і ліву частини на $\mu - 1/\mu$

$$\begin{aligned} & \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu^{m+n+3} - 2\mu^{m+n+1} + \mu^{m-n+1} + \mu^{n-m-1} - 2\frac{1}{\mu^{m+n+1}} + \frac{1}{\mu^{m+n+3}} \right) = \\ & = \mu \left(\mu^{m+n+5} - 2\mu^{m+n+3} + \mu^{m-n+3} + \mu^{n-m-3} - 2\frac{1}{\mu^{m+n+3}} + \frac{1}{\mu^{m+n+5}} \right) \end{aligned}$$

Після деяких перетворень отримуємо рівносильне рівняння :

$$Q(\mu) = \mu^{-m-n-1} (\mu^2 ((\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2)\mu^{2m} - 1) \mu^{2n} + (\mu^4 - \mu^2 - 1)\mu^{2m} + 2) - 1)$$

При підстановці $\mu = \sqrt{2}$ одержимо:

$$\frac{2}{\sqrt{2}^{m+n+1}} (2^m - 2^n + 1.5)$$

Дослідимо проміжки зростання і спадання функції $Q(\mu)$:

так як μ^{-m-n-1} завжди додатне - цей множник розглядати не будемо розглянемо випадки :

- $m < n$:

Підставимо $m = n - k : k \neq n, k \in \mathbb{N}$

$$(\mu^4 - \mu^2 - 1) \cdot \mu^{-2k+2n+2} + \mu^{2n+2} ((\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2) \cdot \mu^{2n-2k} - 1) + 2\mu^2 - 1$$

$$(\mu^4 - \mu^2 - 1) - \text{більше } 0 \text{ при } \mu > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Розглядаємо $\mu > \sqrt{2}$ бо цей проміжок нас цікавить

$$\mu^{2n-2k} \geq \mu ; 2\mu^2 - 1 \geq 3; \mu^4 - \mu^2 - 1 \geq 1 :$$

$$\mu^{-2k+2n+2} + \mu^{2n+2}(\mu^7 - 3\mu^5 + \mu^3 + 2\mu^2 - 1) + 3$$

Очевидно, що після деякого μ функція завжди зростає до нескінченності

- $n < m$:

Підставимо $n = m - k : k \neq n, k \in \mathbb{N}$

$$((\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2) \cdot \mu^{2m} - 1) \cdot \mu^{-2k+2m+2} + (\mu^4 - \mu^2 - 1) \cdot \mu^{2m+2} + 2\mu^2 - 1$$

$$(\mu^4 - \mu^2 - 1) - \text{більше } 0 \text{ при } \mu > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$(\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2) - \text{більше } 0 \text{ при } \mu > \sqrt{2}$$

Розглядаємо $\mu > \sqrt{2}$ бо цей проміжок нас цікавить

$$(\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2) \cdot \mu^{2m} - 1 \geq -1; 2\mu^2 - 1 \geq 3; \mu^4 - \mu^2 - 1 \geq 1$$

$$\mu^{2m+2}(1 - \frac{1}{\mu^{2k}}) + 3$$

Очевидно, що при $\mu > \sqrt{2}$ функція завжди додатня

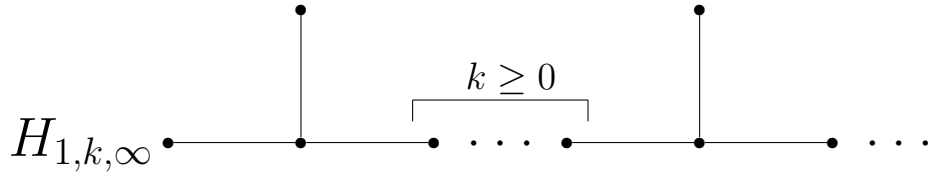
$Q(\mu)$ зростає, тому: при $m < n$ це від'ємне значення, отже максимальний корінь рівняння буде більшим за $\mu = \sqrt{2}$. Відповідно $\lambda > \frac{3}{\sqrt{2}}$ при $m > n$ це додатнє значення отже максимальний корінь рівняння буде меншим за $\mu =$

$$\sqrt{2} \text{Відповідно } \lambda_{\mathbf{T}_{1,k,\infty}^6} < \frac{3}{\sqrt{2}}$$

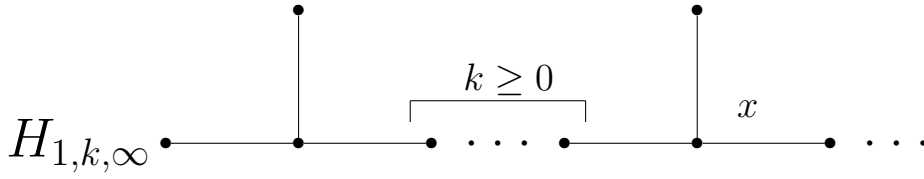
5.2 Теореми

Теорема 5.2. Якщо G — злічений зв'язний граф Костера з підпорядкований графом $H_{1,k,\infty}$, то він не містить позначок, відмінних від 3

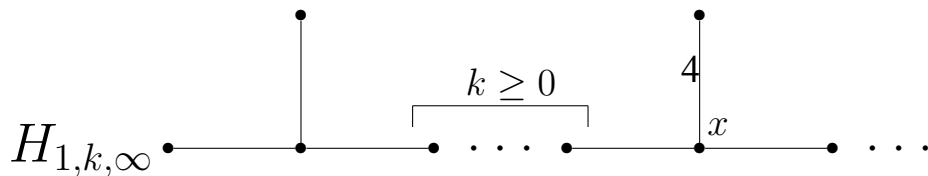
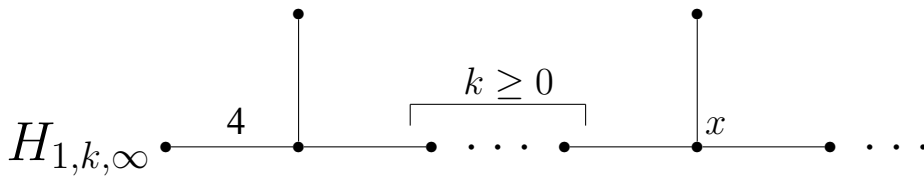
1. Якщо $indG \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ то G - граф виду



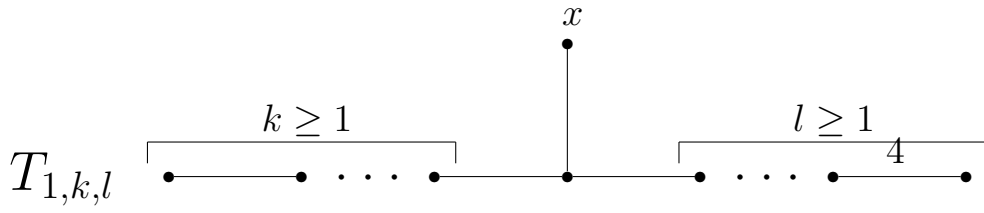
Доведення. Якщо маємо граф $H_{1,k,\text{inf}}$ Без позначок, то $indG = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$



Якщо маємо граф $H_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю то $indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$



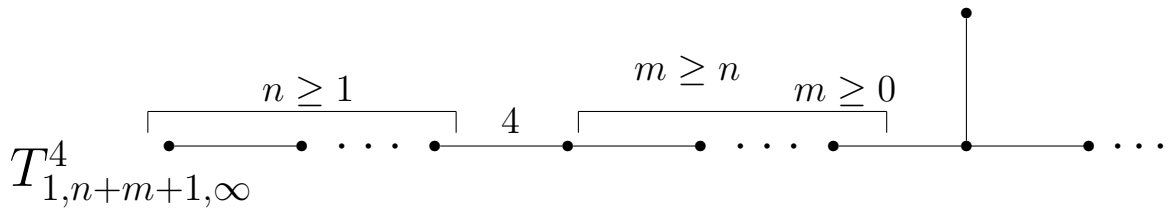
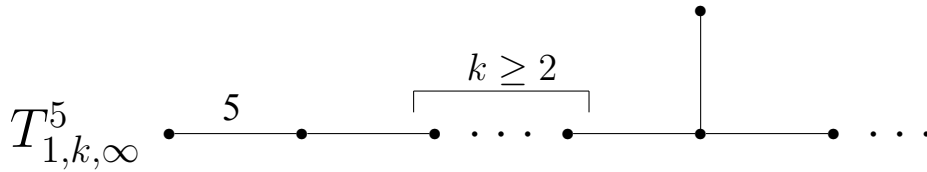
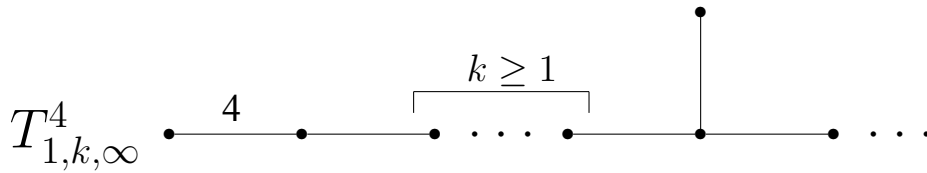
Якщо маємо граф $H_{1,k,\infty}$ з позначкою не з краю, тоді він буде мати у собі один із графів $T_{1,k,l}$, $indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$



□

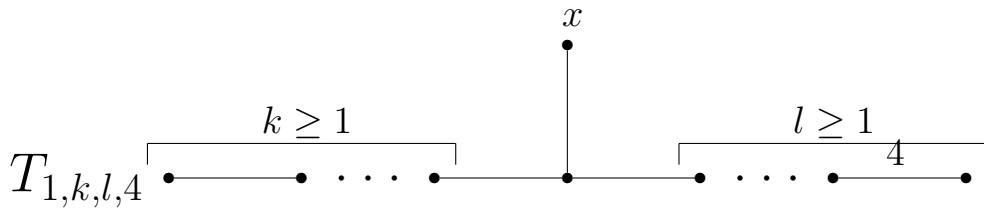
Теорема 5.3. Нехай G - злічений зв'язний граф Костера з підпорядкованими графами $T_{1k\infty}$, тоді

1. Якщо $indG \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ то G - один із графів виду

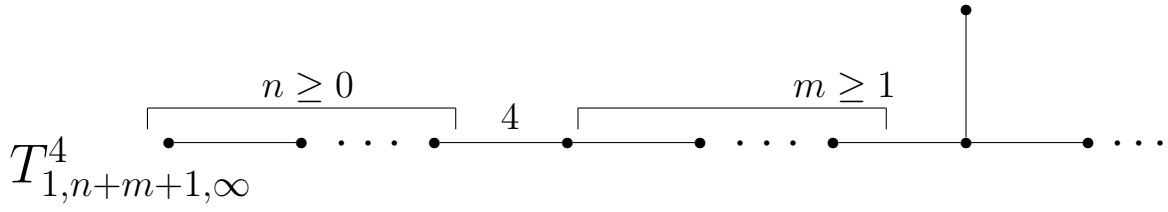


Доведення. для графів з позначкою з краю доведення наведено.[9]

Якщо маємо граф $T_{1,k+l+1,\infty}$ з позначкою на ланцюгу, то $indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$



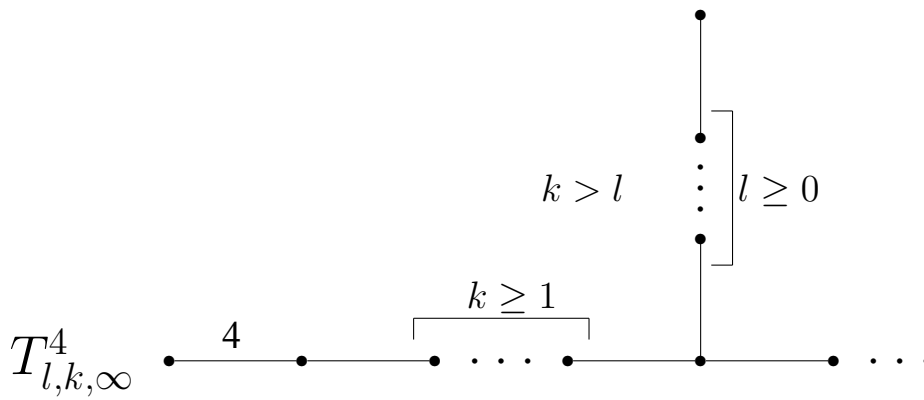
Якщо маємо граф $T_{1,n+m+1,\infty}$ з позначкою зліва від вершини степеня 3, то $indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$ при $n > m$ та $indG < \frac{3}{\sqrt{2}}$ в інших випадках



□

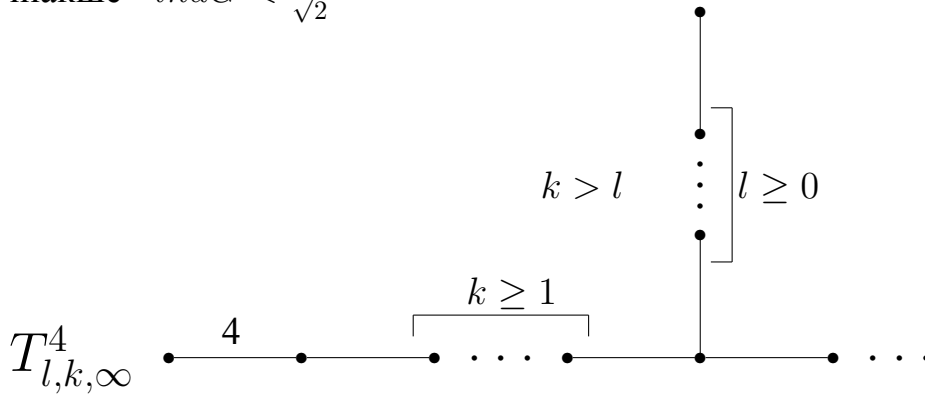
Теорема 5.4. Нехай G - злічений зв'язний граф Костера з підпорядкованими графами $T_{lk\infty}$, з позначкою з краю, тоді

1. Якщо $indG \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ то G - один із графів виду:



Доведення. Якщо маємо граф $T_{lk\infty}$, $k \leq l$, $indG > \frac{3}{\sqrt{2}}$

інакше - $indG < \frac{3}{\sqrt{2}}$



□

5.3 Висновки

В даному розділі були сформульовані теореми, які дозволяють розширити існуючу класифікацію злічених графів Костера за їх індексом, їх доведення та розглянуто приклади за допомогою яких дані теореми були сформовані .

6 Висновки

В третьому були представлені основні означення та твердження, розглянута теорема Фробеніуса, яка має важливе значення в дослідженні невід'ємних, нерозкладних матриць, були розглянуті графи Динкіна-Костера та їх властивості.

В четвертому розділі було розглянуто операції на злічених графах Костера, що є важливими для їх подальшого аналізу, представлені індекси графів, які складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга, представлені формули Швенка для зважених графів, які дозволяють враховувати вагу ребер при аналізі графів Костера. В п'ятому розділі були сформульовані теореми, які дозволяють розширити існуючу класифікацію злічених графів Костера за їх індексом та їх доведення.

7 Список літератури

1. *Reinhard Diestel* Graph Theory, Electronic edition, 2000
2. *Wilson, R. J.* Introduction to Graph Theory. Pearson Education. Fourth edition, Edinburgh Gate, Harlow, Essex CM20 2JE, England, "Longman 1996
3. *Самойленко Ю.С., Тимошкевич Л.М.*, Про спектральну теорію графів Костера
4. *Cvetkovic D. M.* Applications of graph spectra, in: Zbornik radova, 2009, 13(21)
5. *Mohar B* The spectrum of an infinite graph , Linear Algebra Appl, 1982
6. *Гантмахер Ф.Р* Теория матриц, "Наука", 1968.
7. *Bapat, R. B., and Raghavan*, nonnegative Matrices and Applications, Cambridge University Press, 1997
8. *Тимошкевич Лариса Миколаївна*, Прямі та обернені спектральні задачі зв'язаних скінченних графів і злічених графів Костера.- Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.
9. *Тимошкевич Л.М., Козут М.В.*, Класифікація злічених графів Костера відносно значення індексу у проміжку $(\sqrt{\sqrt{5} + 5}; \frac{3}{\sqrt{2}}]$
10. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, Graphs and Combinatorics, volume 406 of Lecture Notes in Mathematics, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
11. *Aleksandar Torgasev*, THE SPECTRUM OF LINE GRAPHS OF SOME INFINITE GRAPHS, PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE, 1982, pp. 209-222