

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

ТЕОРЕМА КЕЛІ ДЛЯ ДЕРЕВ
Курсова робота за спеціальністю "Прикладна
математика"

Керівник курсової роботи
канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач
Тимошкевич Л. М.

(підпис)

«_____» _____ 2021р.

Виконав студент
3-го року навчання
Тютюнник Д. Р.

«_____» _____ 2021р.

Зміст

1. Вступ	3
1.1 Означення	4
2. Теорема Келі для дерев та її доведення	5
2.1 Формулювання теореми	5
2.2 Доведення теореми через рекурсію	6
2.3 Доведення теореми через бієкцію	8
2.4 Доведення методом подвійного рахунку	11
2.5 Код Прюфера	13
3. Розв’язок задач з використанням теореми Келі	16
3.1 Задачі на теорема Келі	16
3.2 Задачі на код Прюфера	20
4. Висновки	21
5. Список літератури	22

1. Вступ

За роки існування математики у ній виділилося велика кількість галузей: геометрія, математичний аналіз, теорія ймовірностей, теорія графів, топологія та інші. Кожна з них покриває певну область математичних знань, досліджуючи саме її та відповідаючи на питання, що її стосуються. Однак з часом стає зрозуміло, що всі ці області перетинаються, і настає потреба для розуміння однієї звертатися до знань іншої. Так, у синергії одна з одною, окремі області математики примножують знання усієї науки в цілому та сприяють більш глибокому її розумінню.

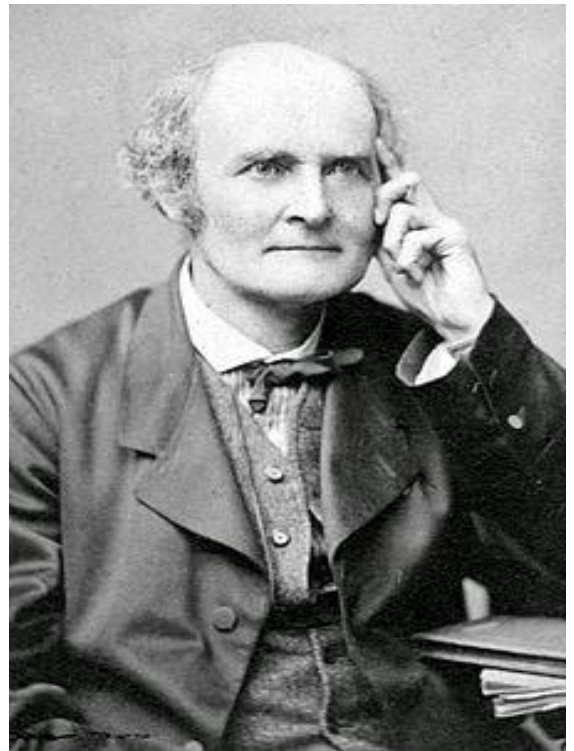
Одним з прикладів такого "симбіозу" є теорема Келі для дерев, виведена у дев'ятнадцятому столітті англійським математиком Артуром Келі, відомим своїми роботами з лінійної алгебри та диференціальних рівнянь. Однак сама теорема не торкається цих областей математики, натомість стосуючись теорії графів та комбінаторики.

Що цікаво, до самого Келі, який довів цю теорему у 1889 році, її ж ще раніше довів німецький математик Карл Вольгельм Борхард, а ще до нього, у 1857 році, – земляк Артура Келі, математик Джеймс Джозеф Сильвестр. Однак не зважаючи на те, що навіть сам Келі визнавав досягнення своїх колег, в історію теорема увійшла саме під його іменем.

Розглянемо ж, у чому полягає ця теорема, та які способи її доведення існують.

Мета:

- 1) Розглянути формулювання теореми та деякі з її доведень.
- 2) Продемонструвати використання теореми в задачах.



Артур Келі

1.1 Означення

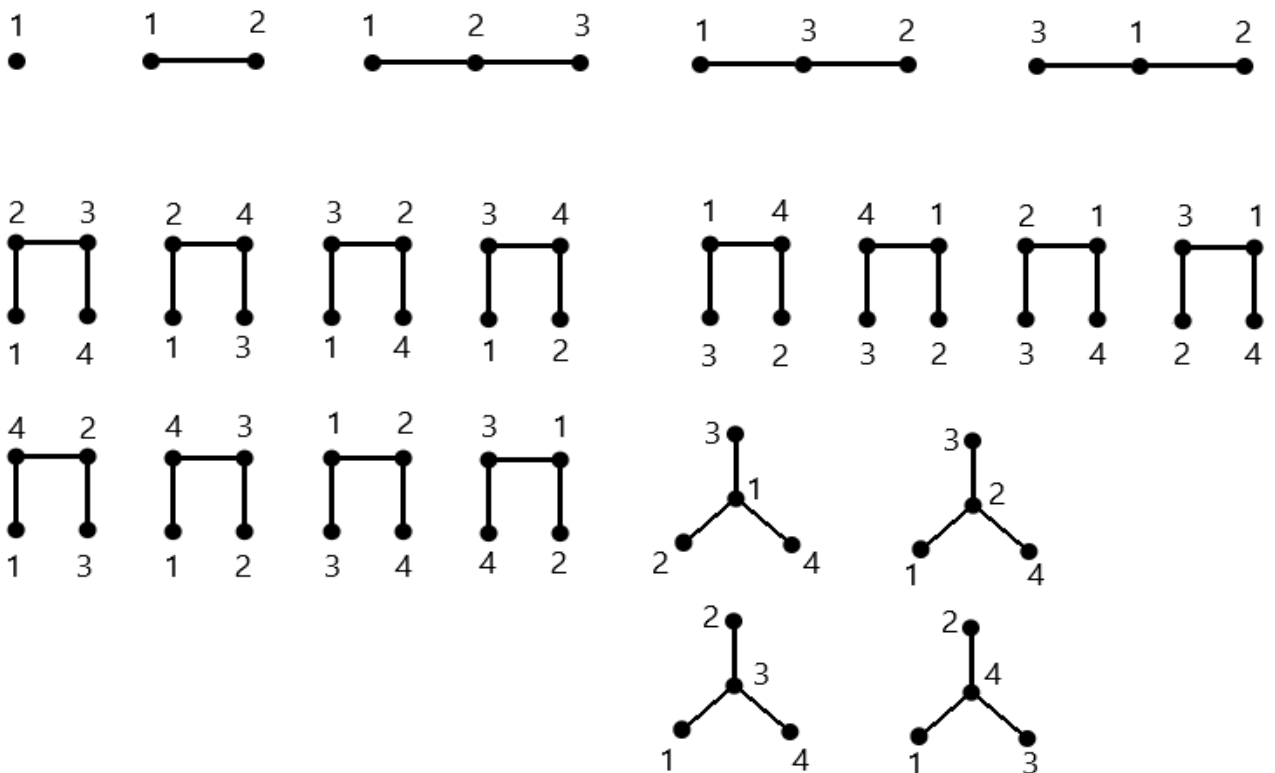
- 1) **Деревом** називається зв'язний граф без циклів.
- 2) **Кістяковим деревом** графа називається такий його суграф, який є деревом
- 3) **Суграф** це підграф, що містить усі вершини графа.
- 4) **Компонента зв'язності графа** – підграф, будь-які дві вершини якого зв'язані між собою шляхами і не зв'язані з іншими вершинами графа.
- 5) **Ліс** – граф, усі компоненти зв'язності якого є деревами, або ж граф без циклів.
- 6) **Міст** – ребро, видалення якого призведе до збільшення компонент зв'язності.
- 7) Будь-яке ребро лісу чи дерева є мостом.
- 8) Якщо T – простий граф з n вершинами без циклів, то наступні умови еквівалентні:
 - а. T – дерево;
 - б. T – містить $n-1$ ребро і не має циклів;
 - с. T – містить $n-1$ ребро і є зв'язним;
 - д. T – зв'язний, і кожне його ребро є мостом;
 - е. T не містить циклів, і додавання будь-якого одного ребра і призводить до появи рівно одного циклу;

2. Теорема Келі для дерев та її доведення

2.1 Формулювання теореми

Нехай маємо множину $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Скільки різних дерев можна побудувати на даній множині вершин?

Перебираючи варіанти, отримаємо 1 дерево для $n = 1$, 1 дерево для $n = 2$, 3 дерева для $n = 3$ та 16 дерев для $n = 4$.



Зауважимо, що хоч деякі з дерев є ізоморфними, ми розглядаємо їх з поміченими вершинами, а тому вважаємо їх різними варіантами дерев.

Можна помітити певну закономірність у відношенні кількості помічених вершин до кількості можливих різних побудованих на них дерев, а саме для n вершин існує n^{n-2} різних дерев. Це справджується і надалі: для $n = 5$ існує 125

дерев, для $n = 6 - 1296$, і так далі. У цьому й полягає формулювання теореми Келі.

Теорема Келі для дерев: Існує n^{n-2} різних помічених дерев з n вершинами.

Як бачимо, сама теорема доволі проста, а її істинність для малих n легко перевіряється. Однак, при зростанні n , дуже швидко кількість таких дерев стає доволі великою, і вручну перевірити їх всі стає майже неможливо. Потрібно мати чітке доведення теореми, аби бути впевненими, що вона працює для будь-яких n .

На щастя, існує немало шляхів її доведення. Розберемо деякі з них.

2.2 Доведення теореми через рекурсію

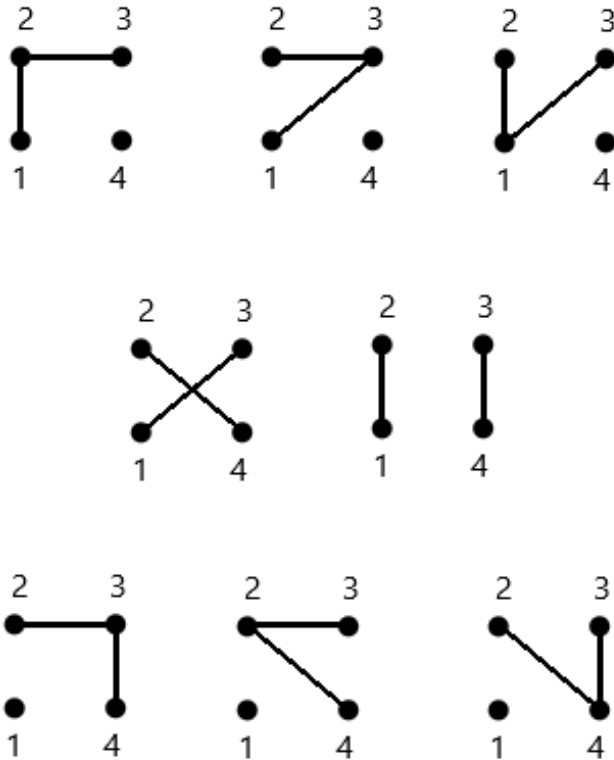
Одним зі способів доведення теореми є побудова рекурентного співвідношення та використання методу математичної індукції. Цей метод є мабуть одним з найпростіших та найбільш зрозумілих шляхів доведення.

Припустимо, у нас є деяка довільна множина A з k вершин. Позначимо як $T_{n,k}$ кількість лісів з помічених дерев на множині вершин $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ таких, що усі вершини, які належать k , належать при цьому різним деревам.

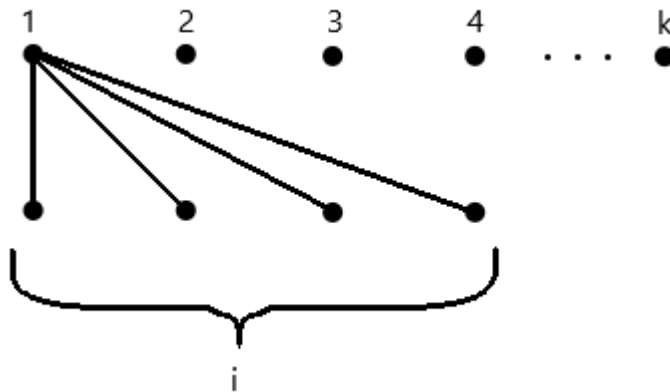
Наприклад, при $n = 4$ і $A = \{1, 4\}$, маємо вісім можливих графів, тобто

$$T_{n,k} = T_{4,2} = 8.$$

Зауважимо, що $T_{n,1} = T_n$



Розглянемо деякий такий ліс F з $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Нехай вершина під номером 1 з'єднана з i -тою кількістю інших вершин.



Видалимо вершину 1. Тоді усі із вершин її сусідів та вершини $2, 3, \dots, k$ належатимуть різним деревам цього лісу, а їх загальна кількість стане $k - 1 + i$ (ми видалили одну вершину та отримали i додаткових компонент зв'язності).

Поклавши, що $T_{n,0} = 0$ при $n > 0$, $T_{0,0} = 1$, тобто $T_{n,n} = 1$ для будь-якого n , та оскільки ми завжди можемо побудувати граф F спочатку обравши

величину i , потім обрати i сусідів вершини 1 та побудувати ліс $F/\{1\}$, то для $1 \leq k \leq n$ маємо:

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,k-1+i}$$

Маємо рівність $T_{n,k} = k \times n^{n-k-1}$, в окремому випадку $T_{n,1} = T_n = n^{n-2}$

З отриманої рівності, за індукцією маємо:

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i}, i \rightarrow n-k-i \\ T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^{i-1} - \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \times i \times (n-1)^{i-1} = \\ &= n^{n-k} - (n-k) \times \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k-1}{i} (n-1)^{i-1} = \\ &= n^{n-k} - (n-k) \times \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{i} (n-1)^i = \\ &= n^{n-k} - (n-k) \times n^{n-1-k} = k \times n^{n-k-1} \end{aligned}$$

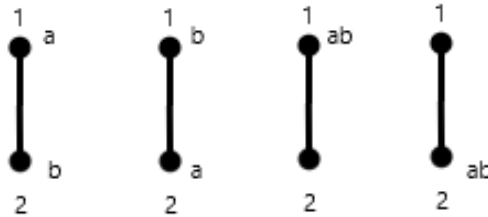
Теорему доведено.

2.3 Доведення теореми через бієкцію

Цей метод є, можна сказати, «класичним» та найбільш популярним шляхом доведення цієї теореми. Суть його полягає в тому, щоб побудувати бієкцію з множини усіх дерев з n вершинами у деяку множини потужності n^{n-2} . Існує не один спосіб це зробити, а тому відомо декілька шляхів доведення теореми, що використовують бієкцію, представлених різними

математиками. Тут ми розберемо доведення запропоноване Андре Джоялем.

Замість того, щоб розглядати самі дерева t на множині вершин $N = \{1, \dots, n\}$, звернемо увагу на дерева, у яких позначимо дві вершини – лівий кінець та правий кінець (позначимо їх як a та b відповідно). Зауважимо, що вони можуть співпадати.



Дерева утворюють T_2

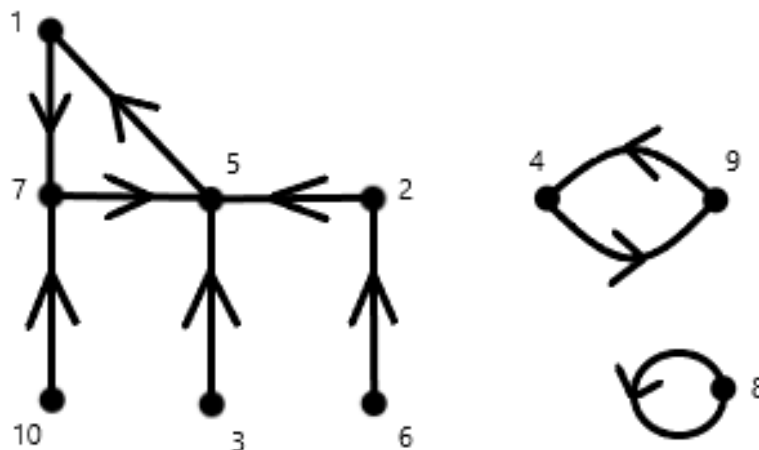
Нехай $T_n = \{t; (a, b)\}$ – нова множина дерев. Оскільки $|T_n| = n^2 T_n$ то нам потрібно довести що потужність $|T_n| = n^n$.

Візьмемо множину N^N відображення усіх натуральних чисел з N в N . Її міра дорівнює саме n^n , з чого слідує, що аби довести теорему нам потрібно знайти бієкцію з N^N в T_n .

Покладемо $f: N \rightarrow N$ – деяке відображення. Представимо f у вигляді орієнтовного графа G з n ребрами, для кожного $i = (1, 2, \dots, n)$ побудуємо ребро, що виходить з i -тої вершини та входить у вершину $f(i)$.

Приклад відображення та побудованого на ньому такого графа G_f :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 5 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$



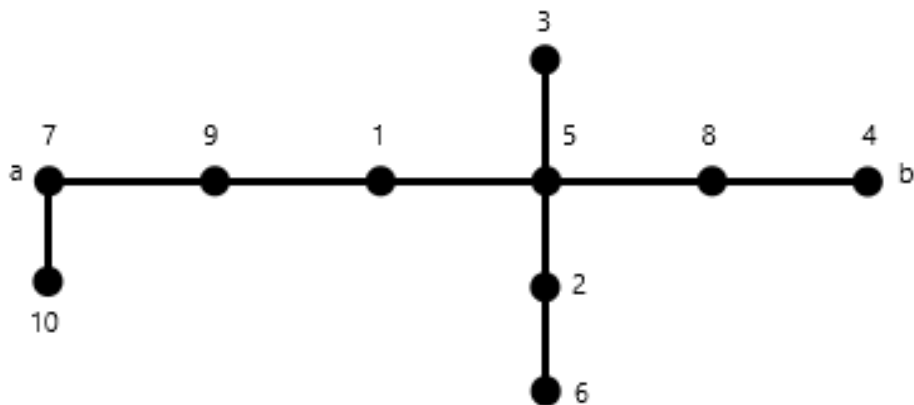
Розглянемо окремо кожну компоненту зв'язності цього графа. Оскільки з кожної вершини виходить рівно одне ребро, то в кожній компоненті маємо однакове число вершин і ребер, а отже – рівно один орієнтований цикл. Нехай $M \subset N$ – об'єднання усіх таких циклів. Тоді ми отримаємо, що M – це єдина максимальна підмножина N така, що правило f на множині M є бієкцією множини M в саму себе.

Покладемо $f|_M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & z \\ f(a) & f(b) & \dots & f(z) \end{pmatrix}$, де числа в першому рядку розташовані за їх зростанням. Другий же рядок дасть нам впорядковані елементи $f(a), f(b), \dots, f(z)$ множини M . Так ми можемо назвати елемент $f(a)$ – лівим кінцем, а $f(z)$ – правим.

Тепер побудуємо дерево t відповідно до правила відображення f – з'єднаємо елементи $f(a), f(b), \dots, f(z)$ в такому порядку, побудувавши ланцюг, а після цього приєднаємо інші вершини до відповідних вершин ланцюга, як вони були з'єднані у графі G_f . Маємо:

$$M = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$f|_M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$



Цю відповідність між деревами та відображеннями також легко розвернути назад. В заданому дереві t знайдемо єдиний шлях з лівого кінця в правий та позначимо його P . Тим самим отримаємо множину M та відображення $f|_M$.

Довизначивши відображення $i \rightarrow f(i)$ відповідно до єдиних шляхів із i в P , тим самим закінчимо доведення.

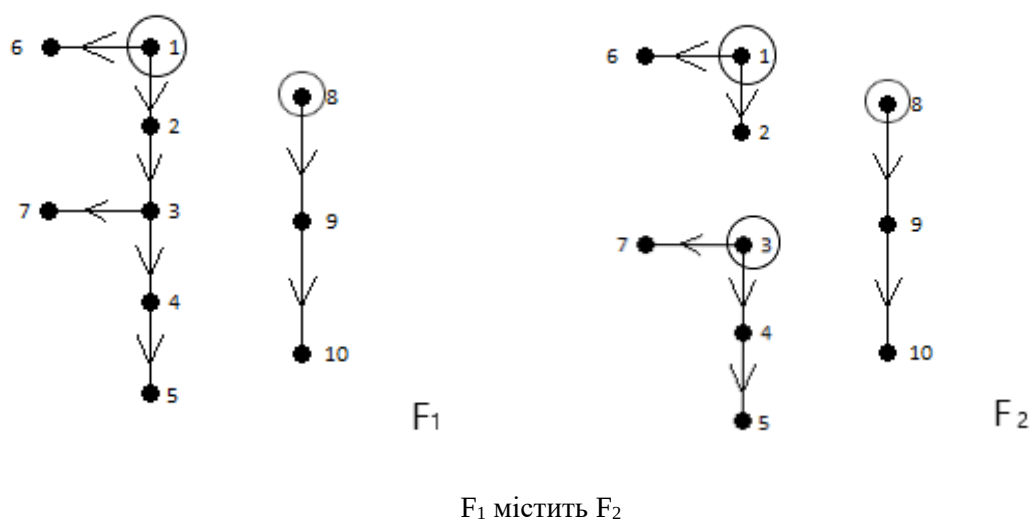
2.4 Доведення методом подвійного рахунку

Даний метод придумав та опублікував у 1999 році Джим Пітмен, як спосіб доведення теореми Келі без використання індукції та бієкції.

Кореневим лісом на множині $\{1, \dots, n\}$ називається ліс разом з коренем кожної компоненти-дерева. Нехай $F_{n,k}$ – множина усіх кореневих лісів з k кореневих дерев. Тобто $F_{n,1}$ – множина усіх кореневих дерев на $\{1, \dots, n\}$. Оскільки в кожному дереві з n поміченими вершинами можна вибрати корінь n способами, то $|F_{n,1}| = nT_n$.

Візьмемо ліс $F_{n,k} \in F_{n,k}$ як орієнтований граф, усі ребра якого орієнтовані від коренів. Покладемо, що ліс F має в собі інший ліс F' , якщо F містить F' як орієнтований підграф. Якщо множина F строго містить F' і множини їх вершин співпадають, то F має менше компонент, ніж F' .

Приклад двох таких лісів, коренями яких є їх верхні вершини.



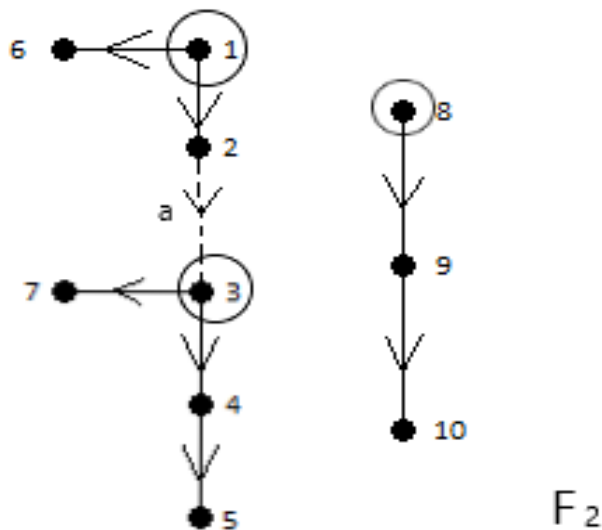
Тепер, назвемо послідовність лісів $F_1, \dots, F_k$, де $F_i \in \mathbf{F}_{n,i}$ та для будь-якого i ліс F_i містить F_{i+1} , зменшуючою послідовністю.

Нехай F_k – фіксований ліс з $\mathbf{F}_{n,k}$. Позначимо $N(F_k)$ – число кореневих дерев, що містять F_k , а $N^*(F_k)$ – кількість зменшуючих послідовностей, що закінчуються лісом F_k .

Порахуємо $N^*(F_k)$ двома способами: починаючи з дерева та починаючи з F_k . Нехай $F_1 \in \mathbf{F}_{n,1}$ містить F_k . Оскільки при побудові зменшуючої послідовності $k-1$ ребра $F_1 \setminus F_k$ можна прибирати у будь-якому порядку, то

$$N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)!$$

А тепер почнемо з іншого боку. Аби перейти від F_k до лісу F_{k-1} , необхідно додати ребро, яке виходило б з довільної вершини a та входило у будь-який з $k-1$ коренів дерев, що вершину a не містять. На рисунку продемонстровано додавання ребра a при переході від F_2 до F_1 .



Отже, існує $p(k-1)$ додати ребро до F_k . За аналогічним міркуванням, у F_{k-1} можна побудувати ребро з будь-якої довільної вершини b до кожного з $k-2$ коренів дерев, що не містять вершину b , тому існує $p(k-2)$ способів додати ребро до F_{k-1} . Продовжуючи логічний ряд, отримаємо рівність:

$$N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)!$$

З двох рівностей маємо що $N(F_k) = n^{k-1}$ для будь-якого $F_k \in \mathbf{F}_{n,k}$.

Якщо $k = n$, то F_n містить усього n ізольованих вершин. Тому $N(F_n)$ перераховує усі кореневі дерева, з чого отримуємо $|F_{n,1}| = n_{n-1}$, а це й є формула Келі. Теорему доведено.

2.5 Код Прюфера

Оскільки теорема Келі працює з поміченими деревами, розглядаючи її також варто згадати про код Прюфера.

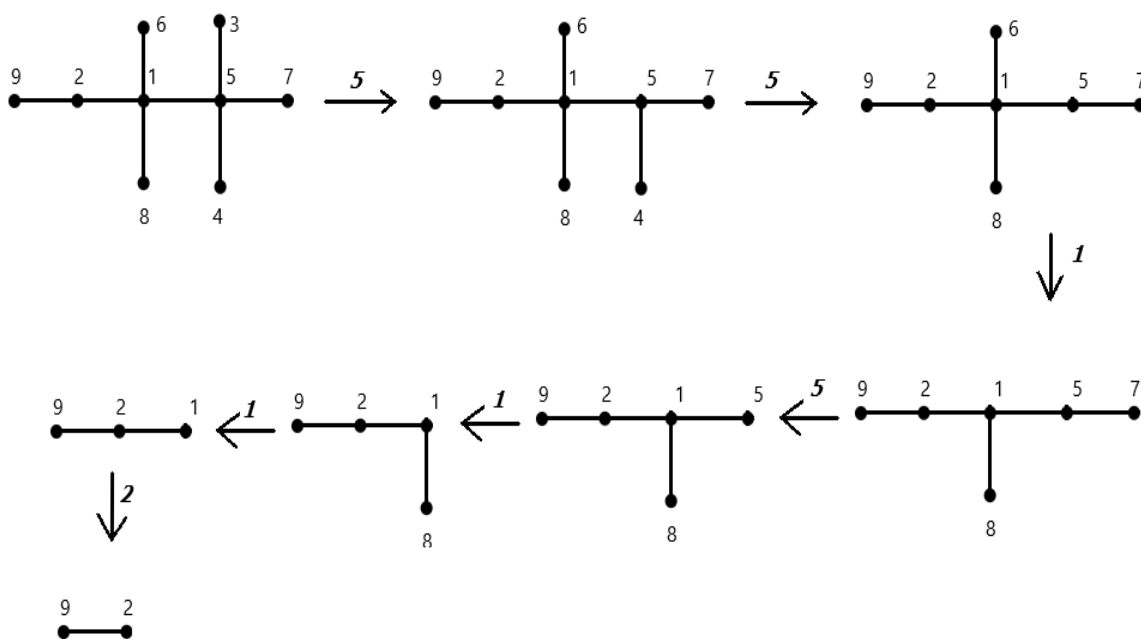
Код Прюфера – це алгоритм, що переводить позначені дерева з n вершинами у послідовність чисел від 1 до n . Сам алгоритм виглядає наступним чином:

- 1) Обрати листок v за найменшим номером;
- 2) До коду Прюфера додати номер вершини, суміжної з v ;
- 3) Вершину v та інцидентне їй ребро видалити з дерева.

Алгоритм повторюється, доки кількість вершин більша двох.

Отримана послідовність чисел і буде називатися кодом Прюфера для заданого дерева.

На рисунку зображено приклад поступового видалення ребер з поміченого дерева та код Прюфера, що йому відповідає.



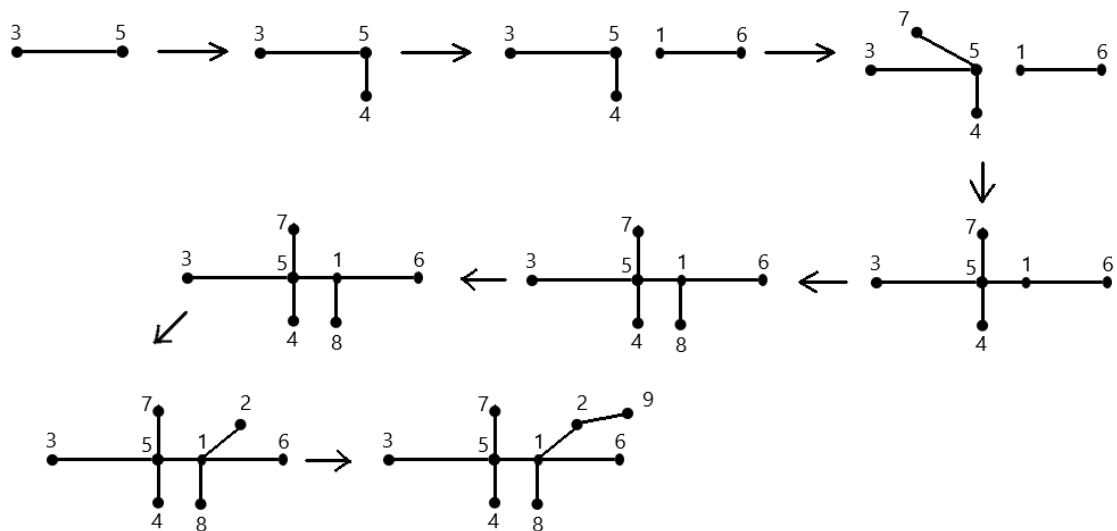
Маємо код Прюфера (5, 5, 1, 5, 1, 1, 2).

Також існує і зворотній алгоритм, що переводить код Прюфера у список ребер графа, що дає можливість за кодом Прюфера відновити початковий граф. По-перше, необхідно встановити кількість вершин графа. Для дерева, що містить n вершин, код Прюфера буде містити $n-2$ елементи. Тобто, якщо код Прюфера записаний k числами, то граф міститиме $k+2$ вершин, пронумерованих від 1 до k . Маємо послідовність коду Прюфера $p=(p_1, \dots, p_{k-2})$ та список номерів вершин $s=(1, \dots, k)$. Обираємо найперший номер i_1 , який не зустрічається у послідовності коду, після чого додаємо до графу ребро (i_1, p_1) та видаляємо i_1 з s та p_1 з p . Повторюємо алгоритм, поки послідовність p не стане порожньою. Після цього додаємо ребро (i_{k-1}, k) , і дерево побудовано.

Наприклад, візьмемо код $p=(5, 5, 1, 5, 1, 1, 2)$. Маємо множину номерів вершин $s=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. За алгоритмом, беремо вершину під номером 3 та з'єднуємо її з вершиною під номером 5. Залишається $p=(5, 1, 5, 1, 1, 2)$ та $s=(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.



Повторюємо далі дії, слідуючи за алгоритмом. Отримаємо наступну картину:



Приклад псевдокоду, що реалізує перетворення коду Прюфера у граф:

Convert-Prüfer-to-Tree(a)

$n \leftarrow \text{length}[a]$

$T \leftarrow$ a graph with $n + 2$ isolated nodes, numbered 1 to $n + 2$

$\text{degree} \leftarrow$ an array of integers

```

for each node i in T
  do degree[i]  $\leftarrow$  1
for each value i in a
  do degree[i]  $\leftarrow$  degree[i] + 1
for each value i in a
  for each node j in T
    if degree[j] = 1
      then Insert edge[i, j] into T
      degree[i]  $\leftarrow$  degree[i] - 1
      degree[j]  $\leftarrow$  degree[j] - 1
      break

```

Наприкінці цього циклу залишиться два вузли з ступенем 1 (називайте їх u , v). Нарешті, додати до дерева край (u,v) . Отримуємо шуканий граф.

3. Розв’язок задач з використанням теорема Келі

Існує ще багато способів доведення цієї теореми, як з використанням вищезгаданих методів, так і зовсім іншими шляхами (наприклад за допомогою лінійної алгебри), однак цих трьох цілком достатньо для демонстрації можливостей довести теорему різними способами. Тим паче, головне в теоремах це не способи їх доведення, а можливість застосування у вирішенні тих чи інших задач.

На перший погляд може здатися, що застосування теореми у вирішенні математичних задач доволі вузьке – можливість знайти кількість дерев, що відповідають конкретній умові. Так, можливо сама по собі теорема не дає якогось великого обсягу інформації про ті ж самі графи та не пропонує формули та алгоритми для розв’язку задач певного типу, однак вона є допоміжним засобом. Одним з безлічі знань, необхідних для вирішення математичних задач.

Надалі представимо декілька різних задач, під час вирішення яких використовується теорема Келі, та продемонструємо розв’язок кожної з них.

3.1 Задачі на теорему Келі

3.1.1 Доведіть, що при $2 \leq k \leq n-1$ виконується рекурентне співвідношення

$$F_{n, k-1} = nF_{n, k}.$$

Розв’язок:

На кореновому дереві задамо напрямок від кореня до інших вершин, і побудуємо відображення $F_{n, k-1} \rightarrow F_{n, k}$. Для цього візьмемо ліс з $k-1$ дерев та знайдемо у ньому вершину k . Візьмемо її та всі ребра й вершини, що з неї виходять, у якості окремого дерева, забравши це все з початкового дерева, якому k належала. Зазвичай вийде дерево $F_{n, k}$, окрім одного випадка, а саме –

якщо забрали гілку з першого дерева та вершина n знаходиться на цій гілці. У такому випадку поміняємо місцями позначки 1 та k .

Поглянемо, скільки прообразів має ліс з $F_{n,k}$ при такому відображенні.

Аби побудувати прообраз лісу, потрібно взяти в ньому k -те дерево та прикріпити в якості гілки до будь-якої з вершин першого дерева, другого, третього, ..., $(k-1)$ -го. Але це за умови, що ми не міняли місцями позначки 1 та k . У протилежному ж випадку необхідно перше дерево причепити до будь-якої вершини k -го у якості гілки та поміняти місцями позначки 1 та k . Таким чином, кожна з n вершин графа що вийшов може бути використана для побудови унікального прообразу. Таким чином маємо, що дійсно

$$F_{n,k-1} = nF_{n,k}.$$

3.1.2 Доведіть, що при $n > 1$ виконується $T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k T_{k+1} T_{n-k-1}$, де

T_i – кількість дерев у лісі, та виведіть з цього теорему Келі.

Розв’язок:

Нехай E_n – кількість помічених вершин на $[n]$, що містять певне ребро. Нехай це буде, наприклад, ребро 1-2. Порахуємо всі ребра усіх дерев та отримаємо рівність: $\frac{n(n-1)}{2} E_n = (n-1) T_n$.

Маємо $\frac{1}{2} n \cdot E_n = T_n$. Щоб знайти E_n потрібно обрати, скільки вершин містить дерево, висяче на вершині 1 і скільки – на вершині 2, та які саме це дерева. Отримаємо шукану формулу:

$$T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k T_{k+1} T_{n-k-1}.$$

Формула Келі з цієї рівності виводиться за допомогою генеруючої функції та теореми інверсії Лагранжа.

Визначимо експоненціальну генеруючу функцію $T(S)$ як

$$T(S) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{S^n}{(n-1)!}. \quad (1)$$

Тоді

$$(T(S))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ T_{k+1} \frac{S^{k+1}}{(k)!} \right\} \left\{ T_{n-k-1} \frac{S^{n-k-1}}{(n-k-2)!} \right\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \binom{n-2}{k} T_{k+1} T_{n-k-1} \frac{S^n}{(n-2)!} \right\}$$

Використовуючи $T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k T_{k+1} T_{n-k-1}$ маємо

$$(T(S))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \frac{(n-1)}{n} T_n \frac{S^n}{(n-1)!} \right\}.$$

Диференціюючи по S

$$2T(S)T'(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(n-1) T_n \frac{S^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

Тому

$$T(S)T'(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n T_n \frac{S^{n-1}}{(n-1)!} \right\} - \frac{1}{S} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n \frac{S^n}{(n-1)!} \right\} = T'(S) - \frac{T(S)}{S}.$$

Маємо

$$\delta[T(S)] = \delta \left[\ln \left[\frac{T(S)}{S} \right] \right]$$

Інтегруємо

$$T(S) = \ln \left[\frac{T(S)}{S} \right] + C$$

Де C – ціла константа.

Підставимо $S = 0$ і помітимо, що з **(1)** маємо $T(0) = 0$ і $\frac{T(S)}{S} \Big|_{S=0} = T_1 = 1$.

Отже маємо $0 = \ln(1) + C \rightarrow C = 0$, і як наслідок

$$T(S) = S \exp^{T(S)}$$

Використаємо теорему інверсії Лагранжа, щоб розширити T(S) до степеневому ряду S та отримаємо

$$T(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} S^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{S^n}{(n-1)!} \quad (2)$$

Порівнявши коефіцієнти при S^n у **(1)** і **(2)** отримаємо $T_n = n^{n-2}$.

Це й є формула Келі.

3.1.3 Доведіть істинність рівності $(n-1)(k-1)T(n, k) = (n-k)T(n, k-1)$, де $T(n, k)$ – множина таких помічених кореневих дерев з n вершинами, що вершина 1 має степінь k , та виведіть з цього теорему Келі.

Розв’язок:

Нехай $A \in T(n, k-1)$ – одне з дерев, v – будь-яка з його $n-k$ вершин, що не є суміжними з вершиною 1. Замінемо ребро, проведене з вершини v до попереднього, на ребро, проведене в корінь. Отримане дерево позначимо B , а пару (A, B) назовемо зв’язкою. При цьому очевидно, що $B \in T(n, k)$.

Порахуємо кількість зв’язок. Кожна зв’язка однозначно визначається деревом A і вершиною v . Дерево можна вибрати $T(n, k-1)$ способами, після цього вершина v обирається $(n-k)$ способами. Маємо кількість зв’язок $(n-k)T(n, k-1)$. Однак це можна порахувати іншим способом. Зв’язку можна отримати, обравши $T(n, k)$ способами дерево B , опісля видаливши одне з ребер, що виходять з кореня. Отриману “відламану гілку” з’єднаємо з будь-якою некореневою вершиною дерева що залишилось. Усього отримаємо

$(n-1-n_1) + (n-1-n_2) + \dots + (n-1-n_k) = (n-1)(k-1)$ варіантів. (n_i – кількість вершин “відламанної гілки”, що з’являється при видаленні i -го ребра, проведеного з кореня). Маємо $(n-1)(k-1)T(n, k)$ варіантів.

Таким чином $(n-1)(k-1)T(n, k) = (n-k)T(n, k-1)$.

Використавши рівність $T(n, k) = C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{n-k-1}$ обрахуємо кількість помічених дерев:

$$\sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-1)(k-1)T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)(k-1)C_{n-2}^{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} T(n, k) = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k (n-1)^{n-2-1}$$

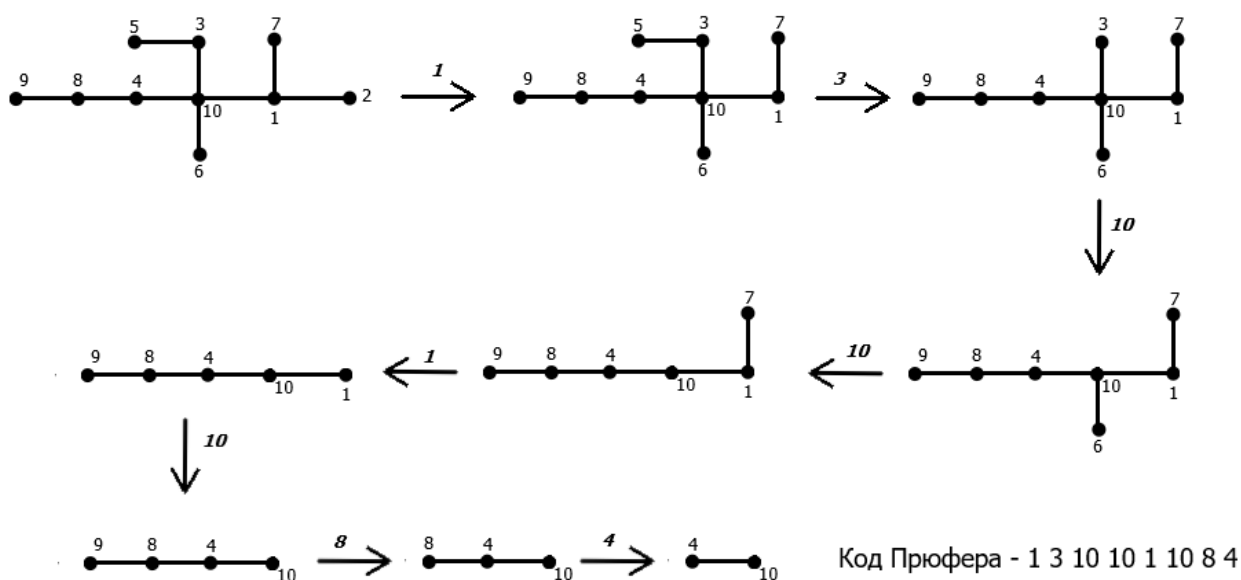
$$T(n, k) = ((n-1) + 1)^{n-2}$$

$T(n, k) = n^{n-2}$ – отримуємо формулу Келі.

3.2 Задачі на код Прюфера

3.2.1 Знайдіть код Прюфера дерева з вершинами 1, 2, ..., 10 та ребрами (8, 9), (8, 4), (4, 10), (10, 3), (3, 5), (10, 6), (10, 1), (1, 7), (1, 2).

Розв'язок: Скористаємося алгоритмом. Побудувавши граф і переконавшись, що у ньому більше двох вершин, знаходимо листок з найменшим номером. Це вершина під номером 2. Суміжною до неї є вершина під номером 1. Отже номер один записуємо до коду, а вершину 2 та ребро (1, 2) видаляємо. Повторюємо ці дії, поки не залишиться дві вершини.



Відповідь: (1, 3, 10, 10, 1, 10, 8, 4).

3.2.2 Скільки існує кореневих помічених дерев з n вершинами, у яких вершина n є листом (тобто не є коренем)?

Розв'язок:

Оскільки n є листом, то вона не міститься у коді Прюфера. Тобто існує $(n-1)^{(n-2)}$ таких кодів. Маємо також $(n-1)$ спосіб обрати кореневу вершину. Отже усього існує $(n-1) \cdot (n-1)^{(n-2)}$ таких дерев.

4. Висновки

У другому розділі курсової були наведені деякі з багатьох існуючих доведень теореми Келі – як найвідоміші, з використанням бієкції, так і новіші та менш поширені, як наприклад методом подвійного рахунку, придуманий Джимом Пітменом у 1999. У третьому ж році були представлені декілька задач, рішення яких пов'язане з теоремою. Через певну свою вузькоспрямованість, теорема Келі не є широко використовуваною у математиці, однак це ніяк не зменшує її ваги. У теорії графів вона є корисним інструментом, що може допомогти при знаходженні рішень певних задач.

Окрім корисності для теорії графів, теорема Келі є цікавою хоча б тому, що будучи легко зрозумілою та простою в формулюванні вона при цьому має надзвичайно велику кількість найрізноманітніших способів доведення з різних областей математики, що знову повертає до думки проте, наскільки сильно на сьогодні різні галузі цієї науки пов'язані між собою.

5. Список літератури

1. Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. М.:Мир, 2006.
2. Joyal A. Une théorie combinatoire des séries formelles. Advances in Math., 1981.
3. Pitman J. Coalescent random forests. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 1999.
4. О. Бурсиан, Д. Кохась, К. Кохась. Вокруг Теоремы Кэли. –
// <https://www.turgor.ru/lktg/2018/3/3-1ru-sol.pdf>
5. Shukla A. A short proof of Cayley's tree formula –
// <https://arxiv.org/pdf/0908.2324.pdf>