

МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ



Н. А. Малиш
**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ
ПРОЦЕСІВ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ**

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ 2004

ББК 65.011.3я73
М20

Рецензенти: *І. М. Ляшенко*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
І. М. Кохановський, канд. фіз.-мат. наук, доц.

*Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії
управління персоналом (протокол № 8 від 28.11.02)*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-2099 від 26.05.03)*

Малиш Н. А.

М20 Моделювання економічних процесів ринкової економіки:
Навч. посіб. — К.: МАУП, 2004. — 120 с.: іл. — Бібліогр. у
кінці розд.

ISBN 966-608-358-2

У пропонованому посібнику викладено основні моделі ринкової економіки. До кожного розділу подаються тести та задачі, рекомендована література. Посібник містить інструментарій економічного аналізу, приклади його застосування та вдало поєднує вивчення математичних інструментів з економікою.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів і докторантів.

ББК 65.011.3я73

ISBN 966-608-358-2

© Н. А. Малиш, 2004
© Міжрегіональна Академія
управління персоналом (МАУП), 2004

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал і практичні завдання з дисципліни “Моделювання економічних процесів ринкової економіки” у вигляді тестів, прикладів розв’язування задач і завдань для самостійної роботи.

Навчальний посібник є систематизованим курсом на допомогу студентам економічних спеціальностей вищих закладів освіти і потребує попереднього засвоєння дисциплін: “Мікроекономіка”, “Макроекономіка”, “Статистика”, “Економетрика”, “Математичне програмування”. Посібник містить не тільки опис економічних моделей, а й загальну методику використання основних математичних методів в економіці.

Розділ 1

ВСТУП ДО МОДЕЛЮВАННЯ

Предмет моделювання

Основні класифікації моделей

Етапи процесу моделювання

Історичний розвиток предмета моделювання

1.1. ПРЕДМЕТ МОДЕЛЮВАННЯ

Будь-яка наука використовує загальнонаукові та специфічні методи дослідження. Загальнонаукові: 1) метод наукової абстракції; 2) метод аналізу та синтезу; 3) метод єдності історичного та логічного; 4) позитивний і нормативний методи. Моделювання є специфічним методом дослідження економічних наук, таких як макро-, мікроекономіка, економетрика, економічний аналіз.

Модель — спрощене відображення економічного явища чи об'єкта або спрощений опис реальності. У своїй діяльності економісти використовують різноманітні моделі. Модель можна подати у вигляді рівняння, схеми, графіка, діаграми.

Моделі відображають проблеми відповідних дисциплін — макроекономіки: валовий внутрішній продукт (ВВП), економічний цикл, зайнятість (безробіття), інфляцію, макроекономічну політику держави, економічне зростання, макроекономічні процеси відкритої економіки; мікроекономіки: моделі поведінки споживача, фірми, їх взаємодію на ринку.

Усі моделі будуються за певними припущеннями і полегшують розуміння реального світу. В економічному аналізі використовується припущення: припустімо, або "*ceteris paribus*", що означає "за інших рівних умов" і свідчить про змінність одного параметра та незмінність усіх інших.

Макроекономічні моделі містять у собі екзогенні (зовнішні) та ендогенні (внутрішні) змінні. Одержати ендогенні змінні можна після розв'язання задачі за побудованою моделлю.

Зміна екзогенних параметрів у моделі приведе до зміни ендогенних параметрів (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Зв'язок змінних у моделях

Екзогенні змінні задаються до побудови моделі як первісна інформація для розв'язання поставленого завдання. Ендогенні змінні є розв'язком побудованої моделі.

Для моделювання економічних процесів використовують також агреговані величини (параметри) — сукупність специфічних економічних одиниць як одного цілого.

1.2. ОСНОВНІ КЛАСИФІКАЦІ МОДЕЛЕЙ

Усі моделі класифікують залежно від обраного критерію.

1. *За загальним цільовим призначенням* моделі поділяють на *теоретичні* та *прикладні*. Теоретичні моделі досліджують загальні властивості економіки, застосовуючи дедуктивні методи і формальні припущення, наприклад, модель економічного кругообігу. Прикладні моделі аналізують функціонування конкретного економічного об'єкта та використовують результати дослідження на практиці. До прикладних належать економетричні та економіко-математичні моделі планування виробництва.

2. *За ступенем агрегування* моделі поділяють на *макроекономічні* та *мікроекономічні*. Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, використовуючи агреговані величини: валовий внутрішній продукт, сукупний попит, пропозицію грошей тощо. Макроекономічні моделі поділяють на відкриті та закриті. Мікроекономічне моделювання — основна складова економіко-математичного моделювання. Найбільші успіхи останніх років стосуються досліджень стратегічної поведінки фірм в умовах олігополії з використанням методів теорії ігор. Так, у 1994 р. Нобелівську премію одержали Джон Неш (США), Джон Харсаньї (США) і Рейнхард Зельтен (Німеччина) за теоретичний аналіз конкурентної поведінки і умови стратегії.

3. *За конкретним цільовим призначенням* моделі поділяють на п'ять типів. *Балансові* моделі відображають відповідність наявності ресурсів їх використанню. В моделюванні економічних процесів досить популярними є *рівноважні* моделі (“витрати–випуск”). У *трендових* моделях розвиток економічної системи, що моделюється, відображається через тренд (тривалу тенденцію) її основних показників. *Оптимізаційні* моделі призначені для вибору найкращого варіанта з їх певної кількості. *Імітаційні* моделі призначені для використання у процесі машинної імітації процесів, що вивчаються.

4. За розмірністю розрізняють малорозмірні, багаторозмірні.

5. Відносно до чинника часу: статичні, динамічні. Статичні моделі відображають економічний процес на початку та наприкінці певного періоду і не розглядають самого процесу переходу. Динамічні моделі зображають економічні процеси з урахуванням чинника часу.

6. З урахуванням чинника невизначеності: детерміновані, стохастичні. В детермінованих моделях використовують жорсткі функціональні зв'язки між змінними. В стохастичних моделях існує чинник випадковості. При дослідженні цих моделей використовують знаряддя теорії ймовірностей та математичної статистики.

7. За характеристикою математичних об'єктів: матричні, лінійні, нелінійні, кореляційно-регресійні, моделі теорії ігор і сіткового планування (наприклад, модель міжгалузевого балансу — матрична, кейнсіанська функція споживання — лінійна $C = C(Y)$, де C — споживання, Y — дохід; виробнича функція Кобба–Дугласа — нелінійна $Y = F(K, L)$, де Y — обсяг виробництва, K — капітал, L — праця.

До комбінованої моделі можна зарахувати, наприклад, економіко-математичну модель міжгалузевого балансу, яка є прикладною, макроекономічною, детермінованою, балансовою та матричною, при цьому вона може бути статичною та динамічною.

1.3. ЕТАПИ ПРОЦЕСУ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання умовно можна поділити на шість етапів (рис. 1.2).

1. *Постановка економічної проблеми* та її якісний аналіз. На першому етапі формулюють суть проблеми, приймають певні припущення, вирізняють важливі риси і властивості та абстрагують об'єкт моделювання. Окреслюють первісну гіпотезу, яка пояснює поведінку і розвиток об'єкта.

2. *Побудова аналітичної моделі*. Визначають тип, до якого можна зарахувати модель. Аналізують, чи можна визначне завдання зарахувати до відомої моделі. Якщо ні, пропонується своя модель.

3. *Економічний аналіз моделі*. Досліджують загальні властивості моделі, їх розв'язування. Якщо доведено, що розв'язування не має, то наступні етапи моделювання не проводяться. Побудовану модель коректують і дослідження починають спочатку.

4. *Підготовка початкової інформації*. Обмаль інформації ускладнює процес моделювання, а відсутність її переводить модель з класу прикладних до класу теоретичних. Цей етап свідчить про системність

процесу моделювання, оскільки вихідна інформація одних моделей може стати вхідною для інших.

5. *Чисельне рішення.* На цьому етапі розробляють алгоритм, складають програми для ПЕОМ і проводять розрахунки.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування.* На останньому етапі досліджують коректність чи некоректність побудованої моделі. Підтверджують або спростовують висунуту гіпотезу щодо економічного процесу. На основі одержаних результатів визначають напрями вдосконалення побудованої моделі, інформаційної бази та програмного забезпечення.

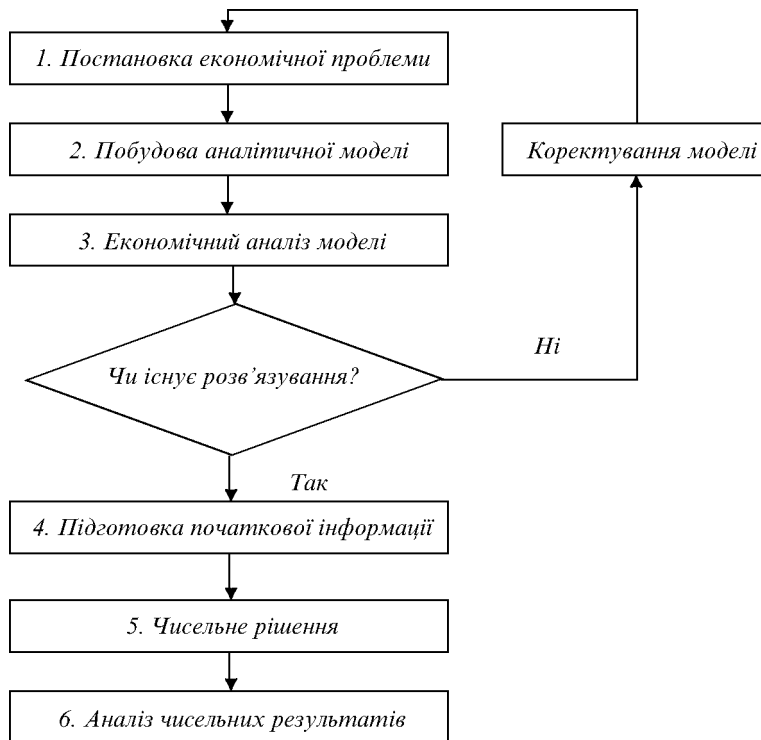


Рис. 1.2. Блок-схема процесу моделювання

1.4. ІСТОРИЧНИЙ РОЗВИТОК ПРЕДМЕТА МОДЕЛЮВАННЯ

Перші моделі слугували ілюстрацією при дослідженні. 1576 року француз Жан Боден намагається обґрунтувати зміну рівня цін (інфляцію) як результат зміни співвідношення між кількістю грошей і товарів. Ця теорія стає основою монетарної теорії і першою інфляційною моделлю.

У 1758 р. французький фізіократ Франсуа Кене (1694–1774) розробляє першу макроекономічну модель господарського кругообігу — “Економічну таблицю” — за аналогією кругообігу людини. Оскільки хвороба є відхиленням від нормального стану людини, то й економічна криза є тимчасовим відхиленням від рівноваги в економіці.

А. Сміт (1723–1790) створює класичну макроекономічну модель, яка пояснює процеси саморегулювання ринку через механізм ціноутворення.

Д. Рікардо (1772–1823) пропонує модель міжнародної торгівлі.

К. Маркс (1818–1883) використовує схематичні моделі для відображення процесу розширеного відтворення.

У XIX ст. свій внесок у моделювання економічних процесів зробили математики — представники неокласицизму англієць Артур Пігу (1877–1959) — “ефект Пігу”; швейцарець Леон Вальрас (1834–1910) — закон загальної економічної рівноваги, теорія економічного добробуту; італієць Вільфредо Парето (1848–1923) — “оптимум за Парето”; австрієць Карл Менгер (1840–1921) — теорія граничної корисності; англієць Френсіс Еджворт (1845–1926) — “сморинька Еджворта” — модель, яка ілюструє ефективність обміну.

Ними створено інструментарій макро- та мікроекономічного аналізу: еластичність попиту, граничний аналіз, коротко- та довгостроковий періоди, взаємозалежність ринків. У їхніх працях сформульовані основні принципи маржиналізму (marginal — граничний).

Наприкінці XIX — на початку XX ст. в економічній науці набуває розвитку статистичний напрям, який досліджує та прогнозує циклічний розвиток економіки на основі моделей і методів математичної статистики. Уперше математична статистика була використана в біології англійським ученим К. Пірсоном для вивчення кривих розподілу чисельних характеристик людського організму. В. Парето пропонує статистичні моделі по дослідженню доходів населення в різних країнах. Англійський статистик Гукер розглядає модель взаємозв'язку економічних показників. Він пропонує модель впливу кількості

банкрутств на товарній біржі на ціну зерна. На початку ХХ ст. з'являється величезна кількість праць з теорії математичної статистики. Р. Фішер пропонує моделі дисперсійного аналізу, Кобб і Дуглас аналізують виробничі функції.

Світова економічна криза 1929–1933 рр. стає поштовхом створення нової макроекономічної теорії. Англійський економіст Джон Мейнард Кейнс гостро критикує класичну теорію і висуває свої постулати: 1. У ринковій економіці може існувати рівновага за неповної зайнятості. 2. Для усунення неповної зайнятості необхідне втручання держави. 3. Держава втручається в економічні відносини через грошову і бюджетно-податкову політику. 4. Держава впливає на сукупний попит. Фундаментальна праця Д. Кейнса “Загальна теорія зайнятості, процента і грошей” (1936) стає підґрунтям для рівноважних моделей і базовою теорією державного регулювання економіки.

Економічні дослідження в СРСР у 20-ті роки проводились під впливом непу (нової економічної політики). Російський учений М. Кондратьєв (1892–1938) висуває теорію великих циклів кон'юнктури (“довгих хвиль”) періодичністю 40–60 років. Визначним досягненням радянських учених стала розробка першого у світі балансу народного господарства СРСР за 1923/24 рік. Модель економічного зростання радянського ученого Г. Фельдмана (1884–1958), створена у 1928 р., розкрила взаємозв'язок темпів зростання національного доходу, зміни фондівддачі і продуктивності праці. Праці Г. Фельдмана були оцінені на Заході лише після Другої світової війни і опубліковані у США 1964 р.

У 30–50 роки відроджується економіко-математичний напрям моделювання. У 1938–1939 рр. ленінградський математик Л. Канторович (1912–1986) сформулював задачі лінійного програмування і запропонував методи їх розв'язання. Моделі радянської економіки створювались на основі економіко-математичних досліджень. Вони охоплювали багаторівневі системи, були досить складними і переважно формальними.

Сучасні моделі вирізняються різноманітністю та потужним використанням математичного апарату.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- *Модель*
- *Економічна таблиця Ф. Кене*
- *Класична модель А. Сміта*
- *Модель міжнародної торгівлі*
- *Економіко-математичне моделювання*
- *Загальнонаукові та специфічні методи*
- *Перша інфляційна модель*
- *“За інших рівних умов”*

- Неокласичні моделі
- Статистичні моделі
- Кейнсіанські моделі
- Агреговані параметри
- Екзогенні та ендогенні змінні
- Етапи процесу моделювання

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає суть категорії “модель”?
2. Які типи моделей ви знаєте?
3. В яких моделях існує чинник випадковості?
4. Що таке комбінована модель?
5. На які етапи поділяють процес моделювання?
6. Що означає перша інфляційна модель?
7. Яка існує різниця між класичними та кейнсіанськими моделями?
8. В яких моделях уперше була використана математична статистика?
9. Схарактеризуйте моделі неокласицизму.
10. Які сучасні моделі ринкової економіки ви знаєте?

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. Узгодьте модель та її автора:
 - а) перша інфляційна модель — Д. Рікардо;
 - б) модель міжнародної торгівлі — Р. Фішер;
 - в) модель загальної економічної рівноваги — Ж. Боден;
 - г) модель дисперсійного аналізу — Л. Вальрас.
2. У макроекономічних моделях не відображаються проблеми:
 - а) зайнятості;
 - б) інфляції;
 - в) економічного зростання;
 - г) поведінки фірм.
3. До специфічних методів дослідження належить метод:
 - а) наукової абстракції;
 - б) моделювання;
 - в) аналізу та синтезу;
 - г) позитивний і нормативний.
4. Змінні, які є розв’язком задачі, називаються:
 - а) екзогенними;
 - б) ендогенними.
5. За загальним цільовим призначенням моделі поділяють на:
 - а) теоретичні та прикладні;
 - б) лінійні та нелінійні;
 - в) рівноважні та балансові;
 - г) макроекономічні та мікроекономічні.

6. Модель, яка відображає економічний процес на початку та наприкінці періоду, не розглядаючи самого процесу переходу, є:
- а) статичною;
 - б) статистичною;
 - в) динамічною;
 - г) лінійною.

7. Впорядкуйте ланцюжок процесу моделювання (пропущені деякі етапи):
- а) аналіз результатів;
 - б) чисельне рішення;
 - в) економічний аналіз побудованої моделі;
 - г) побудова аналітичної моделі.

8. Визначте градієнт функції

$$F(X_1, X_2) = X_1 X_2^2 \text{ у точці з координатами } (2, 3).$$

9. Визначте функцію повних витрат фірми $TC(Q)$, якщо фіксовані витрати $FC = 20$, а граничні витрати $MC = 4$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Замков О. О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В.* Математические методы в экономике: Учебник. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ; Дело и сервис, 1999.
2. *Макроекономічне моделювання та короткострокове прогнозування / За ред. І. В. Крючкової.* — Харків: Форт, 2000.
3. *Нуреев Р. М.* Курс микроэкономики: Учеб. для вузов. — М.: НОРМА, 2000.
4. *Селищев А. С.* Макроэкономика. — СПб.: Питер, 2000.
5. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

Розділ 2

МОДЕЛІ СПОЖИВЧОГО РИНКУ

Модель поведінки споживача

Кейнсіанська модель споживання

Модель міжчасового споживчого вибору І. Фішера

Модель життєвого циклу Ф. Модільяні

Модель перманентного доходу М. Фрідмана

2.1. МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧА

Для відносного аналізу мікроекономічних процесів використовують криві байдужості. **Крива байдужості** — це лінія рівної корисності, усі точки якої характеризують товари, що забезпечують споживачу однаковий рівень корисності $U = U_0$ (рис. 2.1).

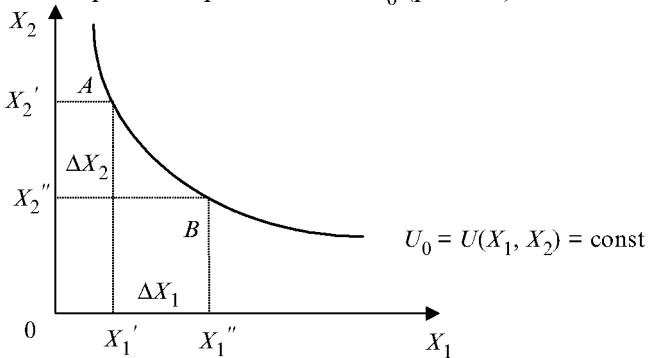


Рис. 2.1. Крива байдужості

Приклад. Функція корисності має вигляд:

$$U(X_1, X_2) = (2X_1 + 1)(X_2 + 3),$$

де X_1, X_2 — споживання товарів X_1 та X_2 відповідно. Запишіть рівняння кривої байдужості, яка проходить через точку $(X_1, X_2) = (3, 1)$.

Розв'язання.

Підставимо значення $(3, 1)$ у функцію корисності.

$$U(X_1, X_2) = U(3, 1) = (2 \cdot 3 + 1)(1 + 3) = 7 \cdot 4 = 28, \quad U_0 = 28.$$

Отже, $(2X_1 + 1)(X_2 + 3) = 28$. Звідси рівняння кривої байдужості:

$$X_2 = \frac{28}{2X_1 + 1} - 3.$$

Форма кривих байдужості відображає готовність споживача обмінювати один товар на інший. Коли обидва товари легко замінити, крива байдужості увігнута менше. Якщо товари не замінюються — крива байдужості увігнута більше.

Карта кривих байдужості — множина всіх можливих рівнів корисності (U_1, U_2, U_3, \dots) для певного споживача (рис. 2.2).

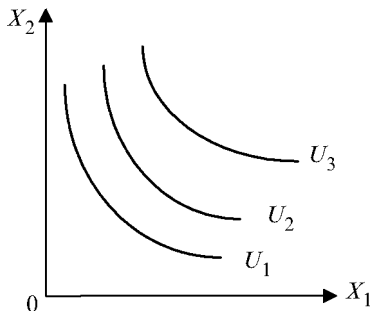


Рис. 2.2. Карта кривих байдужості

Гранична корисність MU_i блага X_i — це зміна загальної корисності набору двох товарів при зміні кількості даного блага на одиницю. Математично гранична корисність блага X_i при незмінній кількості всіх інших благ є частковою похідною функції корисності:

$$MU_i = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_i}.$$

Кількість блага X_2 , від якої споживач готовий відмовитися в обмін на додаткову одиницю блага X_1 при незмінному загальному рівні корисності, називається **граничною нормою заміщення благ (MRS)**.

$$MRS = -\frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

Для опуклих кривих байдужості гранична норма заміщення MRS вимірює нахил кривої байдужості.

Приклад. Для даної функції корисності $U(X_1, X_2)$ підрахувати граничні корисності MU_1 і MU_2 та граничну норму заміщення благ MRS : $U(X_1, X_2) = 2X_1 + 4X_2$.

Розв'язання.

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 2; \quad MU_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 4; \quad MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Наступний етап моделі поведінки споживача аргументується тим, що споживач обмежений фінансовими ресурсами і це не дає йому можливості задовольнити усі свої потреби.

Бюджетне обмеження споживача (графічно це — бюджетна лінія) — множина наборів, вартість яких становить R : $P_1 X_1 + P_2 X_2 = R$.

Приклад. Споживач має дохід 500 гр. од. на місяць. Припустімо, він купує 2 товари у кількостях X_1 та X_2 за цінами 2 гр. од. та 4 гр. од. за штуку відповідно. Запишіть бюджетне обмеження споживача. Накресліть бюджетну лінію. Визначте нахил бюджетної лінії.

Розв'язання.

Бюджетне обмеження споживача (рис. 2.3):

$2X_1 + 4X_2 = 500$. Точка перетину з віссю OX_1 : $X_2 = 0$; $2X_1 = 500$; $X_1 = 250$.

Точка перетину з віссю OX_2 : $X_1 = 0$; $4X_2 = 500$; $X_2 = 125$.

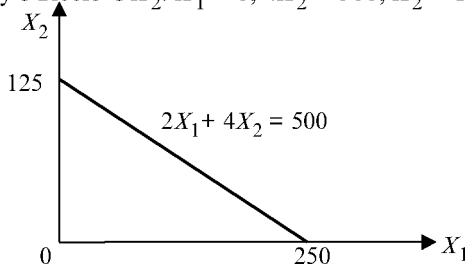


Рис.2.3. Приклад побудови бюджетної лінії

Нахил бюджетної лінії показує **альтернативні витрати** споживан-

ня товару 1. Нахил бюджетної лінії $-\frac{P_1}{P_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

На бюджетну пряму впливають знаряддя економічної політики: податки, субсидії, раціоновані обмеження.

Для оптимізації поведінки споживача слід сумістити системи кривих байдужості з бюджетним обмеженням (рис. 2.4). Споживач обирає на лінії бюджетного обмеження точку (точку оптимуму), яка міститься на кривій байдужості та вища за інші криві байдужості.

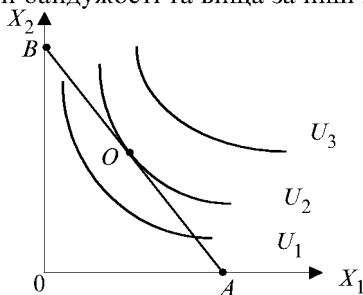


Рис. 2.4. Оптимум споживача

У точці оптимуму O гранична норма заміщення двох товарів дорівнює їх відносній ціні. Лінія бюджетного обмеження є дотичною до кривої байдужості. Вибір у точці O є оптимальним вибором для споживання.

$$MRS = \frac{P_1}{P_2} = -\frac{MU_1}{MU_2} \quad \text{або} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{MU_1}{MU_2}.$$

2.2. КЕЙНСІАНСЬКА МОДЕЛЬ СПОЖИВАННЯ

Кейнсіанська модель споживання належить до макроекономічних моделей.

За Кейнсом використовуваний дохід Y поділяють на C — споживання та S — заощадження: $Y = C + S$.

Споживчі витрати — це витрати домогосподарств на придбання споживчих товарів і оплату послуг для задоволення особистих потреб. За Кейнсом споживчі витрати змінюються закономірно зі зміною доходу. Досліджував ці закономірності на основі сімейних бюджетів німецький статист XIX ст. Ернест Енгель.

Функція споживання виражає залежність між використовуваним доходом і обсягом споживання і має вигляд: $C = F(Y)$ або $C = F(Y - T)$ (рис. 2.5).

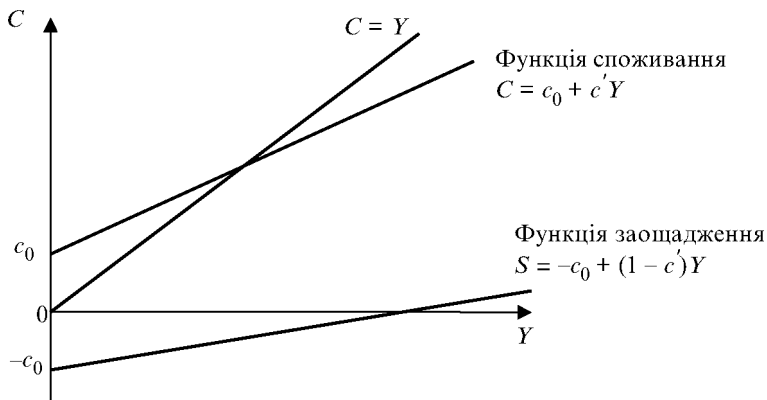


Рис. 2.5. Функція споживання та функція заощадження

Чинником споживання у функції є дохід. $C = c_0 + c'(Y - T)$, де c_0 — автономне споживання, тобто обсяг споживання, який не залежить від використовованого доходу. Наприклад, проживання в борг, за

рахунок заощаджень, субсидій. У довгостроковому періоді для економіки вцілому автономне споживання прямує до 0;

c' — **гранична схильність до споживання** — величина, яка показує, на скільки одиниць зміниться обсяг споживання при зміні використованого доходу на одну одиницю і визначається за формулою

$$c' = MPC = \Delta C / \Delta Y,$$

де ΔC — приріст споживчих витрат; ΔY — приріст використованого доходу.

З геометричної точки зору гранична схильність до споживання MPC — це кут нахилу кривої споживання.

Модель функції споживання: $C = c_0 + c' Y$, де C — величина споживання домашніх господарств; c_0 — автономне споживання; c' — гранична схильність до споживання; Y — дохід.

Заощадження S — це неспожита частина доходу. Найпростіша функція заощадження має вигляд: $S = F(Y)$. Кожній функції споживання відповідає єдина функція заощаджень (див. рис. 2.5):

$$S = Y - C = Y - c_0 - c' Y = -c_0 + (1 - c') Y.$$

Модель функції заощадження:

$$S = s_0 + s' Y, s' = 1 - c', s_0 = 1 - c_0,$$

де S — величина заощаджень домашніх господарств, s_0 — автономне заощадження; $1 - c' = s'$ — гранична схильність до заощадження; Y — дохід.

Гранична схильність до заощадження — величина додаткового заощадження з однієї додаткової грошової одиниці використованого доходу: $MPS = \Delta S / \Delta Y$, де ΔS — приріст заощаджень; ΔY — приріст використованого доходу.

Оскільки частина кожної грошової одиниці (гривні), яка не споживається, обов'язково заощаджується, то: $MPC + MPS = 1$.

Чинники, які не залежать від доходу та впливають на споживання та заощадження: 1. Багатство. 2. Податки. 3. Рівень цін. 4. Відрахування на соціальне страхування. 5. Очікування. 6. Споживча заборгованість. 7. Відсоткова ставка.

Теорія Кейнса апробовувалась на основі статистичних даних економіки США за 1929–1941 рр. Рівняння мало такий вигляд: $C = 47,6 + 0,73 Y$. Подальші дослідження підтверджують прийнятність формули тільки для короткострокового періоду. У 1946 р. американський учений українського походження С. Кузнець на основі аналізу статистичних даних за 1869–1940 рр. дійшов висновку, що із зростанням доходу середня схильність до споживання залишається постійною (рис. 2.6). С. Кузнець на підставі офіційної статистики досліджував залежність

між доходом і споживанням у США у період з 1868 по 1930 рік. Виявилось, що відношення C/Y у довгостроковому періоді не має тенденції до зниження, а має вигляд: $C = c'Y$.

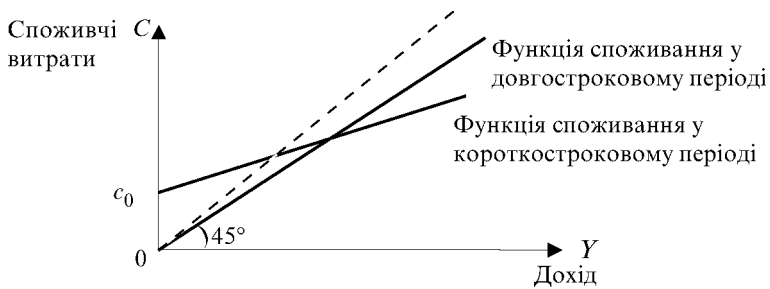


Рис. 2.6. Функція споживання у довгостроковому та короткостроковому періодах

Існує кілька концепцій, які пояснюють цю проблему. Зокрема, моделі міжчасового споживчого вибору І. Фішера, життєвого циклу Ф. Модільяні, перманентного доходу М. Фрідмена.

2.3. МОДЕЛЬ МІЖЧАСОВОГО СПОЖИВЧОГО ВИБОРУ І. ФІШЕРА

Ірвінг Фішер (1867–1947) — американський економіст, статистик, представник неокласичної школи висунув гіпотезу про те, що, приймаючи споживчі рішення, раціональна людина враховує не тільки поточний, але й майбутній дохід, тобто весь дохід, який вона одержує протягом життя.

Запропонована модель одержала назву **моделі міжчасового споживчого вибору**. Суть її полягає в тому, що при прийнятті рішення про споживання у даний момент і в майбутньому споживачі зустрічаються з міжчасовим бюджетним обмеженням. Перед споживачем виникає проблема вибору і два часових періоди: молодість (дохід Y_1) і старість (дохід Y_2).

У перший період особа споживає і заощаджує: $Y_1 = C_1 + S_1$. Звідси: $C_1 = Y_1 - S_1$; $S_1 = Y_1 - C_1$. У другому періоді індивід має дохід Y_2 . Він споживає, але не заощаджує, використовує заощадження першого періоду та одержані відсотки у перший період життя. Тоді:

$$C_2 = Y_2 + S_1(1 + r) = Y_2 + (Y_1 - C_1)(1 + r),$$

де r — реальна відсоткова ставка.

Перетворимо рівняння: споживання — ліворуч, дохід — праворуч.
 $C_2 = Y_2 + Y_1(1+r) - C_1(1+r)$; $C_1(1+r) + C_2 = Y_1(1+r) + Y_2$.
 Поділимо обидві частини на $1+r$, одержимо:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}.$$

Це — рівняння міжчасового бюджетного обмеження споживача, що показує, якою сумою коштів повинні володіти споживачі протягом двох життєвих періодів.

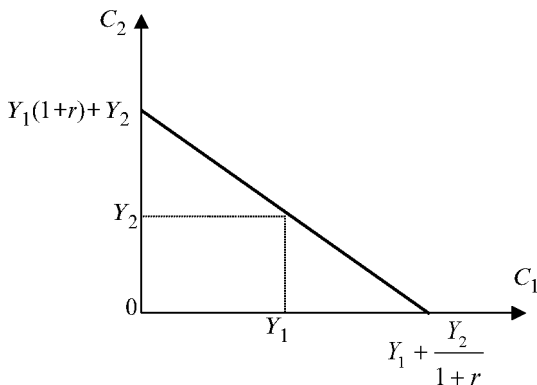


Рис. 2.7. Бюджетне обмеження споживача за моделлю Фішера

Нахил лінії бюджетного обмеження дорівнює $1/(1+r)$ (рис. 2.7):

$$\frac{Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}}{(1+r)Y_1 + Y_2} = \frac{(1+r)Y_1 + Y_2}{(1+r)Y_1 + Y_2} = \frac{1}{1+r}.$$

Переваги споживача між споживанням у першому та другому періодах відображають криві байдужості. Кожна крива байдужості характеризує рівний рівень корисності для споживача різних наборів споживання у теперішньому та майбутньому періодах (рис. 2.8). Споживач надає перевагу вищим кривим байдужості, оскільки вони забезпечують більше споживання.

Прагнення споживачів максимізувати свою корисність обмежені бюджетом. Оптимальна комбінація споживання у першому та друго-

му періодах досягається у точці дотику найвищої кривої байдужості до лінії бюджетного обмеження.

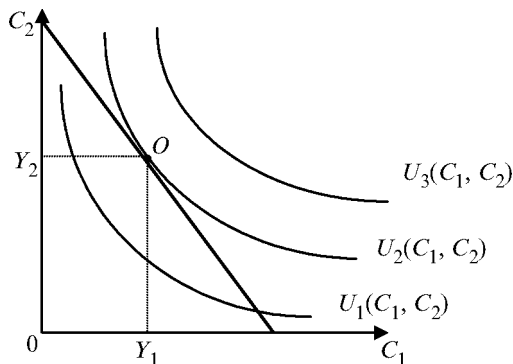


Рис. 2.8. Оптимум споживача для моделі Фішера

Нахил кривої байдужості відображає граничну норму заміщення (MRS). Нахил лінії бюджетного обмеження дорівнює $1/(1+r)$. Отже, в точці O : $MRS = 1/(1+r)$.

На споживання впливають: 1) зміна доходу; 2) зміна рівня відсоткової ставки. Зростання доходу зміщує лінію бюджетного обмеження праворуч. При зростанні відсоткової ставки зміниться кут нахилу бюджетної лінії, оскільки споживання у першому періоді зменшиться, у другому — збільшиться.

Вплив реальної відсоткової ставки відображається в ефекті доходу та ефекті заміщення. **Ефект доходу** — зміна у споживанні, викликана переходом до вищої кривої байдужості. **Ефект заміщення** — зміна у споживанні, викликана зміною відносної ціни споживання в обидва періоди.

2.4. МОДЕЛЬ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ Ф. МОДІЛЬЯНІ

Франко Модільяні (США). Основна праця “Життєвий цикл, заощадження громадян і багатство нації”. 1985 р. одержав Нобелівську премію за аналіз фінансових ринків і процесів заощадження. Суть його теорії полягає в тому, що дохід людини коливається протягом життя. В юності люди беруть позику, розраховуючи на високі заробітки у майбутньому. У пенсійному віці споживання забезпечують заощадження минулого періоду.

Припустімо, що споживач передбачає прожити T років, володіє багатством W , очікує одержувати дохід Y , на пенсію планує піти через R років. Отже, протягом життя споживач одержить суму $W + RY$. При цьому не враховується відсоткова ставка.

Оскільки одержана протягом життя сума розподіляється рівномірно за T роками, то особа споживає щорічно:

$$C = \frac{W + RY}{T} \text{ (гр. од.)}$$

Отже, функція споживання для раціонального споживача має вигляд:

$$C = \frac{W + RY}{T} = \frac{1}{T}W + \frac{R}{T}Y,$$

тобто, функція споживання залежить від очікуваного доходу і поточного багатства:

$$C = C(Y, W).$$

Модель функції споживання Франко Модільяні набуває вигляду:

$$C = \alpha W + \beta Y; \quad \alpha = 1/T; \quad \beta = R/T,$$

де α — гранична схильність до споживання за поточним багатством; β — гранична схильність до споживання за доходом; W — багатство; Y — дохід; T — роки життя; R — кількість років, що очікується пропрацювати до пенсії.

Приклад. Споживач передбачає прожити ще 40 років, пропрацювавши 20 років. Запишіть функцію споживання для раціонального споживача за теорією “життєвого циклу” Ф. Модільяні. Чому дорівнює споживання, якщо споживач володіє багатством 20 тис. гр. од. та очікує одержувати щорічно дохід 50 тис. гр. од.?

Розв’язання.

$$C = \frac{1}{T}W + \frac{R}{T}Y; \quad T = 40, R = 20;$$

$$C = \frac{1}{40}W + \frac{20}{40}Y = 0,025W + 0,5Y; \quad C(20, 50) = 25,5 \text{ тис. гр. од.}$$

2.5. МОДЕЛЬ ПЕРМАНЕНТНОГО ДОХОДУ М. ФРІДМЕНА

Мілтон Фрідмен (США). 1976 р. одержав Нобелівську премію за аналіз теорії споживання, теорії та історії грошового обігу. Основні положення його теорії: 1. Функція споживання має значення тільки для довгострокового періоду. 2. Споживання визначається залежно від постійного (перманентного доходу).

Перманентний дохід — середньозважена величина з усіх доходів, які людина очікує одержати (середній дохід). Гіпотеза перманентного доходу базується на теорії споживчого вибору І. Фішера.

У Фрідмена модель набуває вигляду:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_p + \frac{Y_p}{1+r},$$

де Y_p — перманентний дохід.

Перетворимо рівняння відносно Y_p , одержимо:

$$Y_p = \left(\frac{1+r}{2+r}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{1+r}\right).$$

Поточний дохід Y дорівнює сумі постійного доходу Y_p і тимчасового доходу Y_t :

$$Y = Y_p + Y_t.$$

Тимчасовий дохід — частина доходу, яку не очікують зберегти у майбутньому. Це — випадкове відхилення від доходу. Тимчасовий дохід може бути трьох видів. *Випадковий* тимчасовий дохід становить випадкові відхилення від звичайного тренду (виграш у лотереї), при якому поточне споживання економічних суб'єктів не змінюється. *Тимчасовий* дохід перманентного відхилення від звичайного (підвищення або пониження у посаді). Із зміною доходу змінюється споживання. *Очікуване відхилення* доходу (очікується підвищення у посаді або плануються великі витрати у зв'язку зі зміною місця проживання). У цьому випадку при незмінному поточному доході відбувається зміна споживчих витрат.

Поділ поточного доходу на перманентний і тимчасовий дав можливість Фрідмену вирішити протиріччя Кейнса між довгостроковою і короткостроковою функціями споживання, за якими середня схильність до споживання у короткостроковому періоді має тенденцію до зниження, а в довгостроковому є стабільною. У довгостроковому періоді тимчасові відхилення поточного доходу від перманентного врівноважуються і функція споживання набуває вигляду: $C = \alpha Y_p$, де α — коефіцієнт. Отже, споживання пропорційне перманентному доходу. Поділимо обидві частини рівняння на Y , одержимо:

$$\frac{C}{Y} = \frac{\alpha Y_p}{Y},$$

тобто середня схильність до споживання залежить від відношення постійного доходу до поточного. Отже, у роки високого доходу середня схильність до споживання є низькою, у роки малого доходу — високою. У довгостроковому періоді вона є постійною.

Дослідження Фрідмена за статистичними даними з 1905 по 1967 р. дали результат: $C = 0,88 Y_p$.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- *Модель поведінки споживача*
- *Модель міжчасового споживчого вибору*
- *Корисність*
- *Бюджетне обмеження*
- *Оптимум споживача*
- *Функція споживання*
- *Функція заощадження*
- *Гранична схильність до споживання за доходом*
- *Гранична схильність до споживання за поточним багатством*
- *Кейнсіанська модель*
- *Модель життєвого циклу*
- *Часовий період*
- *Модель перманентного доходу*
- *Тимчасовий дохід*

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які моделі використовують для аналізу мікроекономічних процесів?
2. Який економічний процес відображається бюджетним обмеженням споживача?
3. Що виступає чинником споживання та заощадження у відповідних кейнсіанських функціях?
4. Чим відрізняються функції споживання у короткостроковому та довгостроковому періодах?
5. У якій моделі споживчого ринку розглядаються два часових періоди?
6. Як визначається оптимум споживача для моделі І. Фішера?
7. Від чого залежить функція споживання у моделі життєвого циклу Ф. Модільяні?
8. В яких моделях споживчого ринку не враховується відсоткова ставка?
9. Що означає категорія “перманентний дохід”?
10. Як вирішується протиріччя між короткостроковою та довгостроковою функціями споживання в моделі І. Фішера?

8. За моделлю Фішера у першому періоді життя індивід має дохід 2 млн гр. од. і споживає 1,5 млн гр. од. У другому періоді життя дохід становить 485 тис. гр. од., а споживання — 1 млн гр. од. Чому дорівнює реальна відсоткова ставка?

9. Споживач передбачає прожити ще 50 років, пропрацювавши 30. Запишіть функцію споживання за теорією життєвого циклу Ф. Модільяні. Який дохід очікує одержувати щорічно споживач, якщо він володіє багатством 100 тис. гр. од. і щорічно споживає 50 тис. гр. од.?

10. За теорією перманентного доходу М. Фрідмена реальна відсоткова ставка дорівнює 2%. Споживання першого періоду становить 400 тис. гр. од., споживання другого періоду становить 200 тис. гр. од. Визначіть величину перманентного доходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Будаговська С., Кілієвич О.* Мікроекономіка та макроекономіка: Підруч. для студентів екон. спец. закл. освіти. — К.: Основи, 1998.
2. *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход: Учеб. для вузов / Пер. с англ. под ред. Н. Л. Фроловой. — М.: ЮНИТИ, 1997.
3. *Нуреев Р. М.* Курс микроэкономики: Учеб. для вузов. — М.: НОРМА, 2000.
4. *Селищев А. С.* Макроэкономика. — СПб.: Питер, 2000.
5. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

МАКРОЕКОНОМІЧНІ РІВНОВАЖНІ ТА БАЛАНСОВІ МОДЕЛІ

Базові моделі ринкової економіки
Моделі фіскальної політики
Моделі банківської системи
Балансові моделі

3.1. БАЗОВІ МОДЕЛІ РИНКОВО ЕКОНОМІКИ

Макроекономіка досліджує господарство в цілому, тобто всю сукупність ринків. Але багато ринків зводиться до трьох агрегованих: ринок благ (сукупність ринків товарів і послуг); фінансовий ринок (сукупність ринків цінних паперів і грошей); ринок чинників виробництва (сукупність ринків праці та капіталу) (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Сукупність ринків в економіці

На **ринку благ** рівновага досягається, якщо обсяг ВВП дорівнює запланованим витратам усіх суб'єктів товарного ринку на купівлю товарів і послуг, які вироблені в країні. Попит і пропозиція доходу на цьому ринку залежать від загального рівня цін: $Y_s = Y_d$ (див. рис. 3.2).

На ринку грошей рівновага досягається, якщо кількість запропонованих банківською системою грошей в економіці врівноважується попитом на них: $M_s = M_d$ (рис. 3.3).

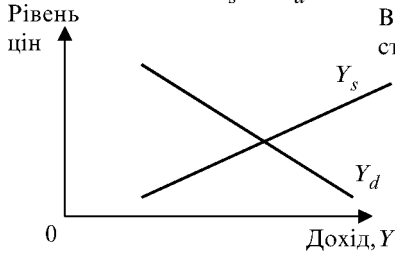


Рис. 3.2. Ринок благ

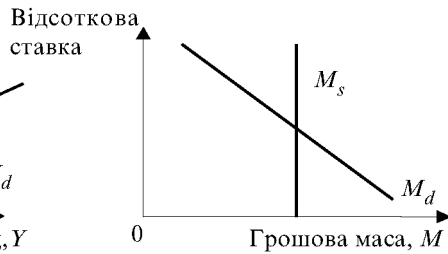


Рис. 3.3. Ринок грошей

Ринок цінних паперів, або ринок кредиту, охоплює всю сукупність довгострокових паперів, які приносять відсоток. Ціна цінних паперів є обернено залежною величиною від ставки відсотка: $1/r$. Рівновага досягається, якщо попит і пропозиція на ринку цінних паперів збігаються: $B_s = B_d$ (рис. 3.4).

На **ринку праці** рівновага досягається, якщо кількість запропонованих робочих місць врівноважується з пропозицією робочої сили: $N_s = N_d$ (рис. 3.5).

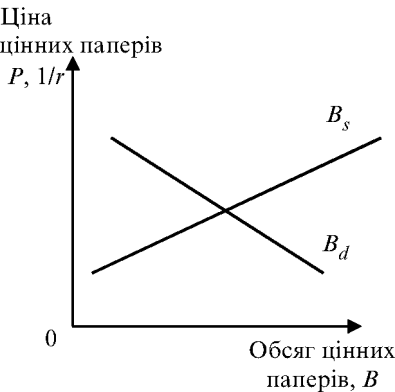


Рис. 3.4. Ринок цінних паперів

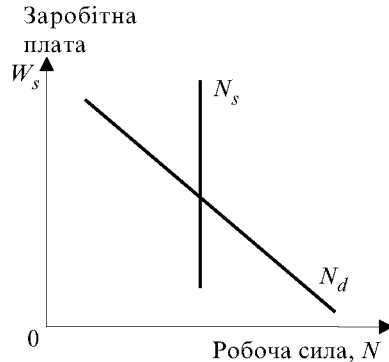


Рис. 3.5. Ринок праці

У стані загальної економічної рівноваги діє **закон Вальраса** (1834–1910), за яким в економіці, яка складається з n взаємопов'язаних ринків, на n -му ринку завжди буде рівновага, якщо вона буде досягнута на усіх інших $n-1$ ринках. Закон впливає з того, що сукупний попит і сукупна пропозиція усіх благ виражаються через їх ціни: то-

варів і послуг Y через P , цінних паперів B через $1/r$, праці N через W , грошей M через 1 .

Модель набуває вигляду:

$$PY_d + (1/r) B_d + WN_d + M_d = PY_s + (1/r) B_s + WN_s + M_s.$$

Згрупуємо змінні ліворуч. **Модель Вальраса** набуває вигляду:

$$P(Y_d - Y_s) + (1/r)(B_d - B_s) + W(N_d - N_s) + (M_d - M_s) = 0.$$

Макроекономічний аналіз за законом Вальраса повинен досліджувати $n-1$ ринок. Тому з аналізу, як правило, вилучається найскладніший — ринок цінних паперів.

В основу макроекономічного аналізу покладено модель економічного кругообігу.

Модель економічного кругообігу з участю держави (рис. 3.6) для закритої економіки містить у собі сектори: домогосподарства, фірми та держава і два види ринку: ринок благ і ринок ресурсів. Потoki “доходи–витрати” діють у протилежних напрямках, а сумарний потік доходів дорівнює сумарному витрат в умовах рівноваги.

Держава бере участь у регулюванні економіки трьома способами: 1) збиранням податків; 2) здійсненням державних витрат; 3) регулюванням кількості грошей в економіці.

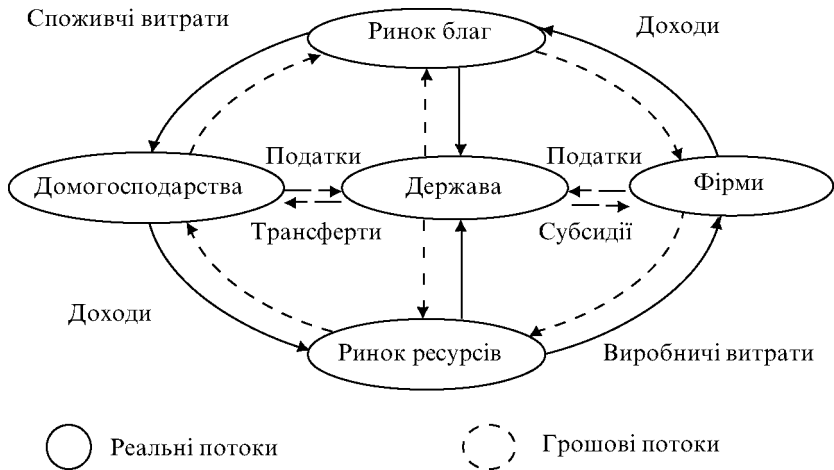


Рис. 3.6. Модель економічного кругообігу за участю держави

Модель “попит–пропозиція” — це модель мікроекономічної рівноваги. Рівновага товарного ринку — стан ринку, коли для продажу пропонується така кількість товару, яку споживач готовий купити. Закон попиту та пропозиції — ціна будь-якого товару змінюється, щоб врівноважити попит і пропозицію. Рівноважна ціна — ціна, яка врівноважує попит і пропозицію. Рівноважний обсяг — обсяг пропозиції та обсяг попиту в умовах, коли врівноважується попит і пропозиція (рис. 3.7).

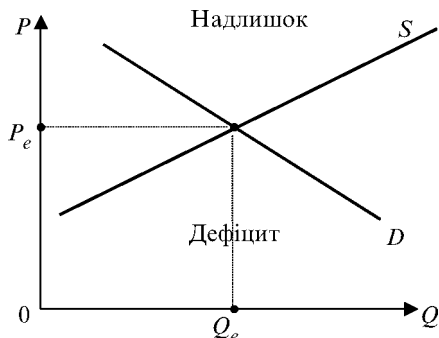


Рис. 3.7. Модель “попит–пропозиція”

Якщо попит на товар перевищує пропозицію товару, виникає **дефіцит** пропозиції, або надлишковий попит. Якщо попит на товар менший за пропозицію товару, виникає **надлишок** пропозиції, або дефіцит попиту.

Приклад. Побудуйте прями попиту та пропозиції. Визначте рівноважну ціну та кількість. Якщо ціна дорівнює 2,25 грн, що існує на ринку — товарний дефіцит чи надлишок?

Ціна, грн.	2,00	2,25	2,5	2,75	3,00
Обсяг попиту, тис. кг	200	190	180	170	160
Обсяг пропозиції, тис. кг	150	155	160	165	170

Розв’язання. Для запису рівнянь прямих попиту та пропозиції скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки.

Рівняння прямої попиту:

$$\frac{P - 2,00}{2,25 - 2,00} = \frac{Q_d - 200}{190 - 200} \Rightarrow Q_d = -40P + 280.$$

Рівняння прямої пропозиції:

$$\frac{P - 2,00}{2,25 - 2,00} = \frac{Q_s - 150}{155 - 150} \Rightarrow Q_s = 20P + 110.$$

Розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} Q = -40P + 280; \\ Q = 20P + 110. \end{cases}$$

Відповідь. Рівноважна ціна $P^* = 2,83$; рівноважна кількість $Q^* = 166,6$. При $P = 2,25$ попит на товар перевищує пропозицію товару ($D > S$), на ринку товарний дефіцит.

Моделю сукупного попиту та сукупної пропозиції — базова модель макроекономічної рівноваги (рис. 3.8).

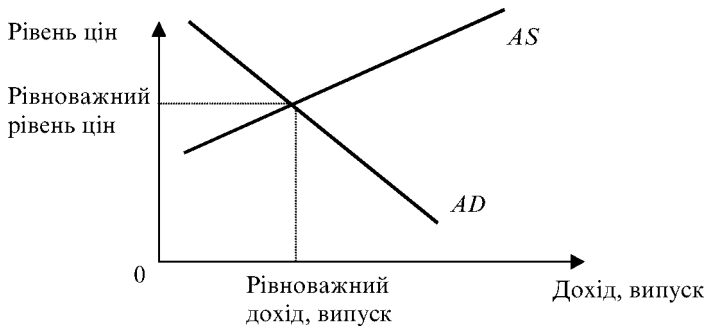


Рис. 3.8. Кейнсіанська модель $AD-AS$

Моделю сукупного попиту і сукупної пропозиції аналізує причини коливань рівня цін і реальних обсягів національного виробництва. Сукупний попит і сукупна пропозиція агрегуються відповідно з рівноважних величин попиту і пропозиції на усіх ринках товарів і послуг.

Сукупний попит (AD) — це загальний обсяг вітчизняних товарів і послуг, які готові купити домогосподарства, фірми та держава і економічні суб'єкти інших країн за певного рівня внутрішніх цін.

Від'ємний нахил кривої сукупного попиту визначається трьома ціновими чинниками: 1) ефектом багатства; 2) ефектом відсоткової ставки; 3) ефектом обмінного курсу.

Сукупна пропозиція (AS) — це обсяг товарів і послуг, який пропонується економікою для продажу за кожного рівня цін. Величина сукупної пропозиції визначається наявними в економіці капіталом, працею і технологією і може бути записана на основі виробничої функції.

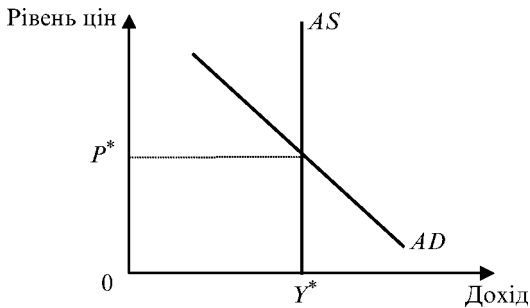


Рис. 3.9. Класична модель сукупної пропозиції

Класична модель сукупної пропозиції (рис. 3.9) — модель для довгострокового періоду.

Цінові чинники сукупної пропозиції:

1. Зміна відсоткової ставки.
2. Зміна рівня цін.

Нецінові чинники сукупної пропозиції:

1. Зміни цін на ресурси.
2. Зміни в продуктивності праці.
3. Зміни податків з підприємств і субсидій.

При зміні нецінових чинників змінюються середні витрати. Пряма сукупної пропозиції зміщується ліворуч або праворуч.

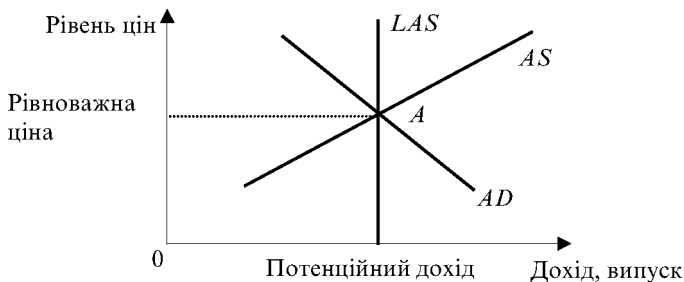


Рис. 3.10. Подвійна рівновага в моделі $AD-AS$

Перетин прямих сукупного попиту AD та довгострокової прямої сукупної пропозиції AS визначає рівноважний дохід, випуск та рівноважний рівень цін. Коли економіка досягає довгострокової рівноваги, увялення, заробітна плата і ціни змінюються таким чином, щоб короткострокова пряма сукупної пропозиції LAS також пройшла через цю точку. В точці A має місце подвійна рівновага (рис. 3.10).

Інвестиції — це економічні ресурси, які спрямовуються на збільшення реального капіталу суспільства. В макроекономіці базо-

вою інвестиційною функцією є функція, яка залежить від відсоткової ставки. Реальна відсоткова ставка — плата за придбання грошового капіталу для інвестування. Функція інвестицій є спадною і відображає обернену залежність між відсотковою ставкою та інвестиціями.

Фактичні інвестиції поділяють на планові та непланові. Цей поділ відображається в моделі економічної рівноваги “**випуск–витрати**”, графічна інтерпретація якої має назву “кейнсіанський хрест” (рис. 3.11).

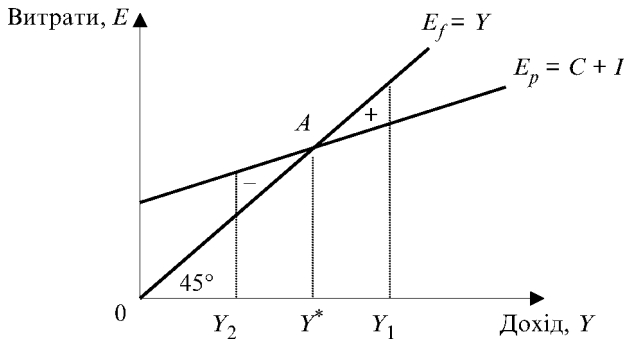


Рис. 3.11. Модель “витрати–випуск”

Бісектриса означає, що фактичні і планові витрати збігаються, “+” — незаплановане зростання, “-” — зменшення інвестицій у товарно-матеріальні запаси. У точці *A*, де витрати збігаються з доходом, досягається рівність планових і фактичних інвестицій, тобто встановлюється макроекономічна рівновага. Якщо фактичний дохід перевищує рівноважний, фірми виробляють більше, ніж покупці купляють. Відбувається непланове зростання інвестицій у товарні запаси, і виробництво буде мати тенденцію до спаду, оскільки економіка постійно прагне досягти рівноваги. Якщо рівноважний дохід перевищує фактичний, відбувається непланове скорочення інвестицій у товарні запаси і виробництво буде мати тенденцію до зростання.

3.2. МОДЕЛІ ФІСКАЛЬНО ПОЛІТИКИ

Припустімо, держава збирає податки T і здійснює витрати на придбання товарів нарівні з домогосподарствами та підприємствами G .

Модель має назву **кейнсіанська модель з участю держави** та набуває такого вигляду:

$$Y = AD, AD = C + Y + G, C = c_0 + c'(Y - T), I = I(r),$$

$$G = G_0, Y = AD = c_0 + c'(Y - T) + I + G,$$

де: Y — дохід, AD — сукупний попит; C — споживання; G — державні витрати; c_0 — автономні споживчі витрати; c' — гранична схильність до споживання; T — податки; $I(r)$ — інвестиції, що залежать від відсоткової ставки.

Виведемо значення мультиплікатора державних витрат через диференціювання рівняння: $Y(1 - c') = c_0 - c'T + I + G$.

$$\frac{dY}{dG}(1 - c') = 1; \quad \frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - c'} = m_G.$$

Отже, **мультиплікатор державних витрат** дорівнює:

$$m_G = \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - MPC},$$

де MPC — гранична схильність до споживання, ΔY — зміна доходу, ΔG — зміна державних витрат.

Якщо планові витрати враховують вплив податкових надходжень $T = tY$, мультиплікатор державних витрат відображає залежність автоматичних податкових вилучень від зміни ВВП і має вигляд:

$$m_{G/T} = \frac{1}{1 - MPC(1 - t)},$$

де t — гранична ставка оподаткування.

Мультиплікатор податків означає, що зростання податків на ΔT зменшує випуск $y - c'(1 - c')$ разів.

$$\Delta Y = m_T \Delta T; \quad m_T = -\frac{MPC}{MPS}.$$

Приклад. $MPC = 0,75$. Податки зросли з 80 до 100 млн дол. Як і на скільки зміниться рівноважний дохід?

Розв'язання.

$$\Delta Y = m_T \Delta T = -\frac{0,75}{1 - 0,75} \cdot 20 = -\frac{0,75}{0,25} \cdot 20 = -3 \cdot 20 = -60.$$

Відповідь. Рівноважний дохід зменшиться на 60 млн дол.

Бюджет — грошове вираження збалансованого кошторису доходів і видатків за певний період. Бюджет вважається дефіцитним,

якщо видатки перевищують надходження, нормальним — якщо вони рівні, профіцитним — якщо надходження перевищують видатки.

Модель державного бюджету:

$$BD = -S_g, S_g = T - T_r - N - G,$$

де S_g — державні заощадження; T — податки; T_r — трансферти; N — виплата відсотків за державним боргом; G — державні видатки.

Якщо $S_g < 0$, бюджет є дефіцитним, якщо $S_g > 0$ — профіцитним.

Приклад. Економіка країни характеризується наступними показниками (млрд гр. од.):

Споживчі витрати	– 120
Державні закупки товарів і послуг	– 50
Валові внутрішні інвестиції	– 40
Державні трансферти	– 6
Виплата відсотків за державним боргом	– 4
Податки	– 50

Для покриття дефіциту держбюджету випущено державні облігації та збільшено пропозицію грошей в економіці. Дефіцит держбюджету на 60 % фінансується випуском державних облігацій, на 40 % — збільшенням пропозиції грошей.

Розрахувати: а) дохід; б) державні заощадження; в) вартість державних облігацій і додаткової кількості грошей в економіці.

Розв'язання.

$$\text{а) } Y = C + I + G = 120 + 40 + 50 = 210.$$

$$\text{б) } BD = -S_g; \quad S_g = T - T_r - N - G = 50 - 6 - 4 - 50 = -10.$$

Дефіцит бюджету.

$$\text{в) } S_g = \Delta B + \Delta M; \quad \Delta B = 0,6BD = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ млрд гр. од.}$$

$$\Delta M = 0,4BD = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ млрд гр. од.}$$

Відповідь. Дефіцит у 10 млрд гр. од. фінансується випуском облігацій на суму 6 млрд гр. од. і випуском грошей на суму 4 млрд гр. од.

3.3. МОДЕЛІ БАНКІВСЬКО СИСТЕМИ

Депозити комерційних банків служать резервами грошової системи. Сума коштів, що внесені як депозити на банківські рахунки і не видані як кредити, тобто досяжні для забезпечення вимог вкладників у будь-який момент, становить **обов'язкові** резерви комерційного банку TR . Часткове банківське резервування — система, за якої банки тримають у резервах тільки частину загальної суми внесків. Це означає, що всі комерційні банки повинні мати обов'язкові резерви R пропорційно до суми відкритих депозитів D . Норма обов'язкового резервування встановлюється законом

і визначається як відношення суми обов'язкових резервів до суми залучених депозитів: $r = R/D$. **Надлишкові резерви** — величина, на яку фактичні резерви банку перевищують його обов'язкові резерви: $E = TR - R$.

Банківська система загалом може надати позики, обсяг яких у кілька разів перевищує її початкові надлишкові резерви. Коефіцієнт $1/r$ називається **простим депозитним, або банківським мультиплікатором**. Простий депозитний мультиплікатор ($m = 1/r$) визначає максимальну кількість нових депозитних грошей, що створюється однією грошовою одиницею надлишкових резервів при заданому рівні норми обов'язкового резервування.

Модель банківської системи набуває вигляду:

норма обов'язкового резервування $r = R/D$;

надлишкові резерви $E = TR - R$;

простий депозитний мультиплікатор $m = 1/r$.

Модель банківської системи з урахуванням депозитних і готівкових грошей. При цьому враховується: роль Центрального банку, поведінка комерційних банків, можливий відтік частини грошей з депозитів банківської системи у готівку.

Коефіцієнт депонування грошей — це відношення готівки до депозитів: $c = C/D$. Коефіцієнт депонування характеризує структуру зберігання населенням ліквідних коштів у вигляді їх розподілу між готівковими грошима C і коштами на поточних (чекових) депозитах D . **Грошовий мультиплікатор**: $m_c = (c + 1)/(c + r)$.

Модель набуває вигляду:

резервна норма $r = R/D$;

коефіцієнт депонування $c = C/D$;

надлишкові резерви $E = TR - R$;

грошовий мультиплікатор $m_c = (c + 1)/(c + r)$.

Приклад. Норма обов'язкового резервування дорівнює 0,2. Сума обов'язкових резервів 1 млрд гр. од. Готівка становить 0,5 млрд гр. од. У скільки разів може бути збільшена пропозиція грошей?

Розв'язання.

$$D = R/r = 1/0,2 = 5 \text{ млрд гр. од.}; c = C/D = 0,5/5 = 0,1;$$

$$m_c = (c + 1)/(c + r) = (1 + 0,1)/(0,2 + 0,1) = 3,66.$$

Відповідь. Пропозиція грошей може бути збільшена у 3,66 раза.

3.4. БАЛАНСОВІ МОДЕЛІ

В основі створення моделей міжгалузевого балансу лежить балансовий метод — взаємне зіставлення наявних матеріальних, трудових і фінансових ресурсів і потреб у них.

Основу інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці становить матриця коефіцієнтів затрат ресурсів за конкретними напрямками їх використання.

У моделі МГБ таку роль відіграє **технологічна матриця**.

Принципова схема МГБ виробництва і розподілу сукупного суспільного продукту у вартісному вираженні наведена у таблиці. В основу схеми покладено поділ сукупного продукту на 2 частини: проміжний і кінцевий. Усе народне господарство поділено на n галузей. При цьому кожна галузь представлена у балансі як виробнича і як споживча.

Схема міжгалузевого балансу

Виробничі галузі \ Споживчі галузі	Споживчі галузі					Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	...	n		
1	X_{11}	X_{12}	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{2n}	Y_2	X_2
3	I
...
n	X_{n1}	X_{n2}	X_{nn}	Y_n	X_n
Амортизація	c_1	c_2	c_3	...	c_n	IV	
Оплата праці	v_1	v_2	v_3	III ...	v_n		
Чистий дохід	m_1	m_2	m_3	...	m_n		
Валовий продукт	X_1	X_2	X_3	...	X_n		ΣX_i

Виділяють 4 частини, які мають різний економічний зміст. Вони називаються квадрантами балансу.

I — таблиця міжгалузевих матеріальних зв'язків.

II — кінцева продукція усіх галузей матеріального виробництва.

III — національний дохід як сума чистої продукції і амортизації.

IV — кінцевий розподіл і використання національного доходу.

У матричній формі модель МГБ можна записати:

$$X = AX + Y,$$

де $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$ — вектор-стовпець валової продукції; $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}$ — вектор-стовпець кінцевої продукції.

$A = (a_{ij})$, де a_{ij} — коефіцієнт прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції, що показує, яку кількість продукції i -ї

галузі необхідно, враховуючи тільки прямі затрати, для виробництва одиниці продукції j -ї галузі.

Запишемо модель МГБ у вигляді **моделі Леонтєва**:

$(E - A)X = Y$, де E — одинична матриця.

Приклад. Обчисліть обсяги виробництва кінцевого продукту Y_1 та Y_2 , якщо відома матриця прямих витрат A та обсяги валового продукту X_1 та X_2 .

$$A = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,7 \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$E - A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{vmatrix}$$

$$(E - A) \cdot X = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2 \\ 0,5 \end{vmatrix}$$

Відповідь. Для виробництва одиниці продукції необхідно 0,2 одиниці продукції 1 та 0,5 продукції 2.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- Ринок благ
- Фінансовий ринок
- Ринок чинників виробництва
- Модель Вальраса
- Модель економічного кругообігу
- Модель “Попит–пропозиція”
- Мультиплікатор
- Коефіцієнт депонування грошей
- Класична модель $AD-AS$
- Кейнсіанська модель $AD-AS$
- Подвійна рівновага
- Кейнсіанський хрест
- Модель “Сукупний попит — сукупна пропозиція”
- Модель Леонтєва
- Часткове резервування депозитів
- Модель міжгалузевого балансу

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які ринки аналізуються в моделі Вальраса?
2. Яким чином бере участь у регулюванні економіки держава за моделлю економічного кругообігу?
3. Чим зумовлена рівновага на товарному ринку за моделлю “попит–пропозиція”?

4. Що визначає різницю в моделях “попит–пропозиція” та “сукупний попит — сукупна пропозиція”?
5. Чим відрізняються класична та кейнсіанська моделі “сукупний попит — сукупна пропозиція”?
6. Що визначає попит, а що пропозицію в моделі “кейнсіанський хрест”?
7. Як врівноважуються дохід і витрати за моделлю “випуск–витрати”?
8. Яка різниця між простим депозитним і складним грошовим мультиплікаторами?
9. Який метод є основою моделей міжгалузевго балансу?
10. В якій моделі для розв’язання використовується одинична матриця?

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. Закон Вальраса стверджує, якщо на усіх ринках, крім одного, існує рівновага, то:

- а) ринок перебуває у стані нестабільності;
- б) ринок перебуває у стані часткової рівноваги;
- в) останній ринок перебуває у стані рівноваги;
- г) останній ринок не перебуває у стані рівноваги.

2. Зазначте неправильне твердження:

- а) на ринку благ рівновага досягається, якщо обсяг ВВП дорівнює запланованим витратам усіх суб’єктів на купівлю благ, що вироблені в країні;
- б) на ринку праці рівновага досягається, якщо кількість запропонованих робочих місць врівноважена з попитом на заробітну плату;
- в) ринок цінних паперів охоплює усю сукупність довгострокових паперів, які приносять відсоток;
- г) на ринку благ домогосподарства виступають покупцями.

3. У кейнсіанській моделі “Сукупний попит — сукупна пропозиція” крива сукупної пропозиції є:

- а) вертикальною;
- б) горизонтальною;
- в) зростаючою;
- г) спадною.

4. Якщо попит на товар перевищує пропозицію товару, виникає:
 а) дефіцит товару; б) надлишок товару;
 в) дефіцит попиту; г) немає вірної відповіді.
5. Сукупний попит у моделі $AD-AS$ — це:
 а) реальний ВВП; б) номінальний ВВП;
 в) сума запланованих витрат економічних суб'єктів; г) дохід країни.

6. Записати функцію попиту як залежність кількості від ціни $Q(P)$ за даними таблиці:

Ціна, грн. за од., P	4	6	8	10
Кількість, од., Q	30	26	22	18

7. У моделі “витрати–випуск” сукупний попит представлений:
 а) запланованими витратами; б) фактичними витратами;
 в) незапланованими інвестиціями; г) фактичними доходами.

8. Економіка країни характеризується наступними показниками (млрд грн. од.):

Споживчі витрати	– 100
Державні закупки товарів і послуг	– 30
Валові внутрішні інвестиції	– 25
Державні трансферти	– 4
Виплата відсотків за державним боргом	– 3
Податки	– 35

Для покриття дефіциту держбюджету випущено державні облігації та збільшено пропозицію грошей в економіці. Дефіцит держбюджету на 50 % фінансується випуском державних облігацій, на 50 % — збільшенням пропозиції грошей.

Розрахуйте: а) дохід; б) державні заощадження; в) вартість державних облігацій і додаткової кількості грошей в економіці.

9. Державні витрати зросли на 2 млрд грн. од. Податки зменшились на 5 млрд грн. од. Гранична схильність до споживання 0,8. Як і на скільки змінився рівноважний дохід?

10. Економіка країни описується рівняннями:

$$Y = C + I + G; C = 50 + 0,8(Y - tY); t = 0,15; G = 5; I = 12 + 0,3Y.$$

Визначте рівноважний дохід.

11. Обов'язкові резерви банку становлять 8 млн гр. од. Депозити складають 24 млн гр. од. У скільки разів може бути збільшена пропозиція грошей в економіці?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Замков О. О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В.* Математические методы в экономике: Учебник. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ; Дело и сервис, 1999.
2. *Мэнкью Н. Г.* Принципы экономики. — СПб.: Питер Ком, 1999.
3. *Селищев А. С.* Макроэкономика. — СПб.: Питер, 2000.
4. *Малши Н. А.* Макроекономіка: Навч. посіб. — К.: МАУП, 2003.

Розділ 4

ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ

Виробнича функція

Моделі економічного циклу

Моделі економічного зростання

4.1. ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ

Для опису взаємозв'язку між затратами чинників виробництва і обсягом продукції, що випускається, в економіці використовують поняття виробничої функції.

Технологічна залежність між структурою затрат ресурсів, наприклад працею (L) та капіталом (K), і максимально можливим випуском продукції (Q) записується за допомогою такої виробничої функції:

$$Y = F(L, K) \text{ або } Q = F(L, K).$$

Виробнича функція показує, який максимальний обсяг випуску Y може бути одержаний при кожному конкретному наборі витрачених ресурсів і незмінній технології. Зміна технології приводить до зміни самої функціональної залежності.

Введемо позначення: Q — обсяг випуску; L — кількість праці; K — кількість фізичного капіталу; A — змінна, яка залежить від ефективності виробничих технологій; $F()$ — функція, яка визначає залежність обсягів випуску продукції від значень витрат чинників виробництва.

Більшість виробничих функцій має властивість **постійної віддачі від масштабу**. Це означає, що при одночасній зміні всіх чинників виробництва на одну й ту саму величину функція змінюється на ту ж саму величину. Розглянемо виробничу функцію для двох чинників L та K .

Математично це означає, що для будь-якого додатного числа z :

$$zQ = A F(zL, zK).$$

Якщо $z=1,2$, то при зростанні обох чинників виробництва на 20 % обсяг випуску продукту також зросте на 20 %, або в 1,2 раза.

Залежно від кількості чинників виробнича функція визначається як **одночинникова**, **двочинникова**, **багаточинникова**.

Функціональна залежність може бути подана в табличній, графічній та аналітичній формах.

Для неперервної і диференційованої двочинникової виробничої функції формула може бути записана з використанням часткових похідних функції двох змінних:

$$MPL = \frac{\partial F(L, K)}{\partial L}; \quad MPK = \frac{\partial F(L, K)}{\partial K}.$$

Технологічна норма заміщення *MRTS* показує вибір між двома чинниками у виробництві. Вона вимірює пропорцію, у якій фірмі потрібно замінити один чинник іншим, щоб залишити випуск без змін.

$$MRTS(K, L) = \frac{\Delta L}{\Delta K} = -\frac{MPK}{MPL}.$$

Виробнича функція відповідає **закону спадної віддачі чинників виробництва**.

Розглянемо двочинникову виробничу функцію (див. таблицю) за даними так званої виробничої сітки. Кожна клітина таблиці відображає максимальний обсяг випуску, який забезпечується відповідними обсягами чинників [1].

Робочий час <i>L</i> , людино-днів за місяць	Витрати капіталу (<i>K</i>), одиниць за місяць			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	5	10
3	3	5	10	15
4	4	6	13	20
5	5	10	15	22
6	6	12	17	23
7	7	13	19	24
8	8	14	20	25

Для побудови двочинникової функції вибираємо з таблиці різні комбінації ресурсів, які забезпечують один і той самий обсяг випуску, і наносимо точки з відповідними координатами (*L*, *K*) на координатну площину. Якщо з'єднати ці точки плавною кривою, одержимо лінію незмінного випуску — ізокванту (рис. 4.1). **Ізокванта** — крива,

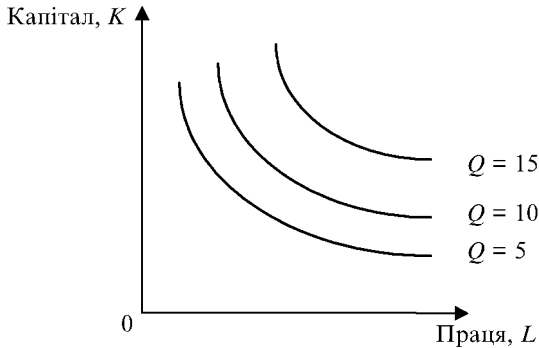


Рис. 4.1. Карта ізоквант

що показує всі можливі комбінації ресурсів (L, K), які дозволяють отримати певний фіксований обсяг виробництва (Q).

Аналогічно можна розглянути різні варіанти досягнення обсягів випуску $Q = 10$, $Q = 15$ та побудувати відповідні їм ізокванти. Сукупність ізоквант однієї виробничої функції, кожна з яких відповідає певному обсягу випуску продукції, називається картою ізоквант. Функція відображає залежність між обсягом випуску (Y) та працею (L).

Типовим прикладом виробничої функції в аналітичній формі може бути **виробнича функція Кобба–Дугласа**:

$$Q = aL^b K^c; a, b, c > 0; b, c < 1.$$

Її ізокванти мають вигляд кривих, які ми розглянули вище. Вони опуклі в бік початку координат і не перетинають їх, а необмежено наближаються до координатних осей. Це означає, що чинники виробництва можуть лише частково замінювати один одного, але повна заміна є неможливою, тобто $F(0, K) = F(L, 0) = 0$.

Наступний приклад виробничої функції — функція з фіксованими пропорціями чинників, яка має назву **виробничої функції Леонтєєва** (рис. 4.2): $Q = \min(aL, bK)$; $a, b > 0$.

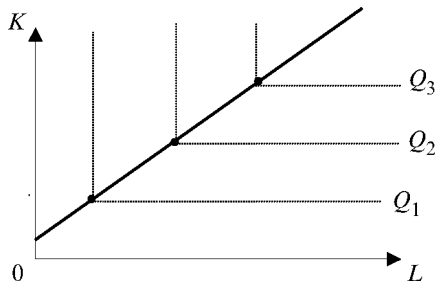


Рис. 4.2. Виробнича функція Леонтєєва

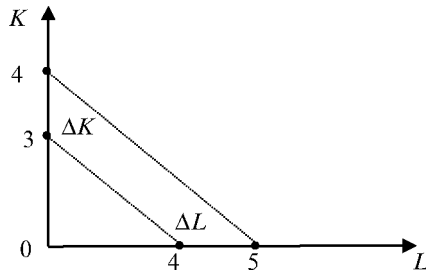


Рис. 4.3. Лінійна виробнича функція з повним заміщенням чинників виробництва

Третій приклад — лінійна виробнича функція з повним заміщенням чинників виробництва (рис. 4.3): $Q = aL + bK$; $a, b > 0$.

Для випадку $a = b = 1$ (рис. 4.3) $\Delta K/\Delta L = 1$.

4.2. МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЦИКЛУ

Економічний цикл (цикл ділової активності) — це періодичний підйом або спад реального ВВП на фоні загальної тенденції до зростання.

Кожен цикл становить певну послідовність, яка складається з альтернативних фаз, що повторюються. Економічний цикл характеризується: 1) самовідтворенням; 2) безперервністю; 3) хвилеподібним характером динаміки макроекономічних показників. Двофазові моделі містять у собі фази піднесення і спаду та найвищу і найнижчу точки циклу.

За тривалістю економічні цикли поділяють на: короткі (малі) — коливання ділової активності 3–4 роки; середні — коливання ділової активності 8–10 років; великі (довгі хвилі) — з періодичністю 48–55 років.

Модель Самуельсона–Хікса — це кейнсіанська модель економічного циклу.

У моделі Самуельсона–Хікса беруть участь два економічних суб'єкти: домогосподарства і фірми. Припускається фіксованість рівня цін і відсоткової ставки [2].

Споживання поточного періоду C_t визначається доходом попереднього періоду Y_{t-1} :

$$C_t = c' Y_{t-1},$$

де $c' = MPC$ — гранична схильність до споживання.

Функція сукупного попиту має вигляд:

$$Y_t^d = c' Y_{t-1} + I_t^a.$$

Це — **статична модель** циклу. I_t^a — автономні інвестиції фірм. При зростанні автономних інвестицій за принципом мультиплікатора зростає сукупний попит і дохід. Приріст доходу викликає зміну індукційованих інвестицій (інвестиції, які залежать від доходу). Отже, ефект мультиплікатора викликає дію акселератора. **Акселератор** — відношення приросту індукційованих інвестицій до відносного приросту доходу.

Формула акселератора:

$$A = \frac{I_t^m}{Y_{t-1} - Y_{t-2}}.$$

Отже, функція сукупного попиту може бути представлена так:

$$Y_t^d = c' Y_{t-1} + I_t^a + A(Y_{t-1} - Y_{t-2}).$$

Це — **динамічна модель** економічного циклу, або модель взаємодії мультиплікатора та акселератора, у якій сукупний попит залежить від c' та A . За Хіксом, c' та A можуть викликати коливання, а не вибухи попиту, оскільки існують певні обмеження. Нижнє обмеження — величина амортизаційних відрахувань, верхнє — рівень повної зайнятості.

Модель Калдора — кейнсіанська модель економічного циклу (рис. 4.4).

Особливості моделі.

1. Функції споживання та інвестицій мають нелінійний характер та описуються логістичними кривими (S -кривими).

2. Рівновага економічної системи залежить від граничної схильності до заощадження та граничної схильності до інвестування. Ці величини визначають нахил ліній заощадження та інвестицій. Якщо гранична схильність до інвестування більша за граничну схильність до заощадження, то економіка перебуває у нестійкій рівновазі. Якщо

гранична схильність до інвестування менша за граничну схильність до заощадження, то економіка перебуває у стійкій рівновазі.

3. За Калдором, обсяг інвестицій та заощаджень змінюється залежно від фази економічного циклу [6].

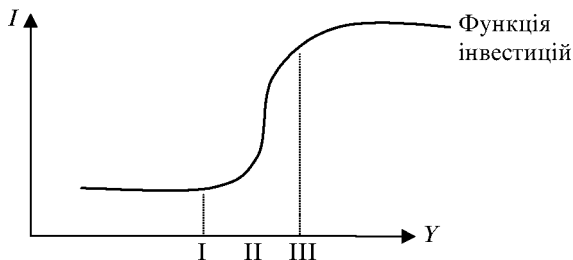


Рис. 4.4. Зміна функції інвестицій від зміни доходу

Розглянемо чотирифазову модель економічного циклу, яка складається з таких фаз: спад, депресія, поживавлення, піднесення. В умовах *спаду* та *депресії* спостерігається незначний рівень безробіття і недовантаження виробничих потужностей. Для збільшення доходу інвестиції не потрібні, оскільки при зростанні зайнятості зросте завантаження виробничих потужностей. Лінія інвестицій у цьому випадку є пологою (I). В умовах *поживавлення* існують висока зайнятість і повне завантаження виробничих потужностей. Тому для збільшення виробництва і доходу потрібні інвестиції. Еластичність інвестицій за доходом більша за одиницю у зв'язку із зростанням реального капіталу. Лінія інвестицій набуває крутизни (II). В умовах *піднесення* (надлишкової зайнятості та високого доходу або інфляційного розриву) інвестиції втрачають еластичність за доходом. Їх упровадження пов'язане зі значними втратами та ризиком (III).

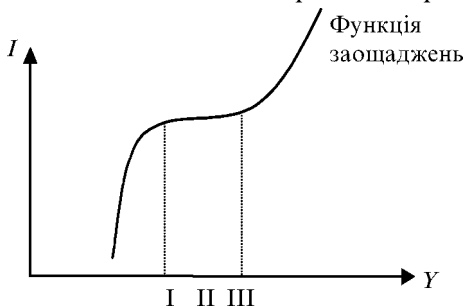


Рис. 4.5. Зміна функції заощаджень від зміни доходу

При *спаді* та *депресії* гранична схильність до заощаджень є високою, оскільки люди прагнуть більше заощадити “на чорний день”. Лінія заощаджень є крутою (I). При *пожевлеленні* гранична схильність до заощаджень зменшується, а гранична схильність до споживання зростає. Лінія заощаджень є пологою (II). При *піднесенні* гранична схильність до заощаджень зростає. Лінія заощаджень є крутою (див. рис. 4.5).

Об’єднаємо графіки функцій інвестицій і заощаджень.

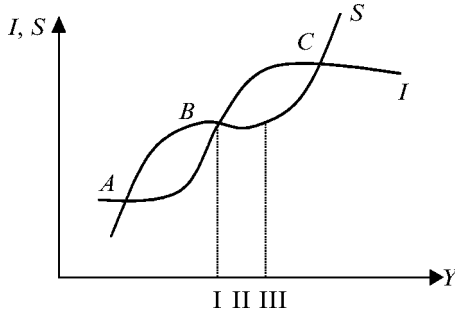


Рис. 4.6. Рівновага у моделі Калдора

Рівновага на ринку благ встановлюється за умови $I(Y, t) = S(Y, t)$ (рис. 4.6). У моделі Калдора така статична рівновага може бути досягнута як короткострокова. Протягом одного циклу значення обсягів заощаджень та інвестицій може збігатися тільки тричі (точки A, B, C).

У точках A та C $MPS > MPI \Rightarrow$ рівновага стійка, оскільки відхилення від A та C праворуч викликає товарний надлишок ($S > I$) і сприяє зменшенню обсягу виробництва. Відхилення ліворуч викликає товарний дефіцит і сприяє зростанню виробництва.

У точці B: $MPI > MPS \Rightarrow$ рівновага нестійка, оскільки будь-яке випадкове відхилення від точки B ліворуч призводить до товарного надлишку ($S > I$). А це буде викликати подальший спад виробництва. Відхилення від точки B праворуч утворює товарний дефіцит ($I > S$), що викликає подальше зростання виробництва. У точках A та C рівновага короткострокова. Вона порушується внаслідок зміни схильності підприємців до інвестування.

В умовах *спаду* та *депресії* гранична схильність до інвестування є малою: $I_c < 0$, $I - A < 0$, $I < A$ (рис. 4.7 а, б). Дефіцит діючого капіталу викликає зростання граничної схильності до інвестування, попит на інвестиції зростає, і графік $I(Y, t)$ зміщується догори.

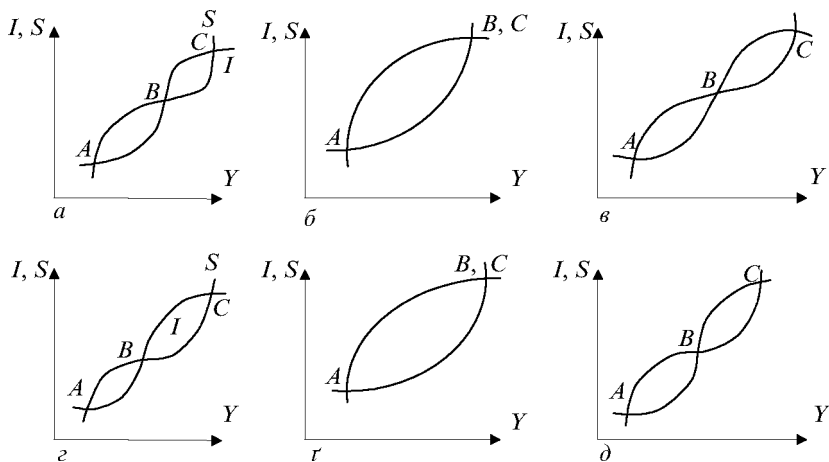


Рис. 4.7. Модель Калдора

В умовах піднесення гранична схильність до інвестування є великою: $I_c > 0$, $I - A > 0$, $I > A$ (рис. 4.7, в). Обсяг капіталу перевищує максимально допустимий, гранична схильність до інвестування спадає, попит на інвестиції зменшується і графік $I(Y, t)$ зміщується донизу, поки не починається криза (рис. 4.7, з, г). Отже, за економічного циклу спостерігається почергова зміна стійкої та нестійкої рівноваги.

4.3. МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

Кейнсіанська модель економічного зростання Домара була запропонована наприкінці 40-х років ХХ ст. Вона визначає роль інвестицій у збільшенні сукупного попиту та у збільшенні виробничих потужностей сукупної пропозиції в часі. Є. Домар досліджував проблему повної зайнятості в довгостроковому періоді та необхідність врахування обох складових інвестицій — мультиплікатора та акселератора.

Основні припущення моделі.

1. Технологія виробництва подається у вигляді виробничої функції Леонтьєва.
2. Негнучкість цін викликає на ринку праці надлишкову пропозицію.

3. Вибуття капіталу відсутнє.
4. Норма заощадження є величиною постійною.
5. Випуск залежить від єдиного ресурсу — капіталу.
6. Ринок благ збалансований.
7. Інвестиційний лаг дорівнює нулю.

Припустімо, що сукупний попит зростає в результаті інвестиційних витрат. Тоді приріст доходу набуде такого значення:

$$\Delta Y = \Delta I / s',$$

де $S' = MPS$ — гранична схильність до заощадження.

За моделлю Домара, у короткостроковому періоді зростання інвестицій не призводить до зростання виробничих потужностей. Це трапляється у довгостроковому періоді. У моделі визначається необхідний темп зростання інвестицій для того, щоб виконувалась тождність між темпом приросту виробничих потужностей і темпом приросту доходу. Він задається таким рівнянням:

$$\Delta I / I = MPS \cdot Q,$$

де Q — капіталоемність, відношення приросту інвестицій до приросту випуску продукції.

Ліворуч у рівнянні — річний темп зростання інвестицій, який повинен збільшуватись з річним темпом $s'Q$ для забезпечення повної зайнятості шляхом зростання виробничих потужностей.

Кейнсіанська **модель економічного зростання Харрода** розроблена 1939 р. Вона досліджує проблеми збалансованого зростання на основі принципу акселератора та очікувань підприємців.

Основні умови моделі.

1. Тотожність заощаджень та інвестицій: $S_t = I_t$, де t — період часу.
2. Заощадження залежать від національного доходу того ж самого періоду: $S_t = s Y_t$, де s — схильність до заощадження.
3. Інвестиції залежать від швидкості зміни доходу від одного періоду до наступного періоду: $I_t = a(Y_t - Y_{t-1})$, де Y_t — дохід у поточному періоді; Y_{t-1} — дохід у минулому періоді; a — акселератор.
4. Умова рівноваги: $\Delta Y_t / Y_t = s/a$, де $\Delta Y = Y_t - Y_{t-1}$.

У лівій частині рівняння — відсоткова зміна доходу. У правій — відношення величини s (граничної схильності до заощадження) до акселератора. Швидкість зміни доходу називається **гарантованим темпом зростання** (для підприємців).

Фактичний темп зростання визначається в моделі сумою темпу зростання робочої сили і темпу зростання продуктивності праці.

Природний темп зростання — це максимально допустимий темп зростання населення та технічного прогресу.

Якщо природний темп зростання перевищує гарантований, економіка відхиляється від гарантованого темпу зростання і спостерігається довгострокове піднесення економіки. Якщо гарантований темп зростання перевищує природний, спостерігається довгострокова стагнація економіки.

Економіка набуває стійкого розвитку лише за умови рівності фактичного, гарантованого та природного темпів зростання. Оскільки такого стану в економіці досягти практично неможливо, динамічна рівновага в умовах економічного зростання є нестійкою. Отже, за кейнсіанською теорією в економіку повинна втручатись держава.

Модель Харрода–Домара належить до макроекономічних моделей економічного зростання і є їх узагальненням.

Розглянемо модель з неперервним часом, яка описує динаміку доходу $Y(t)$ [3].

Дохід розглядається як сума споживання та інвестицій: $Y(t) = C(t) + I(t)$. Економіка вважається закритою, отже, чистий експорт дорівнює нулю. Держава не втручається в економіку.

Основні умови моделі.

1. Швидкість зростання доходу пропорційна інвестиціям:

$I(t) = BdY/d_t$, де B — коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу. $1/B$ — прирісна капіталовіддача.

2. Інвестиційний лаг дорівнює нулю. Інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу, тобто $\Delta K(t) = I(t)$, де $\Delta K(t)$ — неперервна функція приросту капіталу в часі.

3. Вибуття капіталу немає.

4. Виробнича функція в моделі є лінійною.

5. Випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом.

6. Модель не враховує технічного прогресу.

Модель призначена для вивчення взаємозв'язку динаміки інвестицій і зростання випуску. Для прогнозування величини сукупного випуску її не застосовують.

Показник обсягу споживання $C(t)$ може бути постійним у часі, зростати із заданим постійним темпом або мати будь-яку іншу динаміку.

Припустімо, що $C(t) = C$, або є величиною, що постійна у часі. Підставивши в рівняння доходу величину C , одержимо неоднорідне лінійне диференційне рівняння: $Y(t) = BY(t) + C$.

Його частковим розв'язанням є $Y(t) = C$. Додамо це розв'язання до загального розв'язання однорідного рівняння $Y(t) = A e^{(\frac{t}{B})}$, та одержимо його загальне розв'язання:

$$Y(t) = A e^{(\frac{t}{B})} + C.$$

Підставимо $t = 0$, одержимо $A = Y(0) - C = I(0)$ та

$$Y(t) = (Y(0) - C) e^{(\frac{t}{B})} + C.$$

Неперервний темп приросту доходу в цьому розв'язанні дорівнює:

$$y(t) = \frac{1}{B} \left[1 - \frac{C}{Y(t)} \right].$$

Він складає

$$\frac{1}{B} \cdot \left[1 - \frac{C(0)}{Y(0)} \right]$$

у початковий момент часу (при $t = 0$) і, зростаючи, збігає до $1/B$ при $t \rightarrow \infty$.

Це означає, що дохід зростає, а постійний обсяг споживання становить все меншу його долю.

Величина у дужках $\alpha(t) = [1 - C/Y(t)]$ є нормою нагромадження у момент часу t , і темп приросту доходу виявляється пропорційним цій величині, так само як показнику прирідної капіталовіддачі $1/B$.

Отже, зростання норми нагромадження пропорційно збільшує темпи приросту доходу. Однак це знижує рівень поточного споживання. Для розв'язання проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпів зростання та рівня поточного добробуту у модель зазвичай включають елементи оптимізації.

Розглянемо варіант моделі, у якій споживання зростає з постійним темпом r .

$$C(t) = C(0) e^{rt}.$$

Диференційне рівняння цієї моделі має вигляд:

$$Y(t) = B Y(t) + C(0) e^{rt}.$$

Розв'язання цього рівняння є таким:

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br} \right] e^{\frac{t}{B}} + \left[\frac{C(0)}{1 - Br} \right] e^{rt}.$$

Висновок з моделі є таким. Темп приросту споживання r не повинен бути більшим за максимально можливий загальний темп приросту $1/B$, оскільки з часом споживання може перевищити дохід. Для вибору значення r потрібно також брати до уваги переваги осіб, які приймають рішення.

Неокласична модель економічного зростання Р. Солоу. Модель була вперше наведена у праці Роберта Солоу “Внесок до теорії економічного зростання” (1956). За розробку теорії економічного зростання Р. Солоу в 1987 р. було присуджено Нобелівську премію. Модель зростання Солоу є складною теоретичною моделлю. Над її розробкою автор працював десятиліття. Модель показує, як заощадження, зміна чисельності населення і технічний прогрес впливають на економічне зростання.

Основні передумови моделі.

1. Враховано вплив трьох чинників: запасу капіталу, зростання населення та технічного прогресу.

2. Визначено чинники зростання, які мають короткостроковий вплив (запас капіталу та зростання чисельності населення) і довгостроковий (технічний прогрес).

3. Визначальну роль відіграють заощадження.

4. Кінцевим результатом є зростання продуктивності праці $y = Y/L$, де Y — обсяг випуску; L — кількість праці; y — продуктивність праці.

Значення y — продуктивності праці — можна одержати перетворенням виробничої функції:

$$Y = F(K, L); Y/L = F(K/L, 1); y = f(k),$$

де K — кількість фізичного капіталу.

5. Заощадження дорівнюють інвестиціям: $S = I$.

Пропозиція валового продукту в моделі Солоу формалізується у вигляді виробничої функції: $Y = F(K, L)$. Попит задається через характеристики споживання (c) та інвестицій (i) у розрахунку на одиницю праці: $y = c + i$, де $c = C/L$, $i = I/L$.

Оскільки споживання є пропорційним до доходу і залежить від норми заощаджень (s), то:

$$c = (1 - s)y, i = sy + i.$$

Звідки $i = sy$, $i = sf(k)$.

В умовах рівноваги інвестиції дорівнюють заощадженням і є пропорційними до доходу. Після перетворень одержуємо сукупність рівнянь, які виражають дохід, споживання, інвестиції в розрахунку на одного працівника як функцію від капіталоозброєності праці (див. рис. 4.8):

$$y = f(k), i = sf(k), c = f(k) - sf(k).$$

Запас капіталу залежить від обсягу інвестицій та вибуття капіталу (рівня його амортизації). Їх співвідношення визначає зростання капіталу.

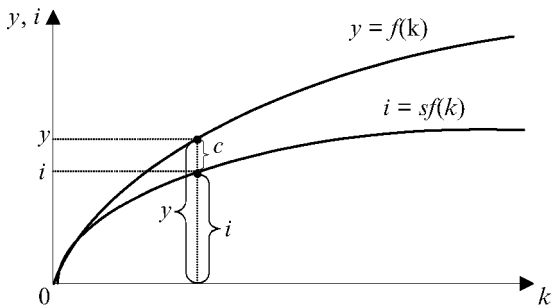


Рис. 4.8. Виробнича функція та функція інвестицій

Виробнича функція є нелінійною і характеризується спадною граничною продуктивністю праці. Норма заощаджень s є постійною, і заощадження дорівнюють інвестиціям. Чим більшим є запас існуючого капіталу, тим більше буде його вибуття. Функція вибуття є лінійною.

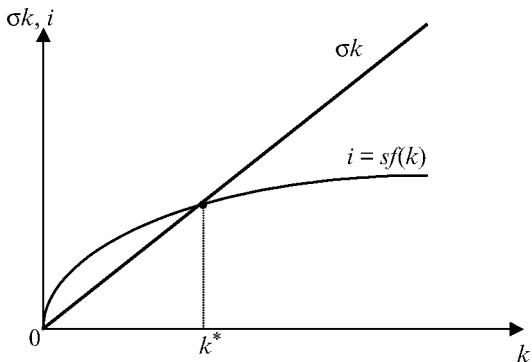


Рис. 4.9. Стійкий рівень капіталоозброєння праці

За стійкого рівня капіталоозброєння праці k^* досягається рівність між величиною інвестицій та амортизації. За будь-якого рівня капіталоозброєння економіка збігає до точки рівноваги k^* (рис. 4.9).

Співвідношення між інвестиціями (валовими) та амортизацією є показником стану економіки країни (рис. 4.10).

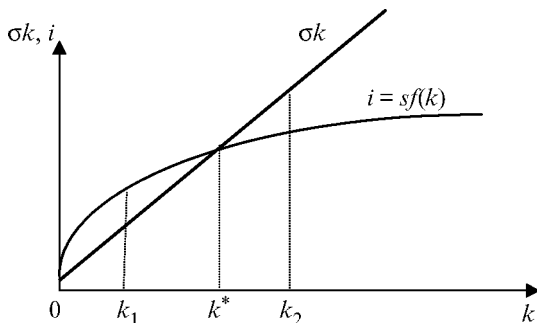


Рис. 4.10. Зростаюча, статична та стагнуча економіка

Точка k_1 означає, що капіталу інвестується більше, ніж виробляється. Рівень інвестицій перевищує рівень вибуття капіталу. Це означає, що в економіці накопичуються запаси капіталу. За рік споживається менше капіталу, ніж виробляється, економіка **зростаюча**. Точка k^* означає стійкий стан, або рівність між рівнем інвестицій і рівнем вибуття капіталу (інвестиціями). Економіка є **статичною** або застійною. Точка k_2 означає, що капіталу інвестується менше, ніж виробляється. Рівень вибуття капіталу перевищує рівень інвестицій. Це означає, що в економіці зменшуються запаси капіталу. За рік споживається більше капіталу, ніж виробляється, економіка **спадна** (стагнуча).

Отже, зростання капіталоозброєння є чинником економічного зростання лише за умови, що капіталоозброєння праці не досягло стійкого стану, тобто $k_1 < k^*$. На графіку це усі точки ліворуч від k^* . Знайдемо приріст k , тобто ті умови, за яких інвестиції перевищують вибуття (амортизацію) капіталу:

$$\Delta k = s f(k^*) - k^*.$$

Оскільки в точці k^* приросту капіталу немає, то $\Delta k = 0$.

Звідси:

$$s f(k^*) - \sigma k^* = 0, \text{ або } s f(k^*) = \sigma k^*.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $\sigma f(k^*)$, одержимо:

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{k^*}{f(k^*)}.$$

Приклад. Виробнича функція має вигляд: $y = f(k) = k^{\frac{1}{3}}$, норма заощадження $s = 0,25$, норма амортизації $\sigma = 0,15$. Обчисліть стійкий рівень капіталоозброєння.

$$f(k^*) = (0,25)/(0,15) = \frac{0,25}{0,15} = \frac{k}{\frac{1}{k^3}}; \quad k = (\sqrt[3]{1,66})^3.$$

Зростання норми заощаджень є джерелом економічного зростання. Але збільшення норми заощаджень супроводжується скороченням норми споживання. Ця суперечність у межах моделі Солоу розв'язується так.

“Золоте правило” нагромадження як критерій максимізації рівня споживання.

Критерієм при виборі норми заощадження є максимізація добробуту суспільства, тобто якнайбільше споживання. За “золотим правилом”, норма заощаджень, за якої формується стійке капіталоозброєння, повинна враховувати максимум споживання.

За “золотим правилом”, гранична продуктивність капіталу дорівнює нормі його вибуття: $MPK = \sigma$.

Приклад. Виробнича функція має вигляд $y = \sqrt{k}$, $\sigma = 0,24$. Розрахувати рівень капіталоозброєності, який відповідатиме “золотому правилу”.

$$MPK = y' = (\sqrt{k})' = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = 2 \cdot 0,24; \quad \sqrt{k} = \frac{1}{0,48} \Rightarrow k \approx (2,083)^2.$$

У моделі Солоу доведено, що **зростання населення** діє на капіталоозброєння так само, як і вибуття капіталу. Інвестиції збільшують запас капіталу і капіталоозброєність праці, а зношування капіталу і зростання кількості працюючих її зменшують.

Розглянемо рівняння визначення стійкого рівня капіталоозброєння з урахуванням зростання населення і технічного прогресу: $\Delta k = i - \sigma k - nk = sf(k) - (\sigma + n)k$, де n — приріст населення.

Показник $(\sigma + n)k$ називають критичною величиною інвестицій (break-even investment). Ця величина показує, на скільки необхідно збільшити величину капіталу, щоб його запас, який припадає на одного працюючого з урахуванням вибуття капіталу та зростання кількості працюючих, залишився незмінним.

Рівняння визначення стійкого рівня капіталоозброєння набуває вигляду:

$$\frac{s}{\sigma + n + g} = \frac{k}{f(k)}.$$

Зростання населення неоднозначно впливає на економічне зростання. У межах стійкого стану економіки випуск продукції на одного працівника залишається незмінним, оскільки незмінним є капіталоозброєння праці. Однак загальний продукт може зростати за рахунок збільшення кількості працівників.

Зростання населення може викликати і зменшення капіталоозброєння, і продуктивності, якщо воно не компенсується зростанням інвестицій.

Наслідком прискореного зростання населення є зменшення капіталоозброєння.

Ця частина моделі використовується як аргумент для пояснення того, чому в країнах з високим щорічним темпом приросту населення є низькими продуктивність праці та випуск продукції на душу населення. Високий темп приросту населення стає гальмом економічного зростання у тому випадку, коли зростання інвестицій не може його компенсувати.

Джерелом економічного зростання є **технічний прогрес**. Припускається, що співвідношення витрат праці та капіталу, з одного боку, та випуск продукту — з іншого лишається незмінним.

Якщо населення зростає з темпом n , а ефективність праці — з темпом g , то загальний обсяг виробництва збільшується під впливом приросту населення та технічного прогресу з темпом $(n + g)$.

З урахуванням технічного прогресу “золоте правило” формулюється так: для максимізації споживання необхідно, щоб чиста гранична продуктивність капіталу (приріст продукту на додаткову одиницю капіталу без амортизації) дорівнювала темпу приросту загального обсягу виробництва $(n + g)$: $MPK = \sigma + n + g$.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- *Виробнича функція*
- *Постійна віддача від масштабу*
- *Закон спадної віддачі чинників виробництва*
- *Ізокванта*
- *Модель Самуельсона–Хікса*
- *Стійка, нестійка рівновага Кобба–Дугласа*
- *Модель Харрода*
- *Гарантований, природний темп зростання*
- *Модель Солоу*
- *Модель Домара*
- *Стійкий рівень капіталоозброєння праці*
- *“Золоте правило” нагромадження*
- *Модель Калдора*

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке виробнича функція? Наведіть приклади.
2. Що означає термін “економія від масштабу”?
3. Чим вимірюється нахил ізокванти?
4. Чим різняться між собою моделі економічних циклів?
5. Яка динамічна модель розглядає взаємодію мультиплікатора та акселератора?
6. У якій динамічній моделі функції споживання та інвестицій описуються логістичними кривими?
7. Чим відрізняється модель Домара від моделі Харрода?
8. Який темп зростання населення та технічного прогресу гарантує максимально допустимий темп економічного зростання?
9. Які чинники економічного зростання враховує модель Солоу?
10. Якими показниками можна визначити стан економіки країни?

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. Ізокванта:
 - а) має від’ємний нахил;
 - б) має додатний нахил;
 - в) є вертикальною;
 - г) є горизонтальною.
2. Виробнича функція $f(K, L) = K^2 L^2$ характеризується віддачею від масштабу:
 - а) постійною;
 - б) зростаючою;
 - в) спадною.
3. У моделі Самуельсона–Хікса в економіці беруть участь суб’єкти:
 - а) домогосподарства;
 - б) фірми та держава;
 - в) домогосподарства та держава;
 - г) домогосподарства та фірми.
4. За моделлю Калдора рівновага економічної системи залежить від:
 - а) граничної схильності до заощадження;
 - б) граничної схильності до заощадження та граничної схильності до інвестування;
 - в) граничної схильності до споживання та граничної схильності до інвестування;
 - г) граничної схильності до споживання та граничної схильності до заощадження.

5. Зазначте правильне твердження за моделлю Калдора:

- а) статична рівновага може бути досягнута як довгострокова;
- б) в умовах спаду гранична схильність до інвестування є великою;
- в) статична рівновага може бути досягнута як короткострокова;
- г) в умовах піднесення гранична схильність до інвестування є малою.

6. Модель Солоу не враховує вплив:

- а) темпу зростання ВВП;
- б) зростання населення;
- в) запасу капіталу;
- г) технічного прогресу.

7. За моделлю Солоу стійкий рівень капіталоозброєння праці досягається при рівності:

- а) споживань і заощаджень;
- б) інвестицій і заощаджень;
- в) амортизації та вибуття капіталу;
- г) інвестицій і вибуття капіталу.

8. Виробнича функція має вигляд:

$y = f(k) = k^{\frac{1}{3}}$, норма заощадження $s = 0,22$, норма амортизації $\sigma = 0,15$. Обчисліть стійкий рівень капіталоозброєння.

9. Виробнича функція має вигляд:

$y = f(k) = k^{\frac{1}{2}}$, норма амортизації $\sigma = 0,12$. Обчисліть стійкий рівень капіталоозброєння, який відповідатиме “золотому правилу”.

10. Модель взаємодії мультиплікатора та акселератора має назву:

- а) павукоподібної моделі;
- б) моделі Калдора;
- в) моделі Самуельсона–Хікса;
- г) моделі Солоу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Будаговська С., Кілієвич О. Мікроекономіка та макроекономіка: Підруч. для студентів екон. спец. закл. освіти. — К.: Основи, 1998.
2. Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроекономіка. — СПб.: Питер, 2000.

3. *Замков О. О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В.* Математические методы в экономике: Учебник. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ; Дело и сервис, 1999.
4. *Нуреев Р. М.* Курс микроэкономики: Учеб. для вузов. — М.: НОРМА, 2000.
5. *Радіонова І.* Макроекономіка та економічна політика. — К.: Таксон, 1996.
6. *Селищев А. С.* Макроэкономика. — СПб.: Питер, 2000.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ

Моделі математичного програмування

Еколого-економічні моделі оптимізації

Задачі безумовної та умовної оптимізації та методи їх розв'язування

Метод Лагранжа для розв'язування задач оптимізації на умовний екстремум

5.1. МОДЕЛІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача оптимізації полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції $f(x)$ на допустимій множині D . Розв'язати оптимізаційну задачу — означає знайти її оптимальне розв'язування або встановити, що розв'язування немає. Методи розв'язування оптимізаційних задач називають **методами математичного програмування**. Оптимізаційні моделі бувають двох типів: задачі мінімізації і задачі максимізації.

Модель оптимального планування виробництва.

Загальна постановка задачі математичного програмування з двома невідомими. Визначити максимум (мінімум) функції:

$$f(X_1, X_2) \rightarrow \max (\min)$$

при обмеженнях:

$$g_1(X_1, X_2) \leq 0$$

$$\dots$$

$$g_j(X_1, X_2) \leq 0,$$

$$j = \overline{1, m},$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

Функція f називається **цільовою**. Обмеження у вигляді нерівностей називаються **спеціальними обмеженнями**, невід'ємність змінних у вигляді нерівностей має назву **загальних обмежень** задачі математичного програмування (ЗМП). Точка (X_1, X_2) , яка задовольняє спеціальним і загальним обмеженням, називається допустимим розв'язуванням ЗМП. Множина всіх допустимих розв'язувань називається допустимою множиною ЗМП. **Оптимальним розв'язуванням** ЗМП називається точка (x_1^*, x_2^*) , яка задовольняє умовам обмежень та цільовій функції.

Приклад. Підприємство виробляє продукцію двох видів A та B , для чого використовує сировину трьох видів: 1, 2 та 3. Для виготовлення однієї одиниці продукції A витрачається 10 одиниць сировини 1, 15 одиниць сировини 2 та 20 одиниць сировини 3. Для виготовлення

однієї одиниці продукції B витрачається 30 одиниць сировини 1, 20 одиниць сировини 2 та 25 одиниць сировини 3. Запаси сировини становлять: 100 одиниць сировини 1, 120 одиниць сировини 2 та 200 одиниць сировини 3. Прибуток підприємства становить 20 гр. од. за одиницю продукції від виробництва однієї одиниці продукції A та 25 гр. од. за одиницю продукції від виробництва однієї одиниці продукції B . Складіть такий план виробництва продукції, за якого прибуток був би максимальним (див. таблицю).

Сировина	Вид продукції		Запаси сировини
	A	B	
1	10	30	100
2	15	20	120
3	20	25	200

Введемо змінні: X_1 та X_2 — план виробництва продукції A та B .
Будуємо модель.

Цільова функція: $20X_1 + 25X_2 \rightarrow \max$.

Обмеження: $10X_1 + 30X_2 \leq 100$;

$15X_1 + 20X_2 \leq 120$;

$20X_1 + 25X_2 \leq 200$;

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$.

Задачу математичного програмування з двома невідомими розв'яжемо графічним способом (рис. 5.1). Для цього в обмеженнях замінимо знак " \leq " на " $=$ " і накреслимо три прямих лінії відповідно. Далі повернемося до початкових нерівностей і визначимо напівплощини, де виконуються задані умови. Утворена множина допустимих розв'язувань задовольняє усім спеціальним і загальним умовам.

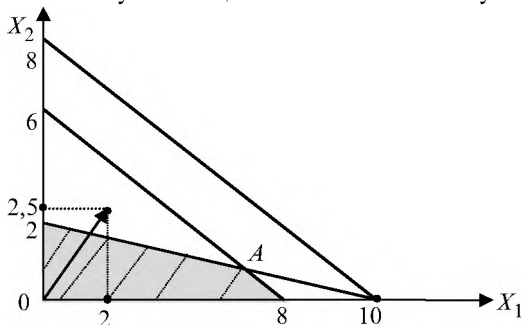


Рис. 5.1. Графічне розв'язування ЗМП з двома змінними

Оптимальне розв'язування задачі криється в одній з вершин одержаної множини допустимих розв'язувань. Визначимо, яка з вершин дасть найбільший результат.

Точка $f(0, 0) = 0$; $f(0, 2) = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 2 = 50$; $f(8, 0) = 20 \cdot 8 + 25 \cdot 0 = 160$.

Щоб знайти ще одну точку — точку A , — потрібно розв'язати систему двох рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} 10X_1 + 30X_2 = 100; \\ 15X_1 + 20X_2 = 120. \end{cases}$$

$X_1 = 6,4$, $X_2 = 1,2$. Прибуток становить $20 \cdot 6,4 + 25 \cdot 1,2 = 158$ гр. од.

Отже, максимальне значення функції набувається у точці $X_1 = 20$, $X_2 = 0$ і становить 160 гр. од.

Значно швидший шлях розв'язування задачі — побудова вектора нормалі. Координати вектора — це часткові похідні цільової функції, або градієнт функції (див. додаток).

За коефіцієнтами цільової функції (20, 25) або з пропорційними коефіцієнтами (2,0; 2,5) (рис. 5.1) будуємо вектор. У цьому напрямку буде зростати значення цільової функції. Перпендикулярно до вектора нормалі проводимо пряму лінію і зміщуємо її паралельно у напрямку вектора.

Остання точка, яка міститься на межі допустимої площини, — точка з координатами (8, 0). Її значення дорівнює $20 \cdot 8 = 160$.

Отже, оптимальний план виробництва: $X_1 = 8$; $X_2 = 0$, або план становитиме 8 одиниць продукції A .

Прибуток становить 160 гр. од.

5.2. ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІ

Оскільки Україна найбільше потерпіла від аварії на ЧАЕС, досить актуальними були і залишаються проблеми раціонального використання ресурсів в екологічно несприятливих умовах. Розглянемо еколого-економічні моделі оптимізації сільськогосподарського виробництва як найбільш ураженої галузі після аварії на ЧАЕС [4].

Проблемами моделювання еколого-економічних систем сільськогосподарського виробництва займалися такі українські установи: Український науково-дослідний інститут сільськогосподарської радіології, Інститут ботаніки ім. Н. Г. Холодного, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова. Найцікавішими є праці українських учених Б. С. Прістера, В. Г. Бар'яхтара, Д. М. Гродзинського та ін.

Однією з основних проблем під час ліквідації наслідків аварії у перші тижні та місяці після аварії було забезпечення безпеки населен-

ня від впливу зовнішнього опромінювання та внутрішнього надходження радіоактивних продуктів аварії внаслідок споживання місцевих харчових продуктів. Далі першочерговими завданнями стали оцінювання та прогнозування забруднення сільськогосподарської продукції у прилеглих до ЧАЕС районах. Були запропоновані наступні організаційні та агрономіюративні заходи:

- зміна спеціалізації господарства відповідно до рівня забруднення території землекористування;
- виключення з виробництва забрудненої продукції, яка надходить безпосередньо у харчування людини;
- переважне виробництво рослинницької продукції на насіння, технічні цілі та корми для тваринництва;
- здійснення заходів, спрямованих на фіксацію та закріплення радіонуклідів у недосяжні протягом тривалого часу для рослин форм шляхом внесення у необхідних дозах мінеральних добрив, вапна та сорбентів (глиняної суспензії...) у верхній забруднений шар ґрунту;
- розширення площ під багатолітні трави, що забезпечує зниження вмісту радіонуклідів у кормах, а відтак — у продуктах тваринництва;
- відгодівля тварин кормами з низьким вмістом радіонуклідів.

Цікавою була ідея насадження лісів на ділянках з високою щільністю забруднення, оскільки придатною для користування деревинна продукція буде через десятиліття, коли відбудеться суттєве зменшення радіонуклідів. Лабораторією Д. М. Гродзинського Інституту клітинної біології та інженерії була запропонована концепція, яка містила ідею управління винесенням радіоактивних елементів, які здатні концентрувати у своїх тканинах рослини та дискримінувати їх надходження з ґрунту. Можливими є два способи надходження у рослини радіонуклідів з ґрунтів, які зазнали забруднення:

- мінімізація — послаблення їх надходження у сільськогосподарські рослини і, отже, у харчові ланцюги;
- максимізація — посилення винесення за допомогою культурних або диких видів рослин (фітодезактивація).

Введемо змінні:

k — кількість ділянок у регіоні;

i — основні сільськогосподарські культури в регіоні;

R_{ik} — забруднення i -ї культури на k -й ділянці ($Ki/га$);

K_{ik} — середнє значення питомої концентрації радіонуклідів, кг продукції ($Ki/кг$);

b_{ik} — середнє значення врожаїв культур, які зібрані у даному регіоні (кг/га);

S_{ik} — площі, які зайняті даною культурою (га).

Загальна формула оцінки винесеної із врожаєм кількості радіонуклідів становить подвійну суму:

$$\sum_k \sum_i R_{ik} K_{ik} b_{ik} S_{ik} \rightarrow \max (Ki/\text{га}).$$

Найпростіша модель оптимізації в умовах радіоактивного забруднення записується у вигляді:

$$\sum p_j(v_1 \dots v_m) X_j \rightarrow \max;$$

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i;$$

$$X_j \geq 0.$$

Змінні моделі: $p_j(v_1 \dots v_m)$ — ціна j -го продукту, який виробляється з $1 \dots m$ ресурсами та з $v_1 \dots v_m$ забрудненням. Модель належить до моделей лінійного програмування.

Складнішою є модель, яка описує більш ймовірніший та довший трофічний ланцюжок: “грунт–рослина–рослинний корм–тварина–тваринний корм–хутровий звір–хутро”. Протягом проходження ланцюжка суттєво знижується концентрація забруднення, при цьому максимізується прибуток продукції.

Розглянемо економіко-математичну **модель оптимізації сільськогосподарського виробництва** з урахуванням щільності забруднення агрогруп.

Розкриємо її суть. Розподілити посівні площі, які відводять під кожен сільськогосподарську культуру на ділянках відповідних агрогруп з різною щільністю забруднення таким чином, щоб досягти максимального ефекту з урахуванням технологічних, агротехнічних, організаційних та екологічних умов. Невідомі змінні в моделі — це площі, які відводять під культури деякого виду на ділянці відповідної агрогрупи певного типу забруднення.

У моделі відомі параметри: врожайність культури на тій чи іншій ділянці, норми внесення меліорантів, загальна площа ріллі в господарстві, коефіцієнти переходу кількості культур у зернові одиниці.

Ще один тип моделей, які можна застосовувати в умовах радіоактивного забруднення, це — **цілочисельні оптимізаційні моделі**. Наприклад, модель оптимального розподілу культур за полями сівозмін. Критерій оптимальності тут наступний: знайти долю площі кожного поля (0 або 1), яку відводять під кожен культуру, тобто

сформувати план розподілу культур за полями, який забезпечує мінімум сумарної забрудненості продукції або такий, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації продукції. У цільову функцію можна ввести коефіцієнт, який вказує на участь продукції в реалізації:

$a_{ij} = 1$, якщо біологічні норми вмісту радіонуклідів є допустимими;

$a_{ij} = 0$, якщо норми вмісту є недопустимими.

Залежно від поставленого завдання оптимізації сільськогосподарського виробництва розглядаються свої, відмінні від інших, критерії оптимальності. Вибір та обґрунтування критерію оптимальності — важливий етап моделювання. Існують різні критерії оптимальності: прибуток від реалізації продукції господарства, мінімальні витрати, собівартість продукції, максимум продукції в зернових одиницях, максимум випуску чистої продукції. Прибуток від реалізації сільськогосподарської продукції можна обчислити за вільними ринковими, державними або світовими цінами.

Коли йдеться про задачу оптимізації, виникає проблема вибору критеріїв оптимальності. Знаходження оптимального плану розміщення сільськогосподарського виробництва в умовах радіоактивного забруднення є багатоцільовим. Однак вибір плану за всіма критеріями одночасно є неможливим, тому необхідно або вибрати з усіх критеріїв найвагоміший, або застосувати у цільовій функції певні важелі. При розв'язуванні задачі стосовно одного з критеріїв ступінь досягнення інших цілей можна фіксувати як обмеження.

Розв'язування економіко-математичних моделей ґрунтується на використанні симплекс-методу або його модифікацій.

5.3. ЗАДАЧІ БЕЗУМОВНО ТА УМОВНО ОПТИМІЗАЦІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Математичне програмування можна поділити на лінійне та нелінійне. Нелінійне програмування є досить складним з точки зору застосування математичного апарату.

Задачі нелінійного програмування поділяють залежно від оптимумів: локальний чи глобальний (рис. 5.3); екстремумів: умовний чи безумовний (рис. 5.2) та методів розв'язування: аналітичний чи обчислювальний.

На практиці в задачах оптимізації для змінних задають граничні умови. У межах цих умов цільова функція може набувати найбільше чи найменше значення або мати екстремум. Оптимум — ширше поняття, ніж екстремум. Якщо екстремум є не у всіх функцій, то в практичних задачах оптимум існує завжди [1].

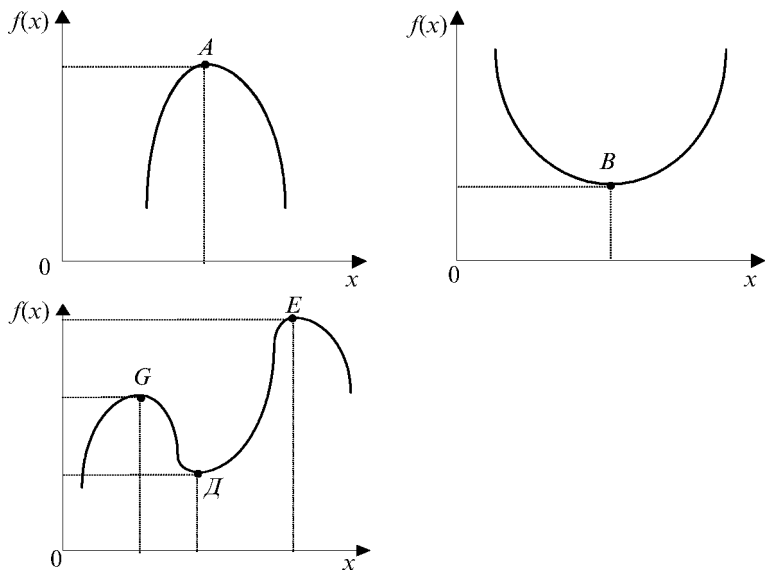


Рис. 5.2. Екстремуми функцій

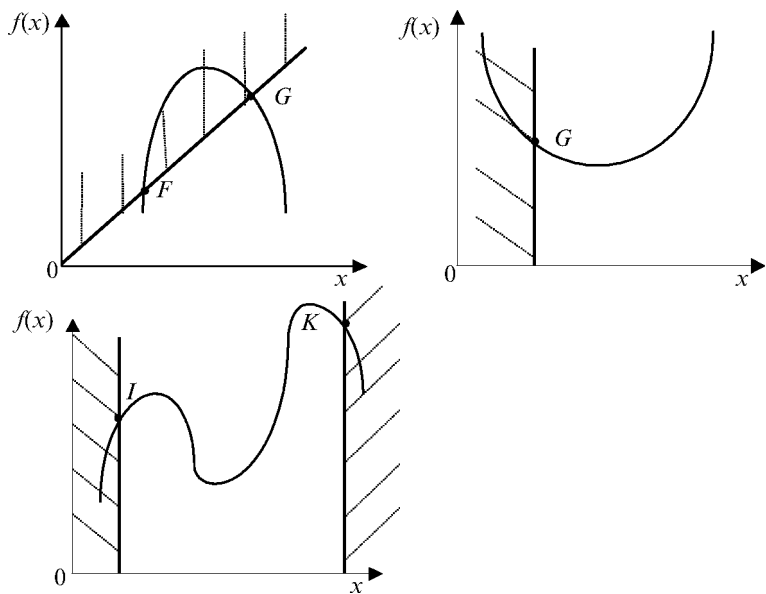


Рис. 5.3. Оптимуми функцій

У більшості економічних задач оптимізації зустрічається локальний оптимум.

Задачами безумовної оптимізації називаються такі, в яких задається лише одна цільова функція. У таких задачах не існує обмежень і граничних умов. Моделі безумовної оптимізації мають теоретичний характер, оскільки на практиці граничні умови задаються завжди. У цих задачах поняття оптимуму та екстремуму збігаються, і для знаходження оптимуму в них застосовуються методи знаходження екстремуму.

Аналітичний метод розв'язування задачі безумовної оптимізації.

Задана функція однієї змінної $F = f(x)$. Для того щоб визначити екстремум, необхідно:

1. Знайти першу похідну функції.

2. Прирівняти її до нуля.

3. Розв'язати рівняння, визначивши x^* .

4. Знайти другу похідну функції. Визначити знак цієї похідної.

Якщо друга похідна менша за 0, то точка x^* — максимум функції.

Якщо друга похідна більша за 0, то точка x^* — мінімум функції.

Методи розв'язування задач умовної оптимізації.

$f(x_j) \rightarrow \min$

при обмеженнях: $g_i(x_j) = 0; i = 1, m; a_j \leq x_j \leq b_j$.

1. Метод штрафних функцій. Від задачі умовної оптимізації переходять до задачі, в якій мінімізується нова цільова функція, яка містить у собі першу цільову функцію та задані обмеження. Записується: $F(x_j) = f(x_j) + \Psi(g(x_j)) \rightarrow \min$, де $\Psi(g(x_j))$ — штрафна функція.

2. Метод Лагранжа.

5.4. МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Сутність методу полягає у побудові функції виду:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2),$$

тобто, зведення задачі на умовний екстремум двох незалежних змінних до задачі на абсолютний екстремум функції $L(x_1, x_2, \lambda)$ трьох незалежних змінних x_1, x_2, λ . Функція Лагранжа є сумою цільової функції та функції обмеження, помноженої на нову незалежну змінну λ (множник Лагранжа), яка має перший порядок.

Для знаходження точок умовного локального екстремуму функції за наявності обмеження слід насамперед знайти критичні точки функції Лагранжа, тобто знайти всі розв'язання системи рівнянь:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Далі критичні точки функції Лагранжа потрібно скоротити на координати λ . Потім кожну одержану скорочену точку необхідно проаналізувати, чи є вона точкою умовного екстремуму функції за даних обмеженнях чи ні.

Приклад. Знайдіть екстремум функції $y = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 - 1 = 0$ або розв'яжіть задачу на умовний екстремум методом Лагранжа.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Знаходимо критичні точки функції Лагранжа, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda = 0; & \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Одержимо: $x_1 = x_2 = 1/2, \lambda = -1$.

Отже, система рівнянь має єдине розв'язування, єдину критичну точку функції Лагранжа $(1/2, 1/2, -1)$.

Для визначення, який саме екстремум має місце у критичній точці — максимум чи мінімум, потрібно проаналізувати величину:

$D = AB - C^2$, де A, B, C — другі часткові похідні функції:

$$A = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}; \quad B = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}; \quad C = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Якщо $D > 0$ та $A < 0$ і $B < 0$, то критична точка — точка максимуму.

Якщо $D > 0$ та $A > 0$ і $B > 0$, то критична точка — точка мінімуму.

Якщо $D < 0$, екстремумів у даній точці немає.

Якщо $D = 0$, відповіді немає, необхідно знаходити похідні вищих порядків.

Для нашого прикладу $A=2$, $B=2$, $C=0$. Отже, $D=2 \cdot 2=4>0$, $A>0$, $B>0$, критична точка — точка мінімуму.

Перевіряємо, чи є скорочена критична точка точкою умовного локального екстремуму функції за наявності обмеження.

$$f(x_1, x_2) = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2; \quad 1/2 + 1/2 - 1 = 0. \text{ Отже, } (x_1, x_2) = (1/2, 1/2).$$

Задача споживчого вибору як задача на умовний екстремум [1].

Розглянемо модель поведінки споживача (розд. 2, п. 2.1) як задачу на умовний екстремум:

$$u(x_1, x_2) \rightarrow \max \text{ за умови } p_1 x_1 + p_2 x_2 = R.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо метод Лагранжа.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R).$$

Знаходимо її перші часткові похідні за змінними x_1 , x_2 , λ та прирівнюємо часткові похідні до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_1 - \lambda p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_2 - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - R = 0.$$

Виключаємо з одержаної системи трьох рівнянь з трьома невідомими параметр λ , одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими x_1 та x_2 :

$$\frac{u'_1}{u'_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = R.$$

Розв'язуванням цієї системи є “скорочена” критична точка функції Лагранжа.

Підставимо розв'язування в ліву частину першого рівняння

$$\frac{u'_1(x_1, x_2)}{u'_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

і одержимо відомий факт з курсу “Мікроекономіка”, що у точці локальної ринкової рівноваги відношення граничних корисностей продуктів дорівнює відношенню ринкових цін p_1 та p_2 на ці продукти:

$$\frac{u'_1(x_1, x_2)}{u'_2(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

У рівнянні ліворуч — гранична норма заміщення першого продукту іншим (*MRTS*) (див. додаток).

Геометрично розв’язування задачі можна інтерпретувати як точку дотику лінії байдужості функції корисності $u(x_1, x_2)$ з бюджетною прямою $p_1x_1 + p_2x_2 = R$ (рис. 5.4).

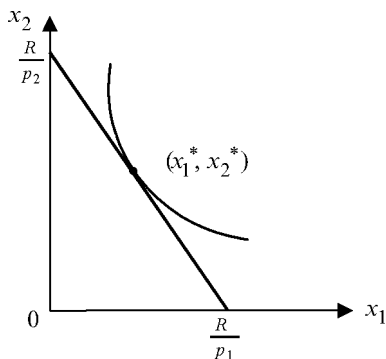


Рис. 5.4. Оптимум споживача

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u'_1}{u'_2}$ визначає тангенс кута нахилу лінії рівня

функції корисності, а відношення $-\frac{p_1}{p_2}$ уявляє тангенс кута нахилу бюджетної прямої. У точці споживчого вибору вони дотикаються.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- *Задача оптимізації*
- *Спеціальні та загальні обмеження*
- *Еколого-економічні системи*
- *Моделі оптимізації в умовах радіоактивного забруднення*
- *Цілочисельні оптимізаційні моделі*
- *Математичне програмування*
- *Умовна та безумовна оптимізація*
- *Цільова функція*
- *Екстремум функції*
- *Оптимум функції*
- *Метод Лагранжа*
- *Множник Лагранжа*

3. *Малиш Н. А.* Моделювання еколого-економічних систем агропромислового комплексу на території радіоактивно забрудненого регіону. Дис... на здоб. вч. ступ. к. е. н. КНУ ім. Тараса Шевченка, 1993.
4. *Рюмина Е. В.* Экологический фактор в экономико-математических моделях. — М.: Наука, 1980.
5. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

ТЕОРІЯ ІГОР, ТЕОРІЯ ГРАФІВ І СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Основні поняття та класифікація ігор
Застосування апарату теорії ігор в економіці
Теорія графів і сіткове планування

6.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ІГОР

В оптимізаційних моделях вибір рішення здійснювався однією особою. В теорії ігор рішення приймаються кількома учасниками. Значення цільової функції для кожного з них залежить від рішень, що приймаються рештою учасників. Теорія ігор ще має назву теорії конфліктних ситуацій. Прикладами є ситуація “покупець–продавець”, карткові та спортивні ігри, олігополістичні моделі. Конфлікт може бути результатом свідомих і стихійних дій різних учасників.

Гравці в теорії ігор — це учасники (суб’єкти) конфлікту. Вони відрізняються іменами або номерами. Можливі дії кожної зі сторін мають назву **стратегії**, або ходів.

Інтереси сторін представляються **функціями виграшу** (платежу) для кожного з гравців.

Гра — це модель, яка формалізує змістовний опис конфлікту.

Теорія ігор уперше була системно викладена Дж. фон Нейманом і О. Монгерштерном у 1944 р. В роки Другої світової війни і після неї теорія ігор привернула увагу військових як апарат для дослідження стратегічних рішень. Проте основним застосуванням теорії ігор стала економіка. У 1994 р. Нобелівську премію з економіки одержали Джон Неш (США), Джон Харсаньї (США), Рейнхард Зельтен (Німеччина) за праці у сфері теорії ігор.

Ігри класифікують залежно від обраного критерію: за кількістю гравців, за кількістю стратегій, за властивостями функцій виграшу та за можливостями попередніх переговорів між гравцями.

Залежно від **кількості гравців** розрізняють ігри з двома, трьома і більше учасниками. Теорію оптимізації, наприклад, можна розглядати як теорію ігор з одним гравцем. Можна досліджувати також ігри з нескінченною кількістю гравців.

За кількістю стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. У скінченних іграх кількість можливих стратегій є числом скінченим (підкидання монети — дві стратегії, підкидання кубика — шість стратегій). Стратегії у скінченних іграх називають **чистими стратегіями**. В нескінченних іграх кількість стратегій є нескінченною.

За властивостями функцій виграшу (платіжних функцій) теорію ігор поділяють на три види. Гра, в якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого, має назву **гри з нульовою сумою**, або антагоністичної гри. Якщо гравці виграють і програють одночасно та їм вигідно діяти разом, то такі ігри мають назву ігор з **постійною різницею**. Гра з ненульовою сумою — це гра, в якій наявний конфлікт та узгоджена дія гравців.

За можливістю попередніх переговорів між гравцями розрізняють кооперативні та некооперативні ігри. **Кооперативна гра** — це гра, в якій до її початку учасники утворюють коаліції і приймають угоди про свої стратегії. **Некооперативна гра** — гра, в якій гравці не можуть координувати свої стратегії. Прикладом кооперативної гри може стати ситуація лобювання у парламенті прийняття рішення зацікавлених у ньому учасників шляхом голосування.

Розглянемо гру з двома учасниками, яка має скінченну кількість стратегій. Це дозволить зобразити гру за допомогою платіжної матриці.

Припустімо, кожен гравець має дві стратегії: “Так” або “Ні”. Ці стратегії можуть являти економічний вибір, наприклад, підвищувати або знижувати ціну та політичний вибір, наприклад, приймати або не приймати закон. Кожному гравцю у кожній ситуації приписують число, яке виражає ступінь задоволення його інтересів. Це число називається виграшем гравця. Відповідність між набором ситуацій і виграшем гравця називається функцією виграшу. У випадку скінченної гри двох осіб функції виграшу кожного з гравців зручно представляти за допомогою матриці виграшів, де рядки зображують стратегії одного гравця, стовпці — стратегії другого гравця. В клітинках матриці вказують виграші кожного з гравців у кожній з утворених ситуацій. Платіжна матриця відображає виграш кожного гравця за кожної комбінації стратегій, що вибираються. Якщо гравці вибирають однакові стратегії, тобто говорять “Так” або “Ні”, то виграш одного гравця дорівнює одиниці, а програш другого гравця дорівнює мінус одиниці.

Матриця виграшів першого гравця має вигляд:

		Стратегії другого гравця	
		“Так”	“Ні”
Стратегія першого гравця	“Так”	1	-1
	“Ні”	-1	1

Матриця виграшів другого гравця має вигляд:

		Стратегії другого гравця	
		“Так”	“Ні”
Стратегія першого гравця	“Так”	-1	1
	“Ні”	1	-1

Для наочності матрицю виграшів для обох гравців можна об’єднати в одну:

		Стратегії другого гравця	
		“Так”	“Ні”
Стратегія першого гравця	“Так”	1; -1	-1; 1
	“Ні”	-1; 1	1; -1

Розглянемо приклад задання матриці виграшів для гри з ненульовою сумою, яка має назву **дилеми ув’язнених**. Суть гри така: двох ув’язнених — співучасників злочину допитують в окремих кімнатах. У кожного з них є вибір: або зізнатись у злочині і тим самим вплатити іншого, або заперечувати свою причетність до злочину. Якщо зізнається лише один з ув’язнених, його звільнять, і звинуваченим буде другий, якого позбавлять волі на термін до 5 років. Якщо обидва злочинці будуть заперечувати свою причетність до злочину, обох протримують у в’язниці до одного року, якщо обидва зізнаються, обох ув’язнять на термін до 3 років.

Платіжна матриця цієї гри має вигляд:

		Стратегії другого гравця	
		“Так”	“Ні”
Стратегія першого гравця	“Так”	3; 3	0; 5
	“Ні”	5; 0	1; 1

Основним припущенням у теорії ігор є те, що кожен гравець прагне забезпечити для себе максимально можливий виграш за будь-яких дій партнера. Припустімо, що є скінченна антагоністична гра з матрицею виграшів першого гравця A і, відповідно, матриця виграшу другого гравця мінус A . Гравець 1 вважає, що яку б стратегію він не обрав, гравець 2 обере стратегію, яка максимізує його виграш і тим самим мінімізує виграш гравця 1. Оптимальна стратегія гравця 1, яка забезпечить йому найбільший з можливих виграшів поза стратегією, яку обере суперник, буде полягати у виборі стратегії з найвищим з таких платежів. Таким чином, гравець 1 обирає i -ту стратегію, яка є розв'язанням задачі:

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Гравець 2 так само прагне забезпечити для себе найвищий виграш (найменший програш) незалежно від стратегії, обраної суперником. Його оптимальною стратегією буде стовпець матриці A з найменшим значенням максимального платежу. Таким чином, гравець 2 обере j -ту стратегію, яка є розв'язанням задачі:

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

У підсумку, якщо гравець 1 дотримується обраної **максимінної стратегії**, його виграш у будь-якому разі буде не меншим за максимінне значення (нижня ціна гри), тобто:

$$a_{ij} \geq \max_i \min_j a_{ij}.$$

Відповідно, якщо гравець 2 дотримується своєї **мінімаксної стратегії**, його програш буде не більший за мінімаксне значення (верхня ціна гри), тобто:

$$a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Якщо верхня та нижня ціна гри збігаються:

$$\max_{ij} \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{ij}^*,$$

обидва гравці одержують гарантовані платежі. Значення a_{ij}^* називається ціною гри. Якщо ціна антагоністичної гри дорівнює 0, гра називається справедливою.

Приклад. Розглянемо гру, в якій гравець 1 володіє трьома стратегіями, а гравець 2 — чотирма. Матриця виграшів A гравця 1 має вигляд:

2	4	5	1
3	5	6	4
4	1	2	7

Матриця вигравів другого гравця буде дорівнювати $-A$. Визначте верхню та нижню ціну гри та вкажіть максимінну та мінімаксу стратегії.

Знаходимо мінімальні значення в кожному рядку:

1-й рядок $\min(2, 4, 5, 1) = 1$; 2-й рядок $\min(3, 5, 6, 4) = 3$;

3-й рядок $\min(4, 1, 2, 7) = 1$.

Шукаємо максимум з одержаних відповідей $\max(1, 3, 1) = 3$.

Отже, нижня ціна гри дорівнює 3.

Верхня ціна гри — це:

$\min(\max(2, 3, 4); \max(4, 5, 1); \max(5, 6, 2); \max(1, 4, 7)) = \max(4, 5, 6, 7) = 7$.

Отже, нижня ціна гри менша за верхню ціну гри. Гра, в якій виконується така строга нерівність, називається не повністю визначеною грою. У випадку коли верхня ціна гри збігається з нижньою ціною, гра називається визначеною.

6.2. ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ ТЕОРІ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ

Дилема ув'язнених може бути застосована до широкого кола економічних і політичних явищ.

У задачі дилеми ув'язнених існує два рівноважних розв'язання. Перше, якщо обидва не зізнаються та їх відпускають, називається **Парето-ефективне рішення**. Таке рішення максимізує корисність обох сторін. Друге, коли обидва зізнаються, називається **рівновагою за Нешем**. У цьому випадку жоден з гравців не може покращити свій виграв, змінюючи одноосібно власне рішення. Рівновага за Нешем — це ситуація, коли стратегія кожного з гравців є найкращою реакцією на дії іншого гравця.

Подібна ситуація властива олігополії, оскільки олігополісти також здійснюють некооперативний вибір, перебуваючи в умовах взаємозалежності.

Припустімо, ринок поділяють між двома фірмами-олігополістами: фірмою А та фірмою В. Якщо б обидві фірми могли співпрацювати, то, скоротивши випуск і призначивши монопольно високі ціни, вони одержали б і високий прибуток по 100 грн за одиницю про-

дукції. Однак фірми діють як конкуренти. Тому вони можуть порушити негласну угоду всупереч очікуванню суперника понизити ціни і захопити частину його ринку, одержавши ще більший прибуток у 140 грн за одиницю. Тоді прибуток суперника ще більше скоротиться і становитиме, наприклад, 20 грн. Спробуючи переграти суперника, кожен гравець вибере низькі ціни, та обидві фірми одержать прибуток по 60 грн замість 140. Варіанти прибутків залежно від вибору цін зображені у платіжній матриці.

Фірма А	Фірма В	
	Низькі ціни	Високі ціни
Низькі ціни	60; 60	140; 20
Високі ціни	20; 140	100; 100

Фірма А і фірма В не можуть діяти узгоджено і роблять вибір на підставі цінової поведінки конкурента. Обидві фірми вибирають найвищі ціни і одержують однаковий прибуток по 60 грн за одиницю продукції. В результаті ризику мінімізовані, й олігополістичний ринок перебуває в умовах рівноваги за Нешем. Це — часткова рівновага, оскільки фірми не максимізують свою корисність. Ця рівновага збережеться доти, доки в олігополістів не з'явиться стимул до зміни обсягів випуску.

У мікроекономічних моделях розглядають такі моделі поведінки олігополістів: ламана крива попиту, таємний зговір (картель), лідерство в цінах, принцип ціноутворення “витрати+плюс”.

Аналіз взаємовідносин двох фірм в умовах дуополії був запропонований 1838 року французьким економістом А. Курно (1801–1877). **Модель Курно** має такі припущення. Фірми А та В виробляють однорідний товар. Їм відома крива ринкового попиту. Обидві фірми приймають рішення про виробництво самостійно та незалежно один від одного. Кожна з фірм передбачає випуск товару конкурента постійним, продавці не мають інформації про свої помилки. При цьому можливі різні варіанти.

Якщо фірма В приймає рішення призупинити виробництво, то попит повністю задовольняється випуском фірми А. Обсяг виробництва, який максимізує прибуток, буде визначатись з умови збігання граничного доходу і граничних витрат. Якщо фірма В буде виробляти максимальну кількість товару, то фірма А відреагує на це зупин-

кою виробництва. Якщо позначити на графіку зміни випуску фірми А залежно від зміни випуску фірми В, одержимо криву реакції фірми А: R_a . Стосовно фірми В одержимо криву реакції фірми В: R_b . Перетин кривих реагування цих двох фірм (точка E) показує рівновагу Курно: кожна фірма вірно передбачає поведінку конкурента і приймає оптимальне для себе рішення.

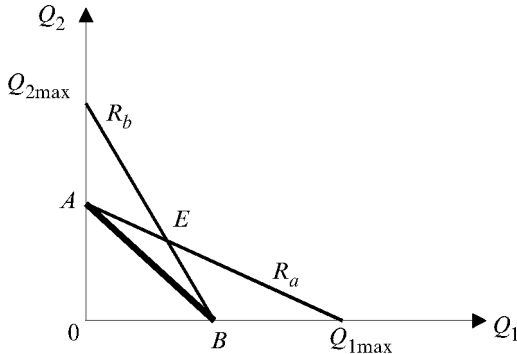


Рис. 6.1. Рівновага Курно

Модель рівноваги Курно припускає, що фірми-дуополісти конкурують одна з одною. Якщо фірми домовляться максимізувати сукупний прибуток, щоб потім поділити його навпіл, то множина розв'язувань цієї задачі буде належати **контрактній кривій** (пряма AB). Модель Курно — це приклад некооперативної гри з нульовою сумою.

Окрім моделі Курно, дуополію можна розглядати за моделями Бертрана, Еджуорта і Штакельбергера.

6.3. ТЕОРІЯ ГРАФІВ І СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Теорія графів зародилась під час розв'язування головоломок у XVIII ст., однак довго була осторонь головних напрямів досліджень.

Поштовх до розвитку теорії графів одержала на межі XIX–XX ст., коли різко зріс інтерес до праць у галузі топології та комбінаторики. Як окрема дисципліна теорія графів уперше була розглянута у праці угорського математика Кьоніга у 30-ті роки XX ст. Графи ефективно використовуються в теорії планування та управління, соціології, лінгвістиці, економіці, медицині.

Сітки стали зручним зряддям для опису та аналізу складних проєктів. Сіткові моделі складних комплексів робіт були розроблені і почали використовуватись у 50-ті роки ХХ ст. Сіткова модель застосовувалась у США при створенні балістичних ракет “Поляріс”, призначених для оснащення атомних підводних човнів американського військово-морського флоту. У комплексі робіт брало участь понад 6000 фірм, роботи виконувались на території 48 штатів, а сітковий графік містив більше 10 тисяч подій.

Перша система планування й управління в США має назву ПЕРТ. Успіхи в її застосуванні досить значні. Це підтверджує обов’язкове її застосування у будівництві. Тривалість економічного процесу із застосування системи скорочується на одну третину.

У СРСР найпоширенішими були системи планування та управління СПУ. В основі цих систем лежать сіткові графіки. Системи СПУ з успіхом застосовувались під час спорудження ТЕЦ у Лисичанську, при реконструюванні доменної печі “Запоріжсталі”, при будівництві метромосту через Дніпро в Києві.

Сітковий графік є наочним відображенням економічного процесу. Сітки, які невеликі за обсягом, можуть аналізуватись без використання ПЕОМ. Сітки з великою кількістю подій у сучасних умовах за наявності потужних комп’ютерів і програм легко реалізуються та використовуються.

Граф — це непуста множина точок і множина відрізків, обидва кінці яких належать заданій множині точок.

Позначимо граф буквою G . Відрізки, які з’єднують точки графа, можуть бути лінійними та нелінійними. Довжини відрізків і розташування точок є довільними.

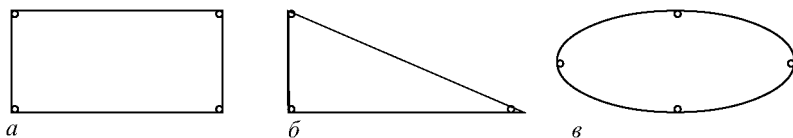


Рис. 6.2. Приклади зображення графів

Точки графа називаються **вершинами**, відрізки — **ребрами** графа.

Граф на рис. 6.2, *a*, *v* має чотири вершини і чотири ребра. Граф на рис. 6.3, *a* має 5 вершин і 3 ребра, на рис. 6.3, *б* — 4 вершини і 6 ребер.

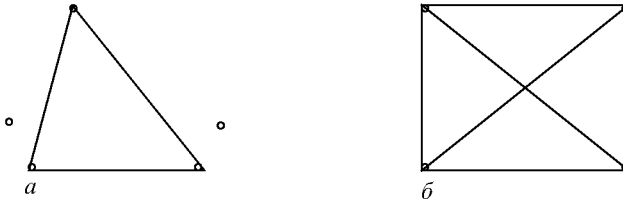


Рис. 6.3. Приклади зображення графів

Вершини, які не належать жодному з ребер, називаються **ізолюваними**. На рис. 6.3, *a* граф має дві ізолювані вершини. Вершини графа позначаються числами або великими буквами, ребра — парами чисел або парами букв.

Прикладами графів можна вважати схеми доріг, плани виставок, бізнес-плани. Головна їх особливість полягає в тому, що на схемах графів відображаються лише зв'язки між об'єктами.

Граф називається **повним**, якщо кожні дві різні вершини з'єднані одним і тільки одним ребром, якщо існують вершини, які не з'єднані з ребром, граф має назву неповного графа.

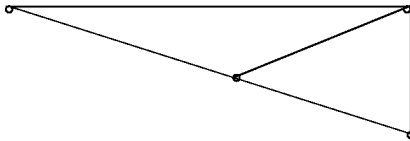


Рис. 6.4. Повний граф

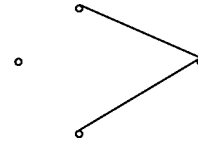


Рис. 6.5. Неповний граф

Для того щоб задати повний граф, достатньо знати кількість його вершин. Кожній вершині у повному графі з n вершинами належить $n-1$ ребро.

Ступінь вершини — кількість ребер графа, яким належить ця вершина.

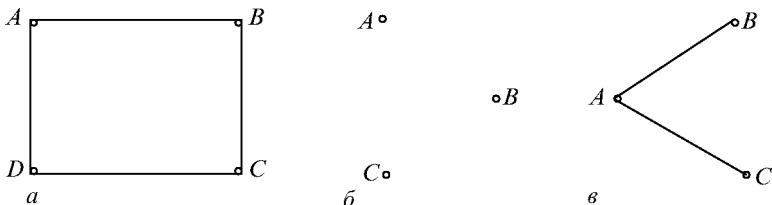


Рис. 6.6. Графи з різними ступенями вершин

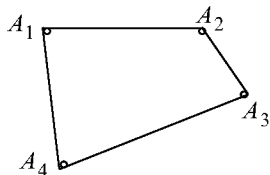
На рис. 6.6, *a* і *б* зображені графи зі ступенем вершин: 2 та 0 відповідно. У графа на рис. 6.6, *в* ступені вершин є різними. Вершина *A* має ступінь 2. Вершини *B* та *C* мають ступінь 1.

Якщо ступінь вершини — непарне число, то вершина називається непарною, і навпаки.

Шляхом графа від вершини A_1 до вершини A_n називається послідовність ребер від A_1 до A_n , в якій кожен два сусідніх ребра мають спільну вершину і кожне ребро зустрічається лише один раз. Вершина A_1 називається початком шляху. Вершина A_n — кінцем шляху. За означенням вершини шляху можуть повторюватись.

Шлях від A_1 до A_n називається простим, якщо він проходить через кожну вершину графа тільки один раз.

Приклад. Знайти шляхи між вершинами графа A_1 та A_4 . Який шлях є простим?



Шляхи між вершинами є простими:

1. (A_1, A_4) ;
2. $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4)$.

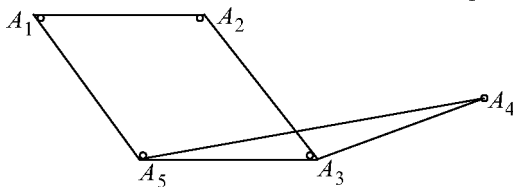
Циклом називається шлях, у якому збігаються його початкова та кінцева вершини.

За прикладом циклом у графі є шлях $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4), (A_4, A_1)$.

Довжиною шляху називається кількість ребер цього шляху.

Довжиною циклу називається кількість ребер у цьому циклі.

Приклад. Визначити довжину шляху від вершини A_1 до вершини A_5 .



Довжина шляху від A_1 до A_5 :

1. $(A_1, A_5) = 1$;
2. $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_5) = 3$.
3. $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4), (A_4, A_5) = 4$.

Дві вершини A_1 та A_n називаються **зв'язаними**, якщо в графі існує шлях з кінцями A_1 та A_n , і **незв'язаними**, якщо в графі не існує жодного шляху, що пов'яже їх.

Деревом називається будь-який зв'язаний граф, який не має циклів.

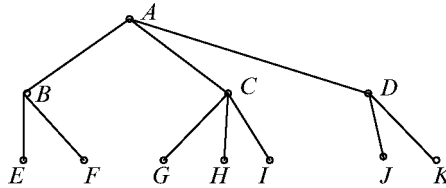


Рис. 6.7. Дерево

У будівництві великого підприємства бере участь велика кількість організацій і людей. Як найкраще організувати окремі роботи, щоб будівництво завершити у найкоротший строк? Як розподілити устаткування, фінансові ресурси, робочу силу, щоб мінімізувати витрати? При плануванні такого комплексу робіт допоможе сіткове планування.

Проектом називається деякий запланований комплекс робіт, необхідний для досягнення мети. До проекту можна зарахувати проект будівництва, план дій на тиждень, бізнес-план, план написання дипломної роботи. Проект поділяється на окремі роботи.

Наприклад, проект написання випускної дипломної роботи магістра містить:

1. Підбір літератури з обраної тематики або роботу з каталогом.
2. Перегляд обраної літератури, вибір найцікавішого і доступного матеріалу.
3. Робота з періодичними виданнями. Огляд статей і публікацій.
4. Ознайомлення з WEB-сторінками. Підбір потрібних адрес.
5. Складання плану дипломної роботи.
6. Обробка матеріалу на комп'ютері.
7. Групування та аналіз статистичних даних.
8. Набір роботи на комп'ютері.
9. Редагування тексту та оформлення роботи відповідно до вимог.
10. Здача дипломної роботи на рецензію.

Робота, що входить до проекту (комплексу), потребує витрат часу. Деякі роботи можуть виконуватись тільки у певному порядку, інші — одночасно і незалежно одна від одної. Якщо кожній події поставити відповідно вершину графа, а кожній роботі — орієнтоване

ребро, то одержимо граф. Він буде відображати послідовність виконання окремих робіт і початку подій в єдиному комплексі.

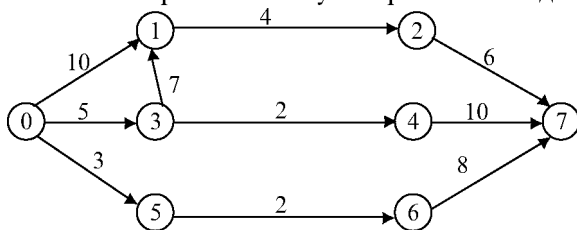
Якщо над ребрами проставити час, який необхідний для завершення відповідної роботи, одержимо **сітку**. Зображення такої сітки називається **сітковим графіком**. Умовна залежність між подіями зображується штриховими стрілками.

Сітковий графік — це графічна модель комплексу робіт. В основі побудови сіткового графіка лежать поняття: робота, подія та шлях.

Роботу поділяють на види: 1) реальна робота — будь-який трудовий процес, що потребує витрат праці, часу і матеріальних ресурсів; 2) очікування — пасивний процес; 3) фіктивна робота.

Події поділяють на початкову, завершальну та проміжні. Пара чисел відображає час, необхідний на виконання роботи (i, j) . Тривалість роботи позначається $t(i, j)$.

Приклад. Дано сітковий графік. Визначаємо критичний шлях і ранній з можливих строків початку завершальної події.



Тривалість шляху в сітковому графіку — час, необхідний для виконання всіх робіт, що лежать на шляху L . Тривалість повного шляху $t(L)$.

Шлях, який має найбільшу тривалість, — це **критичний шлях**.

Визначаємо шляхи даного графа та їх тривалість.

$$L_1(0, 1, 2, 7); t(L_1) = 10 + 4 + 6 = 20; L_2(0, 3, 1, 2, 7);$$

$$t(L_2) = 5 + 7 + 4 + 6 = 22;$$

$$L_3(0, 3, 4, 7); t(L_3) = 5 + 2 + 10 = 17; L_4(0, 5, 6, 7); t(L_4) = 3 + 2 + 8 = 13.$$

Тривалість найдовшого шляху становить 22 (доби, тижні, години).

Проект не може бути реалізований менш ніж за 22 (доби, тижні, години).

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- Гра
- Стратегія
- Функція виграшу
- Сітковий графік
- Дилема ув'язнених
- Граф
- Проект
- Тривалість шляху

- *Теорія ігор*
- *Скінченні та нескінченні ігри*
- *Матричні ігри*
- *Кооперативна та некооперативна гра*
- *Максимінна та мінімаксна стратегії*
- *Рівновага за Нешем*
- *Модель Курно*
- *Крива реагування*
- *Контрактна крива*
- *Довжина шляху*

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які задачі розв'язують в моделях теорії ігор?
2. Чим представлені інтереси сторін у теорії ігор?
3. Які існують класифікації теорії ігор?
4. У чому полягає особливість матричних ігор?
5. Що означає “максимінна стратегія”?
6. Які рівноважні рішення існують у дилемі ув'язнених?
7. Які олігополістичні моделі можна розв'язувати за допомогою теорії ігор?
8. Що відображає сітковий графік?
9. Яка основна особливість графів?
10. До яких економічних процесів ви запропонували б застосувати сітковий графік?

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. Математична теорія конфліктних ситуацій — це:
 - а) математичне програмування; б) теорія ігор;
 - в) регресійний аналіз; г) теорія графів.
2. Теорію ігор з одним гравцем можна розглядати як теорію:
 - а) графів; б) оптимізації;
 - в) статистики; г) балансову.
3. Якщо гравець дотримується максимінної стратегії, його виграш завжди буде:
 - а) меншим; б) не меншим;
 - в) більшим; г) не більшим за максимінне значення.
4. Ситуація, коли стратегія кожного з гравців є найкращою реакцією на дію іншого гравця, має назву:
 - а) Парето-ефективного рішення; б) рівноважної гри;
 - в) рівноваги Курно; г) рівноваги за Нешем.

5. До моделей поведінки олігополістів не належать:
- а) ламана крива попиту;
 - б) кейнсіанський хрест;
 - в) картель;
 - г) лідерство у цінах.

6. На олігополістичному ринку діють дві фірми, які випускають однорідний товар. Функції реагування кожної фірми мають вигляд:

$$Q_1 = 48 - 2Q_2; Q_2 = 48 - 2Q_1,$$

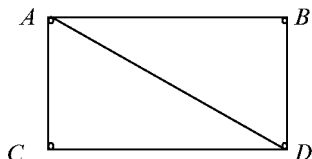
де Q_1, Q_2 — обсяги виробництва фірм.

Визначте за умови рівноваги Курно величину випуску для кожної фірми.

7. Знайдіть оптимальні стратегії гравців і ціну гри за наступною матрицею:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 2 & 3 & 12 & 5 \\ \hline 8 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 10 & 4 & 8 & 12 \\ \hline \end{array}$$

8. Ступінь вершини A даного графа дорівнює: а) 1; б) 3; в) 4; г) 5.



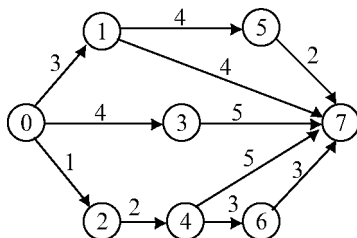
9. Будь-який трудовий процес, що потребує витрат праці, часу і матеріальних ресурсів, це:

- а) очікування;
- б) подія;
- в) дійсна робота;
- г) фіктивна робота.

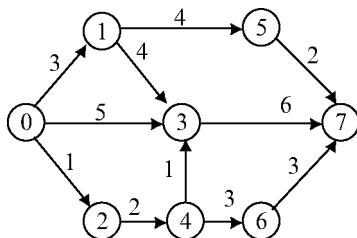
10. Час, необхідний для виконання усіх робіт у сітковому графіку, що лежать на цьому шляху, має назву:

- а) тривалість шляху;
- б) проект;
- в) цикл;
- г) проміжна подія.

11. За сітковим графіком визначте тривалість найкоротшого шляху.



12. За сітковим графіком визначте критичний шлях і ранній з можливих строків початку останньої події (найдовший шлях).



СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Березина Л. Ю. Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979.
2. Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталеv Е. Ю. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2000.
3. Замков О. О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В. Математические методы в экономике: Учебник. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ; Дело и сервис, 1999.
4. Мэнкью Н. Г. Принципы экономики. — СПб.: Питер Ком, 1999.
5. Нуреев Р. М. Курс микроэкономики: Учеб. для вузов. — М.: НОРМА, 2000.

Розділ 7

СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

Основні статистики

Методи статистичного аналізу

Прикладні статистичні моделі та методи в економіці

7.1. ОСНОВНІ СТАТИСТИКИ

Математична статистика вивчає методи обробки дослідних даних. Основою статистичного моделювання є класичний апарат теорії ймовірностей і математичної статистики.

Економіко-статистична модель складається з кількох етапів: теоретичний аналіз, висунення гіпотези, абстрагування предмета моделювання, вибір типу моделі. Економіко-статистичну модель можна одержати у вигляді групування, ряду розподілу, рівняння, графіка тощо. Економіко-статистичні моделі повинні задовольняти основним вимогам: 1) виражатись статистичними категоріями; 2) піддаватись перевірці на основі статистичних критеріїв (t , Стюдента, F , Фішера, χ -квадрат); 3) ґрунтуватися на великій кількості вірогідних даних для реального відбиття існуючих взаємозв'язків і закономірностей.

Економіко-статистичні моделі класифікують залежно від обраного критерію.

1. За ступенем агрегування соціально-економічного явища: макроекономічні, міжгалузеві, галузеві та мікроекономічні.

2. За ступенем охоплення території: світові, національні, регіональні.

3. За розмірністю залежно від кількості чинникових ознак: сублокальні (до 3), локальні (від 4 до 14), субглобальні (від 15 до 99), глобальні (понад 100).

4. За характером відображення часу: моментні та інтервальні.

Труднощі, які виникають у процесі побудови економіко-статистичних моделей, пов'язані з протиріччям між неперервним характером соціальних і виробничих процесів і дискретним характером моделей, тобто у наявності **часових лагів**. Незбігання у часі пов'язаних між собою соціально-економічних явищ призводить до ймовірнісного характеру зв'язків, які відображаються у моделях.

Економіко-статистичні моделі можна поділити на три групи: моделі структури, моделі взаємозв'язку та моделі динаміки. До **моделей структури** належать групування та криві розподілу. **Моделі взаємозв'язку** задаються рівняннями регресії на основі методу найменших квадратів. До **моделей динаміки** належать трендові моделі, моделі періодичних коливань та криві росту.

Основною специфічною рисою статистики є те, що вона розглядає не окреме явище, а їх сукупність. **Статистикою** називається будь-який параметр, що залежить від x_1, x_2, \dots, x_n .

Середнє значення від результату N спостережень: $\bar{x} = (1/N)\sum x_i$.

Приклад. Запропонована вибірка обсягів продажу телевізорів за 6 днів:

$$\{x_i\} = \{2, 5, 3, 7, 4, 1\}.$$

Визначте середнє значення обсягів продажу за 1 день.

$$\bar{x} = (1/N)\sum x_i = (2 + 5 + 3 + 7 + 4 + 1)/6 = 22/6 = 3,7.$$

Якщо враховувати частоту виникнення відповідних значень у вибірці, то:

$$\bar{x} = (1/N)\sum x_i w_i,$$

де w_i — частота виникнення значення у вибірці.

Математичне очікування випадкової величини визначається як зважена сума всіх можливих реалізацій випадкової величини x . Терезами у сумі виступають ймовірності цих реалізацій. Сума терез дорівнює одиниці.

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

$$Mx = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum p_i x_i$$

Властивості математичного очікування для $\forall a, b, c$.

$$M c = c; M(x + b) = Mx + b; M(ax) = aMx; M(ax + b) = aMx + b.$$

Математичне очікування використовується при порівнянні витрат і переваг дії з випадковою подією, наприклад, виграш у лотерею або дохід, що очікується від ризикових цінних паперів.

Дисперсія — середній квадрат відхилення випадкової величини від середнього значення.

$$Dx = Mx^2 - (Mx)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини σ — міра розкиду випадкової величини навколо середнього значення, визначається як корінь квадратний з дисперсії випадкової величини: $\sigma x = \sqrt{Dx}$.

7.2. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Перший метод статистичного аналізу — це **дисперсійний аналіз**, або метод статистичної обробки спостережень. Застосовується для оцінювання впливу на величину, що спостерігається за різних чинникових ознак, від яких ця величина залежить.

Кожне вимірювання залежить від певної кількості параметрів, які можуть набувати або дискретні, або неперервні значення. Залежність розглядають у вигляді лінійної комбінації параметрів з коефіцієнтами:

$$y_i = b_1x_{1j} + b_2x_{2j} + \dots + b_mx_{mj} + e_i$$

де x_{ij} — параметри; b_i — коефіцієнти; e_i — випадкова похибка вимірювання, $i = \overline{1, m}$.

Коефіцієнти b називають чинниками. Рівняння називають **лінійною багаточинниковою моделлю**.

У дисперсійному аналізі параметри x_{ij} зазвичай беруть рівними нулю або одиниці, що вказує на те, які з чинників враховують за такого аналізу.

Однією з проблем в економічному моделюванні є проблема вивчення взаємозв'язку економічних показників. Другий метод статистичного аналізу — це **регресійний аналіз**.

Розглянемо залежність двох змінних: x та y . Припустимо, що є ряди значень змінних і відповідні їм точки нанесені на графік.

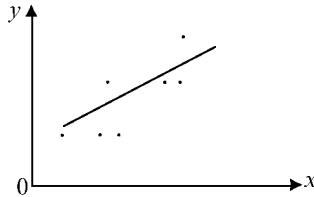


Рис. 7.1. Лінійна залежність двох змінних

Для дослідних даних за емпіричну формулу можна прийняти лінійну залежність $y = ax + b$. Наприклад, у кейнсіанській функції споживання існує лінійна пряма залежність споживання від доходу, функція інвестицій також лінійно відображає обернену залежність відсоткової ставки від обсягу інвестицій.

Отже, ми повинні оцінити рівняння регресії $y = f(x)$ — формулу статистичного зв'язку між змінними. Якщо ця формула лінійна, йдеться про **лінійну регресію**. Формула статистичного зв'язку двох змінних на-

зивається парною регресією, а від кількох змінних — множинною регресією.

Для оцінювання невідомих параметрів за результатами вимірювань використовують метод найменших квадратів. За його допомогою спочатку визначають функціональну залежність представлення даних дослідження, а потім для цієї залежності добирають параметри. Для дослідних даних (рис. 7.2) за емпіричну формулу краще прийняти квадратичну $y = ax^2 + bx + c$. Для дослідних даних (рис. 7.3.) за емпіричну формулу краще прийняти гіперболічну: $y = a + b/x$. Наприклад, крива Філіпса для короткострокового періоду відображає гіперболічну залежність між темпами інфляції та рівнем безробіття.

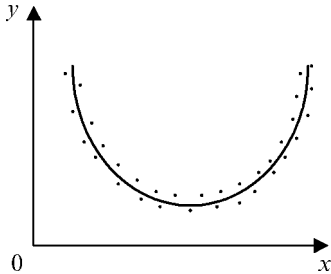


Рис. 7.2. Квадратична залежність

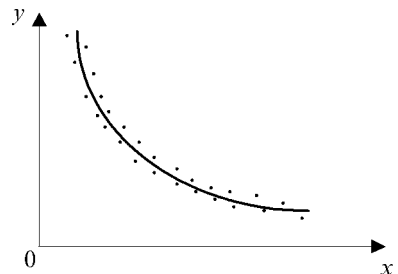


Рис. 7.3. Гіперболічна залежність

За методом найменших квадратів потрібно мінімізувати суму:

$$S = \sum (y_i - y(x_i))^2 \rightarrow \min,$$

де x_i, y_i — значення дослідних даних; $y(x_i)$ — значення функції, обчислене за емпіричною залежністю у точці x_i ; $i=1, n$.

Якщо залежність визначена як лінійна, сума набуває вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min.$$

Для квадратичної залежності:

$$F = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \min.$$

Мінімум функції досягається у точці, в якій похідна суми за параметрами дорівнює нулю. Для лінійної залежності система рівнянь, утворена з похідних, набуває вигляду

$$\begin{cases} \partial F / \partial a = -2 \sum (y_i - ax_i - b)x_i = 0; \\ \partial F / \partial b = -2 \sum (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Для визначення параметрів розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими a та b .

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i; \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i. \end{cases}$$

Приклад. Дослідні дані про значення X та Y наведені у таблиці.

X	1	2	3	4	5	6
Y	10	12	4	5	-1	-2

Аналіз дослідних даних засвідчив, що за емпіричну залежність можна використати лінійну: $y = ax + b$. Визначимо за методом найменших квадратів значення a та b .

Проміжні результати запишемо в таблицю.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	10	1	10
2	2	12	4	24
3	3	4	9	12
4	4	5	16	20
5	5	-1	25	-5
6	6	-2	36	-12
Σ	21	28	91	49

За обчисленими даними система лінійних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 49; \\ 21a + 6b = 28. \end{cases}$$

Розв'язавши її, одержимо $a = -2,8$; $b = 14,46$.

Емпірична формула має вигляд: $y = -2,8x + 14,46$.

7.3. ПРИКЛАДНІ СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ

Розглянемо мікроекономічну модель “попит–пропозиція” (розд. 3, п. 3.1).

Приклад. Запишіть рівняння регресії для дослідних даних попиту та пропозиції методом найменших квадратів. Визначте рівноважну ціну та кількість.

Попит, Q_d	10	9,5	9,1	8,7	8,4	8,0
Пропозиція, Q_s	6,0	6,2	6,8	7,6	8,7	9,5
Ціна, P	1,0	1,5	2,1	2,4	3,0	3,3

Розв’язання. Для визначення параметрів розв’язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими a та b .

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i; \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i. \end{cases}$$

Для функції пропозиції замість x беремо дані у рядку ціни, замість y — дані у рядку пропозиції.

Для функції попиту: замість x — дані у рядку ціни, замість y — дані у рядку попиту.

Проміжні дані для функції пропозиції запишемо в таблицю.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,0	6,0	1,0	6,0
2	1,5	6,2	2,25	9,3
3	2,1	6,5	4,41	14,28
4	2,4	7,6	5,76	18,24
5	3,0	8,7	9,0	26,1
6	3,3	9,5	10,89	31,35
Σ	13,3	44,8	33,31	105,27

Проміжні дані для функції попиту також запишемо в таблицю.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,0	10,0	1,0	1,0
2	1,5	9,5	2,25	14,15
3	2,1	9,1	4,41	19,11
4	2,4	8,7	5,76	20,88
5	3,0	8,4	9,0	27,0
6	3,3	8,0	10,89	26,4
Σ	13,3	53,7	33,31	108,54

Розв'язуємо дві системи рівнянь.

$$\begin{cases} 33,31a + 13,3b = 105,27; \\ 13,3a + 6b = 44,8. \end{cases} \quad \begin{cases} 33,31a + 13,3b = 8,54; \\ 13,3a + 6b = 53,7. \end{cases}$$

Одержуємо такі рівняння функцій пропозиції та попиту:

$$y = 1,55x + 4,03; \quad y = -2,77x + 9,56.$$

Оскільки рівноважна ціна та кількість визначається як координати точки перетину прямих попиту та пропозиції, то розв'язуємо ще одну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y = 1,55x + 4,03; \\ y = -2,77x + 9,56. \end{cases}$$

Одержимо: $x = 1,28$, $y = 6,014$.

Відповідь. Рівноважна ціна становить 1,28 гр. од., рівноважна кількість — 6,014 од.

У 1971 р. Ральф Хасбі шляхом емпіричних досліджень одержав просту **нелінійну функцію споживання** другого ступеня [4]:

$$C = 506 + 0,92y - 0,000014y^2.$$

Гранична схильність до споживання такої функції дорівнює:

$$MPC = 0,92 - 0,0028y.$$

Тобто, MPC сама є лінійною функцією за доходом і при зростанні доходу MPC знижується. Тим самим доводиться одна з гіпотез Кейнса про обернену залежність між доходом і граничною схильністю до споживання.

Функція споживання у цьому випадку має такий вигляд:

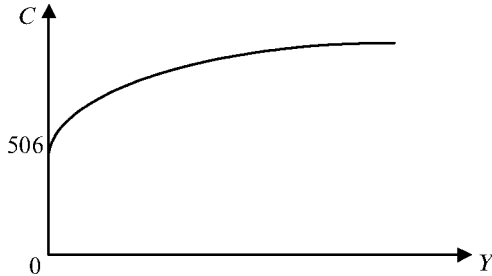


Рис. 7.4. Функція споживання Р. Хасбі

Модель, або **гіпотеза Т. Брауна** висунута 1952 року і має назву “гіпотеза збереження звичок” [4]. У ній припускається, що поточне споживання залежить від поточного доходу і споживання у минулому.

Функція споживання має вигляд:

$$C_t = a + by_t + dC_{t-1} + u_t,$$

де C_t — поточне споживання; y_t — поточний дохід; C_{t-1} — споживання у минулому, u_t — ймовірнісна помилка, яка виникає внаслідок стохастичних відхилень. У моделі застосовувався метод найменших квадратів.

Для Росії 1985–1990 рр. залежність була такою: $C = 80,35 + 0,62y$, для 1992–1995 рр. залежність набула вигляду: $C = 66,0 + 0,67y$.

Для Федеративної Республіки Німеччини періоду 1961–1975 рр. функція споживання мала вигляд:

$$C_t = 5,78 + 0,57y_t + 0,32C_{t-1} \pm 1,84.$$

Розглянемо **модель поведінки споживача** в умовах невизначеності з точки зору схильності споживача до ризику [1].

Припустімо, споживач вирішує, купувати чи не купувати лотерею за 10 грн, якщо з ймовірністю 50 % він одержить дохід у 5 грн або з ймовірністю 50 % програє 5 грн. Очікуване значення його капіталу дорівнює 10 грн, а очікувана корисність: $1/2U(15) + 1/2U(5)$ (див. рис. 7.5).

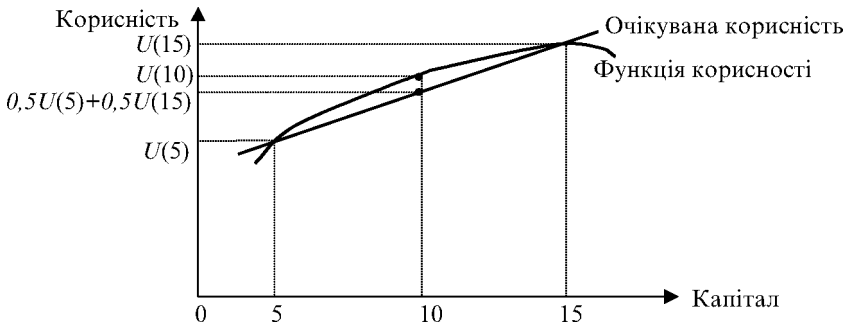


Рис. 7.5. Функція корисності споживача, який не схильний до ризику

Очікувана корисність є середньою двох чисел: $U(15)$ та $U(5)$. Якщо очікувана корисність капіталу менша за корисність очікуваного значення, значить споживач не схильний до ризику. Якщо очікувана корисність перевищує корисність очікуваного значення, то споживач схильний до ризику (рис. 7.6).

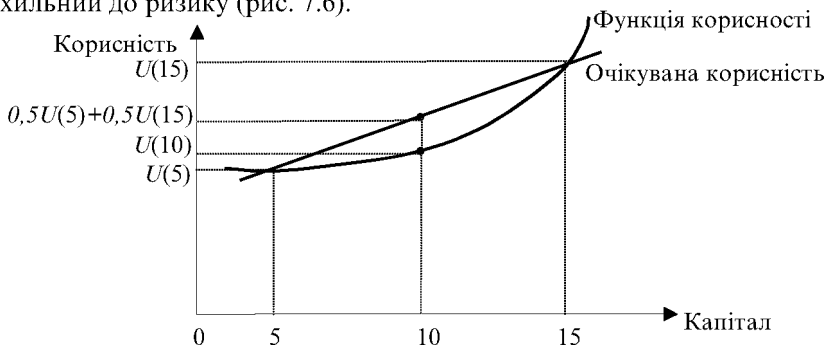


Рис. 7.6. Функція корисності споживача, який схильний до ризику

Для споживача, який не схильний до ризику, функція корисності опукла (рис 7.5). Для споживача, який схильний до ризику, функція корисності увігнута (рис. 7.6). Отже, кривизна функції корисності відбиває відношення споживача до ризику. Якщо очікувана корисність капіталу дорівнює корисності його очікуваного значення, то споживач є нейтральним до ризику.

Найчастіше показником ефективності фінансового рішення є прибуток.

У моделюванні ризикових ситуацій найпоширенішою мірою ризику деякого бізнесового рішення є середнє квадратичне відхилення значення показника ефективності цього рішення. Чим менший роз-

кид (дисперсія) результату рішення, тим менший ризик. Якщо дисперсія дорівнює нулю, ризик відсутній. Наприклад, в умовах стабільної економіки операції з державними цінними паперами вважаються безризиковими [2].

Приклад. Є два інвестиційні проекти. Перший з ймовірністю 0,6 забезпечує прибуток 15 млн грн. од., однак з ймовірністю 0,4 може призвести до втрати 5,5 млн грн. од. Для другого проекту з ймовірністю 0,8 можна одержати прибуток 10 млн грн. од. і з ймовірністю 0,2 втратити 6 млн грн. од. Який проект обрати?

Розрахуємо середню прибутковість для першого та другого проектів.

Математичне очікування для першого проекту становить $0,6 \times 15 + 0,4 \times (-5,5) = 6,8$.

Математичне очікування для другого проекту становить $0,8 \times 10 + 0,2 \times (-6) = 6,8$.

Оскільки математичні сподівання збігаються, знайдемо середні квадратичні відхилення для першого та другого проектів.

Середнє квадратичне відхилення для першого проекту становить

$$\sqrt{0,6(15 - 6,8) + 0,4(-5,5 - 6,8)} = 10,04 \text{ млн грн. од.}$$

Середнє квадратичне відхилення для другого проекту становить

$$\sqrt{0,8(10 - 6,8) + 0,2(-6 - 6,8)} = 6,4 \text{ млн грн. од.}$$

Другий проект має перевагу як менш ризикований, оскільки середнє квадратичне відхилення для нього менше, ніж для першого проекту.

Для порівняння співвідношення ризику і доходу різних інвестицій слід визначити відносний базис порівняння цих величин. Таку функцію виконує **коефіцієнт варіації**.

$$\text{Коефіцієнт варіації} = \frac{\text{Стандартне відхилення доходів}}{\text{Очікуваний дохід}}$$

Чим нижчий коефіцієнт варіації, тим сприятливіше вкладати гроші у цей проект з точки зору співвідношення ризику і доходу.

Наступна модель — **ризик портфеля інвестицій** [3].

У вищенаведеній моделі ризик і доходи розглядаються стосовно кожного окремого проекту. Проте компанії мають на своїх балансах різні активи та пасиви, а інвестори у своїх портфелях — різноманітні цінні папери. Кошти інвестуються, аби одержати максимальний дохід з найменшим ризиком. Визначення ризику і доходу всього портфеля потрібно розпочинати з підрахування стандартних відхилень та очі-

куваного доходу від окремих активів портфеля. Потім слід розподілити ризик на кілька активів або цінних паперів, аби зменшити загальний ризик. Для цього є два способи. По-перше, можна додатково вкласти гроші в різноманітні цінні папери портфеля. По-друге, можна придбати цінні папери, доходи від яких мають іншу амплітуду коливань, ніж ті, що є у портфелі. **Диверсифікація** — зменшення ризику шляхом інвестування у різні види цінних паперів. Чим більше коливаються у різних напрямках активи у портфелі, тим менший рівень ризику.

Для пошуку цінних паперів з різною амплітудою коливань користуються критерієм коваріації. **Коваріація** — це статистичний метод, який застосовується для порівняння напрямів змін двох змінних або активів у портфелі (рис. 7.7). Коефіцієнт кореляції, який змінюється у межах від $-1,0$ до $+1,0$, визначає границі та напрями, за якими доходи змінюються. Коефіцієнт $-1,0$ означає, що напрями змін доходів протилежні, і нові активи реагують так само, як і весь портфель інвестицій і не зменшують ризику. Коефіцієнт $+1,0$ означає, що напрями змін доходів однакові і ризик портфеля зменшується.

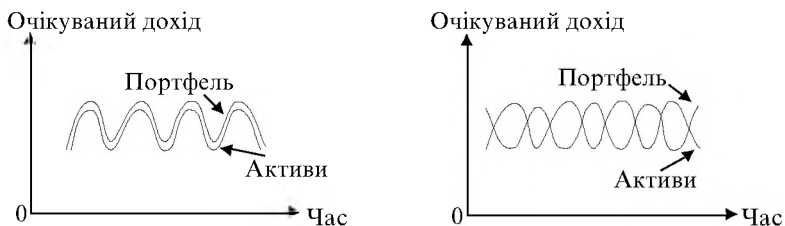


Рис. 7.7. Активи з більшим і меншим рівнем ризику

Використовуючи метод коваріації для підрахунку коефіцієнтів кореляції різних активів портфеля, можна визначити та вибрати активи, що зводять ризик портфеля до мінімуму.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- Статистика
- Середнє значення
- Математичне очікування
- Дисперсія
- Середня прибутковість
- Середнє квадратичне відхилення
- Ризик
- Коефіцієнт варіації
- Регресійний аналіз
- Метод найменших квадратів
- Лінійна регресія
- Емпірична формула
- Модель Р. Хасбі
- Гіпотеза Т. Брауна
- Метод коваріації
- Диверсифікація

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яким основним вимогам повинні задовольняти економіко-статистичні моделі?
2. Які групи економіко-статистичних моделей ви знаєте?
3. Що є показником ефективності фінансового рішення?
4. Що є мірою ризику у прийнятті фінансового рішення?
5. Які ви знаєте статистичні критерії?
6. Наведіть приклади статистичних моделей.
7. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
8. У чому особливості моделювання економічних процесів в умовах ризику?
9. Чим відрізняються функції споживання Кейнса і Хасбі?
10. Розтлумачте поведінку споживача, схильного до ризику через зображення функції корисності.

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. До статистичних критеріїв не належить критерій:
 - а) Стьюдента;
 - б) мінімаксний;
 - в) Фішера;
 - г) Х-квадрат.
2. Зв'язки у статистичних моделях мають:
 - а) лінійний характер;
 - б) стохастичний характер;
 - в) цілочисельний характер;
 - г) ймовірнісний характер.
3. До статистичних моделей не належать:
 - а) моделі структури;
 - б) моделі взаємозв'язку;
 - в) сіткові моделі;
 - г) моделі динаміки.
4. Середній квадрат відхилення випадкової величини від середнього значення називається:
 - а) математичним очікуванням;
 - б) виборкою;
 - в) дисперсією;
 - г) ризиком.
5. За методом найменших квадратів мінімум функції досягається у точці, в якій похідна суми за параметрами дорівнює:
 - а) одиниці;
 - б) математичному очікуванню;
 - в) нулю;
 - г) дисперсії.
6. У моделюванні ризикових ситуацій найпоширенішою мірою ризику деякого бізнесового рішення є:
 - а) середнє квадратичне відхилення;
 - б) математичне очікування;
 - в) прибуток;
 - г) дохід.

7. Для споживача, який не схильний до ризику, пропонується вибір між грою, яка забезпечує 100 євро з ймовірністю 25 %, і 10 євро з ймовірністю 75 % та одномоментною виплатою у 32,5 євро. Що він обере?

8. У таблиці подано значення та ймовірності випадкової величини X .

X	2	3	5	1	6	7	4
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,15	0,05	0,1

Обчисліть величину математичного очікування випадкової величини.

9. Існує два інвестиційні проекти. Перший з ймовірністю 0,8 забезпечує прибуток 10 млн гр. од. та може з ймовірністю 0,2 втратити 2 млн гр. од. Для другого проекту з ймовірністю 0,75 можна одержати прибуток 12 млн гр. од. і з ймовірністю 0,25 втратити 8 млн гр. од. Який проект обрати?

10. Номінальні доходи в умовній економіці зросли відповідно до темпу зростання рівня цін у країні за певний період таким чином:

Рівень цін, X	1,05	1,1	1,2	1,25	1,5	1,6
Номінальний дохід, Y	4,5	5	5,2	5,7	6,2	7,0

Якісний аналіз даних засвідчив, що за емпіричну залежність можна використати лінійну залежність $Y = AX + B$. Запишіть рівняння лінійної регресії для даних рівня цін і номінального доходу в країні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вэриан Х. Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход: Учеб. для вузов / Пер. с англ. под ред. Н. Л. Фроловой. — М.: ЮНИТИ, 1997.
2. *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталеv Е. Ю.* Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2000.
3. *Нікбахт Е., Гроппеллі А.* Фінанси: Пер. з англ. — К.: Основи, 1993.
4. *Селищев А. С.* Макроэкономика. — СПб.: Питер, 2000.

ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

Економетрія та прогнозування
Прикладні економетричні моделі Франції та США
Макроеконометричні моделі України

8.1. ЕКОНОМЕТРІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ

Економетрія — прикладна економіко-математична дисципліна, яка вивчає динаміку реальних мікро- та макроекономічних явищ і процесів для кількісного та якісного аналізу й прогнозування результатів розвитку економічних систем, процесів і явищ.

Економетричні моделі являють собою системи взаємопов'язаних рівнянь і використовуються для кількісних оцінок параметрів економічних процесів та явищ.

За внесок у розвиток економетричних моделей і методів 1969 р. Нобелівську премію одержали Р. Фріш і Я. Тінберген. 1980 р. за створення економічних моделей і застосування їх до аналізу економічних коливань і економічної політики Нобелівську премію одержав Л. Кляйн. За пояснення фундаментальних основ економетрики за допомогою теорії ймовірностей та за аналіз одночасних економічних структур нобелівським лауреатом 1989 р. став Т. Хаавельмо, нарешті, 2000 р. Нобелівську премію одержали Д. Хекман і Д. МакФадден “За розробку мікроеконометрії та методів статистичного аналізу”.

Економетричні моделі в Україні, зокрема, можуть досліджувати такі проблеми.

- Аналізувати вплив основних макроекономічних показників на обсяги ВВП (інфляція, безробіття, індекс споживчих цін тощо).
- Прогнозувати основні макроекономічні показники на наступні періоди (реальний і номінальний ВВП, рівні зайнятості та безробіття, індекси цін).
- Аналізувати та прогнозувати перспективи розвитку банківської системи, при цьому враховувати її основні показники (баланс, статутний фонд, прибуток, депозити, кредити тощо).

- Досліджувати вплив основних макроекономічних показників на обсяги капіталовкладень, оскільки, зростання капіталовкладень є одним з елементів піднесення в економіці.

- В умовах ринкової економіки, враховуючи дію законів попиту та пропозиції, соціальну спрямованість сучасної економіки, аналізувати та прогнозувати приватні споживання та заощадження з урахуванням таких чинників: заробітна плата, трансфертні виплати, рівень інфляції, споживання продовольчих і непродовольчих товарів, курси іноземних валют, купівля валюти та цінних паперів тощо.

- Досліджувати грошовий ринок на основі рівноважної моделі грошового ринку з визначенням єдиної відсоткової ставки. Враховувати показники грошових агрегатів, грошової пропозиції, грошової бази.

- Аналізувати та прогнозувати розвиток української економіки у межах світового господарства з урахуванням чинників впливу на курс національної валюти, торгівельного та платіжного балансів, тарифних і нетарифних методів торгівельної політики.

Прогнозування — це науково обґрунтоване виявлення можливих тенденцій розвитку досліджуваних процесів. Необхідність прогнозування пов'язана з НТП і бурхливим розвитком економіко-соціальних процесів. Процес, що прогнозується, повинен мати ряд альтернатив розвитку та бути інерційним, тобто зберігати у перспективі свої основні риси та закономірності.

Залежно від тривалості періоду розрізняють три види прогнозів: короткострокові (період прогнозування не більше одного року), середньострокові (від одного до п'яти років), довгострокові (понад п'ять років).

Розробки у сфері економічного прогнозування в зарубіжних країнах з'явилися в останній чверті ХІХ ст. і були пов'язані зі спробами дослідників виявити майбутні тенденції виробництва основних продуктів на основі аналізу динаміки статистичних даних, які є в їх розпорядженні. Головними методами прогнозування на той час були експертні оцінки (на основі якісного аналізу рядів) та проста екстраполяція (перенесення минулих тенденцій на майбутнє).

На початку ХХ ст. зроблені перші спроби виявлення економічних індикаторів. 1911 р. Дж. Брукмайер спробував використовувати для прогнозування три хронологічні ряди таких показників: індекс банківських кредитів, індекс цін акцій, індекс загальної економічної активності. Подальший розвиток цей підхід одержав у 20-ті роки в дослідженнях Гарвардського університету. За основу були взяті "гарвардські криві": індекс вартості цінних паперів на біржі, величина депозитів у банках, норма відсотка. Поштовхом у подальшому розвитку прогно-

зування та планування у світі стала світова економічна криза 1929–1933 рр. У 30-ті роки за кордоном виникає планування на макрорівні. Найбільшу популярність отримала Гарвардська школа економічних барометрів (барометрів розвитку), яка повинна була передбачати майбутню кон'юнктуру, тобто прогнозувати динаміку товарного і грошового ринків. Засновниками економетрики вважають Р. Фріша, Я. Тінбергена, Е. Шумпетера. Нині у світі сформувалося три провідні системи планування та регулювання: північно-американська (США, Канада), азійська (Японія та Південна Корея), європейська (Франція та Швеція). Лідером у прогнозуванні є США. Прогнозування в США вважається однією з найважливіших форм регулювання економіки.

Для прогнозування застосовують методи експертних оцінок, методи статистичного прогнозування та змішані методи (поєднання перших двох). З відомих експертних методів найчастіше використовують методи “Дельфі” та “Мозкових атак”. За **методом “Дельфі”** формують групи, які складаються з одного або більше експертів. Кожна група одержує перелік питань з перспективного розвитку систем і відповідає на них самостійно, незалежно від інших груп. На підставі відповідей експертів будується прогноз. Далі починається узгодження прогнозу доти, доки думки всіх експертів збігаються або будуть близькими. За **методом “Мозкових атак”** усі експерти збираються за “круглим столом”. Кожен висловлює власний прогноз щодо розвитку досліджуваної системи. Усі думки експертів обговорюються, аналізуються і з них вибирається найбільш прийнятна.

Макроекономічне моделювання вже кілька десятиліть використовується як зручне знаряддя аналізу, імітації та прогнозування економічних процесів у державних і недержавних установах багатьох країн.

8.2. ПРИКЛАДНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ФРАНЦІ ТА США [4]

Макроекономічна модель Франції була розроблена у 60-ті роки і мала назву FIFI. Вона містила 2000 рівнянь, що характеризували поведінку суб'єктів господарювання та елементи фінансового моделювання. Згодом з'явилися більш універсальні статичні моделі STAR та ZOGOL. 1978 р. було розроблено динамічну багатосекторну модель DMS, яка налічувала 1300 рівнянь і охоплювала 13 галузей економіки. Наступною була модель METRIC, яка використовувалась для діагностування кон'юнктури, бюджетного планування і контролю. І нарешті, моделі DMS (3200 рівнянь), Mini DMS1 (45 рівнянь), Mini

DMS2 (400 рівнянь), AMADEUS (з кількома версіями: річною, динамічною, двогалузеву).

Для моделювання фінансових потоків були розроблені моделі MEFISTO та BAF, для дослідження міжнародної кон'юнктури — MOSAIQUE та MIMOZA. Усім моделям спочатку було властиве ускладнення, потім — перехід до спрощених і зручних у користуванні моделей.

Нині в установах Франції використовують п'ять сучасних макроекономічних моделей: дві моделі Міністерства економіки, фінансів та промисловості Франції — AMADEUS та METRIC, модель Банку Франції — BAF, дві моделі OFCE та Паризької палати торгівлі та промисловості — MOSAIQUE та HERMES.

Загальною ознакою всіх моделей є неокейнсіанський підхід.

Більшість макроеконометричних моделей США ґрунтується на кейнсіанському підході до визначення доходу або ВВП та його основних компонентів.

Моделі використовують за трьома напрямками: структурного аналізу (визначення мультиплікаторів), прогнозування обсягів і темпів зміни ВВП, оцінювання ефективності економічної політики (аналіз ефективності державних витрат чи змін рівня оподаткування).

Найчастіше у моделях використовують змінні: споживання, інвестиції, урядові витрати, чисті іноземні інвестиції, доходи, ціна, заробітна плата, відсоткові ставки, зайнятість, безробіття, виробництво, активи.

У макроеконометричних моделях США найчастіше мають місце такі функціональні залежності:

$$C_p = f(Y, E_c);$$

$$I = f(Y, Y_{-1}, E_i);$$

$$Y = C_p + I + C_g + NX,$$

де C_p — обсяг приватного споживання; Y — обсяг ВВП; E_c , E_i — змінні, які характеризують вплив випадкових чинників на обсяги приватного споживання та обсяги інвестицій; I — обсяг інвестицій; C_g — обсяг державного споживання; NX — обсяг чистого експорту.

Перше рівняння характеризує функціональну залежність між обсягом споживання, величинами національного доходу і чинниками стохастичної природи. Друге рівняння описує взаємозв'язок між обсягом інвестицій, поточним і попереднім національним доходом і впливом випадкових чинників. Третє рівняння — основна макроекономічна тотожність.

Екзогенними змінними в моделі є Cg, NX . Ендогенними — Cr, I, Y . Макроеконометричні моделі США складаються з п'яти основних: Клейна, Клейна–Гольдбергера, Уартона, MPS, DRI.

1. **Модель Клейна** (“міжвоєнна модель”) слугувала для аналітичного дослідження функціонування економіки США за період між Першою та Другою світовими війнами (1921–1941).

Особливості моделі. Екзогенними змінними виступають змінні, які характеризують державну економічну політику у сфері витрат, заробітної плати та податків: державні витрати (окрім витрат на заробітну плату держслужбовцям), заробітна плата держслужбовцям, податки на бізнес, час. Ендогенні змінні: випуск — приватний (недержавний) національний продукт у ринкових цінах, споживання, чисті інвестиції, заробітна плата працівників, зайнятих у недержавному секторі, прибуток, капітальні запаси на кінець року. Нині ця модель практично не використовується.

2. **Модель Клейна–Гольдбергера** розроблена для вивчення економіки США за період з 1921 по 1952 р. за винятком воєнних 1942–1945 рр. Початкова версія побудована на річних спостереженнях, характеризується фіксованою величиною податків, містить 20 рівнянь, з яких 15 є стохастичними, 5 — тотожності.

Ця модель стала основою версій економетричних моделей для прогнозування рівня економічного розвитку США. Екзогенні змінні моделі: державні витрати, прямі та непрямі податки, чисельність населення та робочої сили, кількість відпрацьованих годин, надлишкові резерви, рівень цін імпортних закупівель. Ендогенні змінні: сукупний дохід, споживання, валові приватні інвестиції, величина амортизації, обсяг імпорту, загальні заощадження, кількість приватних працівників, прибуток, обсяг капітальних запасів, величина ліквідних активів, рівень цін, рівень відсоткових ставок.

Модель теоретично ґрунтується на кейнсіанській теорії, а саме на споживчому попиті. Перевага моделі — здатність адекватно відтворювати та прогнозувати коливання економічної активності в США.

3. **Модель Уартона** є похідною моделі Клейна–Гольдбергера. Особливості моделі. Найчастіше розраховується на основі квартальних показників. Призначена для складання короткострокових прогнозів. Висока точність статистичного обліку. Цілісне представлення монетарного блоку моделі. Складається з 76 рівнянь, з яких 47 — стохастичні, 29 — макроекономічні тотожності. Переваги: краще за річні моделі відтворює коливання ділової активності. Пристосована для вивчення короткострокового періоду макроекономічних про-

цесів. У моделі розглядаються економетричні залежності, наприклад, крива Філіпса, яка графічно відображає зв'язок між рівнем заробітної плати та агрегованим рівнем безробіття. Параметри модельних рівнянь оцінюються за допомогою методу найменших квадратів. Остання версія моделі має назву “Модель Марк-9”, яка містить субмодель “витрати–випуск”, блок торгівлі та використовує граничні величини.

4. Модель MPS — спільна економетрична розробка Федерально-го резервного бюро, Міністерства зовнішньої торгівлі США та Пенсильванського університету. Призначена для щоквартальної оцінки економічного впливу альтернативних варіантів монетарної політики. Складається з більш ніж 100 рівнянь. Має шість блоків: кінцевого попиту, розподілу доходу, податків і трансфертних виплат, ринку праці, цін і фінансового сектора.

5. Модель DRI — наймасштабніша американська економетрична модель. Розроблена на основі Брукінгської моделі та моделі Уартона. Останній варіант моделі розроблений під впливом кількох течій: кейнсіанської, неокласичної та монетарної. Модель структурована на кількох рівнях і має 10 секторів: внутрішні приватні витрати; виробництво і доходи; урядові надходження і витрати; міжнародні потоки; фінанси; ціна, заробітна плата, продуктивність праці; пропозиція; очікування; населення; інші агрегати та показники.

Розглядаючи інші прогнозні американські моделі, зазначимо, що першою макроеконометричною моделлю ХХ ст. для дослідження ділових циклів Америки протягом 1919–1932 рр. була **модель Тінбергена** — перша спроба кількісного вивчення предмета аналізу бізнес-циклів.

Модель Валаваніша враховувала статистичні спостереження з 1869 по 1953 р. і була спрямована на вивчення довгострокового періоду розвитку.

Модель Дьюзенбері–Екстейна Фромма (DEF–модель) описує поквартальний розвиток економіки США в умовах рецесії.

Брукінгська модель створена на початку 60-х років ХХ ст. Досить складна економетрична щоквартальна модель. Була не досить точною в прогнозних оцінках, і тому з 1960 р. її використовували для аналізу економічної ситуації, а не як прогнозу.

8.3. МАКРОЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ УКРАЇНИ [4]

Усі моделі є найбільш вагомими аналітичними та прогнозними знаряддями для дослідження проблем макроекономічного розвитку України.

1. **Макромодель економіки України-1** розроблено фахівцями Інституту економічного прогнозування НАН України. Призначена для складання середньострокових прогнозів розвитку ключових макроекономічних показників. Використовуються показники і залежності СНР України з урахуванням цілей економічної політики. Модель є економетричною, має блочну структуру та щорічне вимірювання. Складається з 33 стохастичних рівнянь і тотожностей. Блоки-сектори моделі: блок реального сектора, блок сектора споживання та доходів населення, блок державного сектора, блок зовнішньоекономічного сектора, блок грошово-кредитного сектора.

Особливості моделі. Блоки моделі узгоджені показниками платіжного, монетарного балансів і балансу державного бюджету. Теоретичною базою моделі є кейнсіанський підхід.

2. Макроеконометричні моделі прогнозування **УКР-МАКРО-3, УКР-МАКРО-4**. Це наймасштабніші моделі.

УКР-МАКРО-3 має блочну структуру і шість підсистем: виробництво; зайнятість і безробіття; фонди та капітальні вкладення; фінанси та податки; соціальна сфера; ринок товарів і послуг. Переваги моделі: широке охоплення, значний ступінь деталізації (28 рівнянь, з них 4 — тренди), враховування специфіки української економіки (імпорт нафти, газу), три способи оцінки інфляційного впливу, кількісна оцінка соціальних ситуацій. Недоліки: статистична необ'єктивність, яка пов'язана з недосконалістю статистичного обліку в Україні, жорстким податковим тиском і мінливими правовими нормами.

3. **Моделююча система Бюджет**. Розробка Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Призначена для розв'язування задач бюджетного та макроекономічного моделювання. Має блочний принцип побудови — 8 блоків, кожен з яких є окремою економіко-математичною моделлю або групою моделей.

4. **Модель середньострокового прогнозування** розроблена в Інституті кібернетики. Призначена для розрахунку щорічних темпів росту ключових макроекономічних змінних (реальний ВВП, рівень інфляції, безробіття) і базується на використанні виробничих функцій Кобба–Дугласа. Розробка містить 2 підмоделі: нелінійну квартальну модель (8 рівнянь) і лінійну річну (3 рівняння). Особливості моделі: використання експертних оцінок для коригування статистичних даних, які характеризують період початку 90-х років. Недолік: спрощений опис макроекономічних процесів, спрощена фор-

малізація виробничої функції. Переваги: оцінювання стану основного виробничого капіталу, врахування показників паливно-енергетичного балансу, залучення експертних оцінок як способу коригування та доповнення статистичних даних.

5. Квартальна (річна) модель прогнозного розрахунку реального ВВП. Розроблена в Кібернетичному центрі НАН України прогнозна модель є лінійною багатофакторною регресією і може використовуватися для середньо- та довгострокового прогнозування. Переваги моделі: висока точність її показників. Недолік: відсутність певної економічної теорії.

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ

- *Економетрія*
- *Прогнозування*
- *“Гарвардські криві”*
- *Метод “Дельфі”*
- *Метод “Мозкових атак”*
- *Економетрика*
- *Економетричні моделі*
- *Експертні оцінки*
- *Короткострокові та середньострокові прогнози*
- *Макроекономічні моделі Франції*
- *Макроеконометричні моделі США*
- *Макроекономічні моделі України*

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що означає категорія “прогнозування”? Які види прогнозів ви знаєте?
2. Які методи прогнозування ви знаєте?
3. Що належить до “гарвардських кривих”?
4. Яка основна особливість економетричних моделей Франції?
5. На якій теорії ґрунтується більшість моделей США?
6. Які методи застосовують при розв’язанні задач за побудованими моделями США?
7. З яких секторів утворена макромодель економіки України-1?
8. У чому особливість моделі прогнозування УКР-МАКРО-3?
9. У чому переваги та недоліки української моделі середньострокового прогнозування?
10. Які б моделі ви запропонували для аналізу та прогнозування економіки України?

ТЕСТИ ТА ЗАДАЧІ

1. Науково обґрунтоване виявлення можливих тенденцій розвитку досліджуваних процесів — це:

- а) моделювання;
- б) абстрагування;
- в) прогнозування;
- г) імітації.

2. Засновниками економетрики є:

- а) Р. Фріш;
- б) Р. Солоу;
- в) Д. Кейнс;
- г) В. Леонтьєв.

3. До методів прогнозування не належать методи:

- а) рівноваги;
- б) експертних оцінок;
- в) статистичні;
- г) “Мозкових атак”.

4. До “гарвардських кривих” у моделях США ХХ ст. не входили показники:

- а) індекс вартості цінних паперів на біржі;
- б) величина депозитів у банках;
- в) норма відсотка;
- г) споживання домогосподарств.

5. До провідних систем регулювання та прогнозування економіки належить система:

- а) європейська;
- б) китайська;
- в) мексиканська;
- г) українська.

6. До економетричних моделей Франції належить модель:

- а) Тінбергена;
- б) Клейна;
- в) MPS;
- г) AMADEUS.

7. Більшість макроеконометричних моделей США ґрунтується на теорії:

- а) класичній;
- б) кейнсіанській;
- в) монетарній;
- г) суспільного вибору.

8. Американською макроеконометричною моделлю, розробленою під впливом кейнсіанської, неокласичної та монетарної теорій, модель:

- а) DRI;
- б) Клейна;
- в) Тінбергена;
- г) Уартона.

9. Макроеконометричною моделлю України, яка враховує специфіку української економіки (експорт нафти та газу), є:

- а) моделююча система Бюджет;
- б) модель УКР-МАКРО-3;
- в) модель середньострокового прогнозування;
- г) квартална модель прогнозного розрахунку реального ВВП.

10. Кожен з блоків української моделюючої системи Бюджет є окремою:

- а) рівноважною моделлю;
- б) економіко-математичною моделлю;
- в) балансовою моделлю;
- г) моделлю теорії ігор.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки: Навч. посіб. — К.: Вид-во КНЕУ, 2003.
2. *Корольов О. А.* Економетрія: Навч. посіб. — К.: Нац. торг.-екон. ун-т, 2000.
3. *Костіна Н. І., Алексєєв А. А., Василик О. Д.* Фінанси: система моделей і прогнозів: Навч. посіб. — К.: Четверта хвиля, 1998.
4. *Макроекономічне моделювання та короткострокове прогнозування / За ред. І. В. Крючкової.* — Харків: Форт, 2000.
5. *Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П.* Економетрія: Підручник. — К.: Вид-во КНЕУ, 2000.
6. *Прогнозирование и планирование экономики: Учеб. пособие / Под общ. ред. В. И. Борисевича, Г. А. Кандауровой.* — Минск: Интерпрессервис, 2001.

ДОДАТОК

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПРОЦЕСУ МОДЕЛЮВАННЯ

Функція. Поняття функції, або функціональної залежності, є основним математичним поняттям у моделюванні. За допомогою функції моделюють взаємозв'язки між різними величинами та показниками.

Задана функція f , якщо задано закон, за яким кожному значенню x з множини A ставиться відповідно певне значення y з множини B : $y = f(x)$, x називають незалежною змінною (аргументом), а y — залежною змінною, A — область визначення функції, B — область зміни функції.

Функцію можна задати формулою, таблицею, графіком.

1. Аналітичний: функція повних витрат фірми $TC = FC + VC$.
2. Табличний: функція попиту.

Ціна, грн. за од.	2	3	4	5
Обсяг попиту, од.	20	18	16	14

3. Графічний: залежність між доходом і споживанням домашніх господарств за рік. Графіки двох змінних дозволяють проаналізувати два економічних параметри за допомогою системи координат.

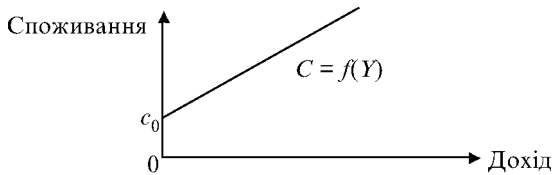


Рис. 9.1. Функція споживання

Лінійні функції в економіці

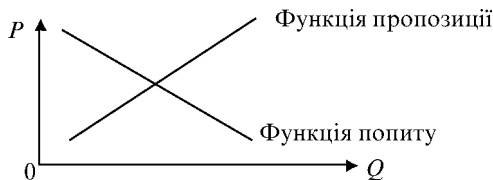


Рис. 9.2. Функції попиту та пропозиції

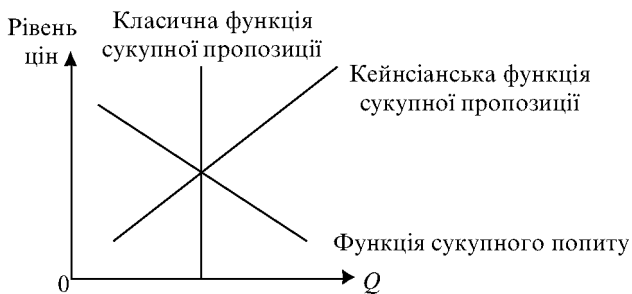


Рис. 9.3. Функції сукупного попиту та сукупної пропозиції

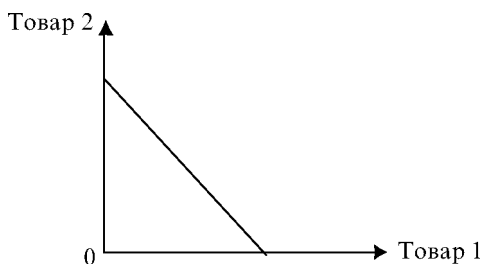


Рис. 9.4. Функція бюджетного обмеження споживача

Функції корисності. $U(X_1, X_2) = X_1 X_2$. Графіком функції корисності є крива байдужості.

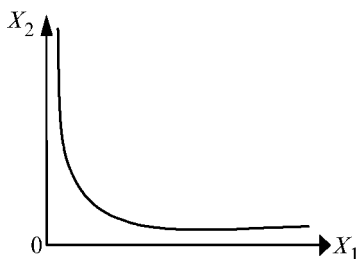


Рис. 9.5. Крива байдужості

Функція спекулятивного попиту на гроші (попит на гроші як на майно) показує, скільки грошей домашні господарства бажають тримати при різних відсоткових ставках (при різних цінах цінних паперів): $L = L(i)$.

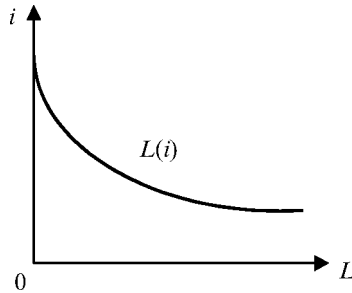


Рис. 9.6. Функція спекулятивного попиту на гроші

Похідна функції

Першою похідною функції $f(x)$ у точці x називають скінченну границю відношення приросту функції $\Delta y = \Delta f(x)$ до приросту аргумента Δx за умови, що Δx прямує до нуля.

$$f'(x) = \lim(\Delta y / \Delta x).$$

Операцію знаходження похідної $f'(x)$ називають операцією диференціювання функції $f(x)$.

Диференціальне числення в економіці.

За допомогою диференціального числення вивчають зв'язки економічних величин, які записують у вигляді функції. Диференціалом dx незалежної змінної x називають її лінійний приріст.

Геометричний зміст похідної та диференціала (рис. 9.7).

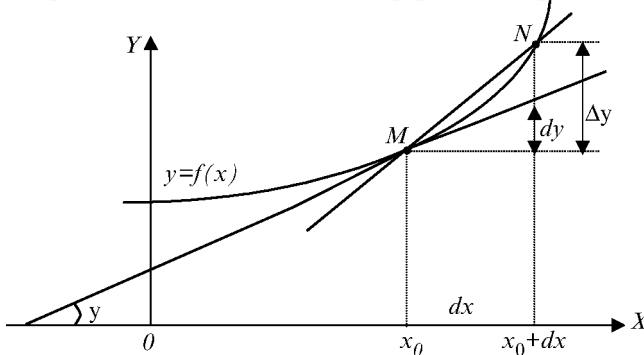


Рис. 9.7. Геометричний зміст похідної та диференціала

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $m(x_0, f(x_0))$ називають граничне положення січної MN при довільному прямуванні точки N до точки M по графіку функції. Значення похідної $f'(x_0)$ у точці x_0 визначає кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до графіка функції $f(x)$ у точці $M(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$, де φ — кут між додатним напрямком вісі OX і дотичної, який відраховується проти часової стрілки.

Застосування похідної в економіці.

Гранична норма заміщення в задачах споживчого вибору (взаємозамінюваність благ). Функції корисності $U(X_1, X_2) = X_1 X_2$.

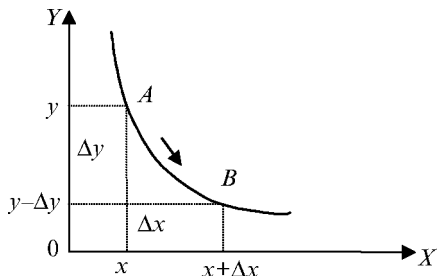


Рис. 9.8. Гранична норма заміщення

Гранична норма заміщення показує, на скільки одиниць споживання блага X потрібно збільшити, щоб повністю компенсувати споживачу зменшення споживання блага Y на одну додаткову одиницю.

$$MRS = \frac{-\Delta y}{\Delta x}. \text{ Для неперервного випадку } MRS = -\frac{dy}{dx}.$$

Збереження значення функції незмінним означає, що приріст y , а отже, і його головна частина, повинні дорівнювати нулю.

$$df(x, y) = 0; \quad df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{f'_y(x, y)}{f'_x(x, y)}.$$

В економічних моделях широко використовуються лінійні та нелінійні функції двох і n змінних.

Впорядкована пара перших часткових похідних:

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2}$$

функції $f(X_1, X_2)$ двох змінних X_1 та X_2 позначається символом $\text{grad } f(X_1, X_2)$ і називається градієнтом функції $f(X_1, X_2)$ двох змінних.

Градієнт функції в точці A показує напрям найшвидшого зростання функції $f(X_1, X_2)$ у цій точці.

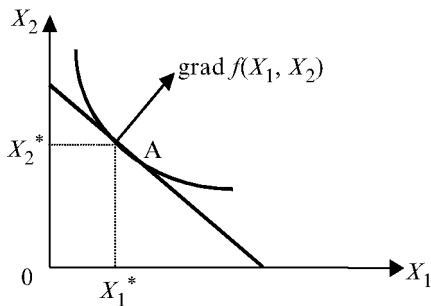


Рис. 9.9. Градієнт функції

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ляшенко І. Н., Ляшенко Е. І.* Математика для економістів. — Донецьк: Изд-во ДонГУ, 1999.
2. *Справочник по математике для економістів / Под ред. В. І. Ермакова.* — М.: Высш. шк., 1987.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

- Розділ 1. 8. $\text{grad } F(x_1, x_2) = (9, 12)$. 9. $TC(Q) = 20 + 4Q$.
- Розділ 2. 4. $C = 1,5 + 0,75Y$, $S = -1,5 + 0,25Y$.
5. $C = 0,8 + 0,8Y$.
6. $X_2 = 20/(2X_1 + 1)$.
7. $2X_1 + 2,5X_2 = 50$.
8. $r = 3\%$.
9. $C = 0,02W + 0,6Y$, $Y = 80$ тис. гр. од.
10. 300 тис. гр. од.
- Розділ 3. 6. $Q_d = 38 - 2P$.
8. а) 155 млрд. гр. од.; б) $S_g = -2$; в) по 1 млрд гр. од.
9. Зросте на 30 млрд гр. од.
10. 3350 млрд гр. од.
11. Утричі
- Розділ 4. 8. $k^* = 1,77$; 9. $k^* = 17,36$.
- Розділ 5. 7. $f_{\min}(0,1)=1$. 8. $f_{\max}(2, 5; 0, 75) = 6,5$.
9. $x = -1/12$ точка максимуму. 10. $x_1 = 3,04$; $x_2 = 7,58$.
- Розділ 6. 6. Фірми порівну поділяють ринок $Q_1 = Q_2 = 16$.
7. Нижня та верхня ціна гри = 5.
8. б.
11. $L_{\min}(0, 1, 7) = 7$.
12. $L_{\max}(0, 1, 3, 7) = 13$.
- Розділ 7. 7. Одномоментну виплату.
8. $MX = 3,85$.
9. Перший проект.
10. $Y = 0,5X + 3,96$.

ЗМІСТ

<i>Передмова</i>	3
Розділ 1	
<i>ВСТУП ДО МОДЕЛЮВАННЯ</i>	4
1.1. Предмет моделювання	4
1.2. Основні класифікації моделей	5
1.3. Етапи процесу моделювання	6
1.4. Історичний розвиток предмета моделювання	8
<i>Основні терміни</i>	9
<i>Контрольні запитання</i>	10
<i>Тести та задачі</i>	10
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	11
Розділ 2	
<i>МОДЕЛІ СПОЖИВЧОГО РИНКУ</i>	12
2.1. Модель поведінки споживача	12
2.2. Кейнсіанська модель споживання	15
2.3. Модель міжчасового споживчого вибору І. Фішера	17
2.4. Модель життєвого циклу Ф. Модільяні	19
2.5. Модель перманентного доходу М. Фрідмена	20
<i>Основні терміни</i>	22
<i>Контрольні запитання</i>	22
<i>Тести та задачі</i>	23
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	24
Розділ 3	
<i>МАКРОЕКОНОМІЧНІ РІВНОВАЖНІ ТА БАЛАНСОВІ МОДЕЛІ</i>	25
3.1. Базові моделі ринкової економіки	25
3.2. Моделі фіскальної політики	31
3.3. Моделі банківської системи	33
3.4. Балансові моделі	34
<i>Основні терміни</i>	36
<i>Контрольні запитання</i>	36
<i>Тести та задачі</i>	37
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	39

Розділ 4

<i>ДИНАМІЧНИ МОДЕЛ</i>	40
4.1. Виробнича функція	40
4.2. Моделі економічного циклу	43
4.3. Моделі економічного зростання	47
<i>Основні терміни</i>	55
<i>Контрольні запитання</i>	56
<i>Тести та задачі</i>	56
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	57

Розділ 5

<i>ОПТИМІЗАЦІЙНИ МОДЕЛ</i>	59
5.1. Моделі математичного програмування	59
5.2. Еколого-економічні моделі оптимізації	61
5.3. Задачі безумовної та умовної оптимізації та методи їх розв'язування	64
5.4. Метод Лагранжа для розв'язування задач оптимізації на умовний екстремум	66
<i>Основні терміни</i>	69
<i>Контрольні запитання</i>	70
<i>Тести та задачі</i>	70
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	71

Розділ 6

<i>ТЕОРІЯ ІГОР, ТЕОРІЯ ГРАФІВ І СІТКОВЕ ПЛАНУВАННЯ</i>	73
6.1. Основні поняття та класифікація ігор	73
6.2. Застосування апарату теорії ігор в економіці	77
6.3. Теорія графів і сіткове планування	79
<i>Основні терміни</i>	84
<i>Контрольні запитання</i>	85
<i>Тести та задачі</i>	85
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	87

Розділ 7

<i>СТАТИСТИЧНИ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ</i>	88
7.1. Основні статистики	88
7.2. Методи статистичного аналізу	90
7.3. Прикладні статистичні моделі та методи в економіці	93
<i>Основні терміни</i>	98
<i>Контрольні запитання</i>	99
<i>Тести та задачі</i>	99
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	100

Розділ 8

<i>ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ</i>	101
8.1. Економетрія та прогнозування	101
8.2. Прикладні економетричні моделі Франції та США	103
8.3. Макроеконометричні моделі України	106
<i>Основні терміни</i>	108
<i>Контрольні запитання</i>	108
<i>Тести та задачі</i>	109
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	110
<i>Додаток. Математичний апарат процесу моделювання</i>	111
<i>Відповіді до задач</i>	116

In the proposed manual basic models of the market economy are stated. Tests and tasks, recommended literature is given to each chapter. The manual contains tooling of mathematical analysis, examples of its usage and it successfully combines the study of mathematical instruments with economy.

It is meant for students of all educational forms, candidates and people working for doctor's degree.

Навчальне видання

Малиш Наталія Андріївна

**МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ
ПРОЦЕСІВ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ**

Навчальний посібник

Educational edition

Malysh, Nataliya A.

**ECONOMICAL PROCESSES
OF MARKET ECONOMY MODELLING**

Educational manual

Відповідальний редактор *В. Д. Бондар*

Редактор *Н. В. Тихонова*

Коректори *Л. П. Ковальчук, Т. К. Валицька*

Комп'ютерне верстання *Т. В. Кулік*

Оформлення обкладинки *О. О. Стеценко*

Підп. до друку 09.02.04. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 6,98. Обл.-вид. арк. 6,8. Тираж 5000 пр. Зам. № 130

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 8 від 23.02.2000*

СПД Чалчинська Н. В.
03146 Київ-46, вул. Жмеринська, 22, кв. 125

Свідоцтво ДК № 1011 від 23.08.2000