УДК 512.54

Б. В. Олійник, В. С. Сікора, В. І. Сущанський

МЕТАСИМЕТРИЧНІ ТА МЕТАЗНАКОЗМІННІ ГРУПИ НЕСКІНЧЕННОГО РАНГУ

B. V. Olijnyk, V. S. Sikora, V. I. Sushchanskiy. *Metasymmetric and metaalternating groups of infinite rank*, Matematychni Studii, **29** (2008) 139–150.

We characterize the structure of infinitely iterated wreath products of finite symmetric and alternating groups. The orders of these groups as profinite groups are calculated. A method of constructing finite generating systems of metaalternating groups is described. We construct explicit examples of such generating systems. The normalizer of a metaalternating group in the corresponding metasymmetric group is characterized. We establish that under a natural condition the metaalternating group is perfect.

Б. В. Олийнык, В. С. Сикора, В. И. Сущанский. *Метасимметрические и метазнакопеременные группы бесконечного ранга* // Математичні Студії. – 2008. – Т.29, №2. – С.139–150.

Исследуется строение бесконечно итерированных сплетений конечных симметрических и знакопеременных групп — метасимметрических и метапеременных групп бесконечного ранга. Найдены их порядки, как проконечных групп. Описан метод построения конечных систем порождающих в метазнакопеременных группах и построены конкретные такие системы. Охарактеризован нормализатор метазнакопеременной группы в соответствующей метасимметрической. Установлено, что при естественных условиях метазнакопеременные группы являются совершенными.

1. Вступ. У статті [1] побудовано так звані “малі” системи твірних у метазнакозмінних групах скінченного рангу — вінцевих добутках скінченних знакозмінних груп. Природним узагальненням цього класу груп є метазнакозмінні групи нескінченного рангу — вінцеві добутки за нескінченними послідовностями скінченних знакозмінних груп. Вони мають властивості універсальності щодо занурень в різних підкласах класу проскінченних груп і тому часто використовуються при побудові різноманітних “екстремальних” прикладів. При цьому буває важливо знати, чи породжується такий вінцевий добуток у топологічному сенсі скінченним числом елементів, чи ні. Так відомо (див. [2]), що нескінченно ітеровані вінцеві добутки скінченних симетричних груп — так звані метасиметричні групи нескінченного рангу — не можуть породжуватися скінченними множинами елементів. З іншого боку, як встановлено в [3], метазнакозмінні групи нескінченного рангу в тому разі, коли їх множники є простими групами, топологічно породжуються двома елементами. Пізніше цей результат було узагальнено ([4], [5]) на нескінченно ітеровані вінцеві добутки довільних неабелевих простих груп, а в статті [6] встановлено, що топологічно 2-породженими є також нескінно ітеровані вінцеві добутки циклічних груп попарно взаємно простих порядків. Якщо проскінченна група є топологічно скінченно породженою, то виникають питання про побудову і дослідження

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20F65, 20E22.

різних її скінченних систем твірних. В алгебраїчному сенсі такі системи породжують скрізь щільні підгрупи в даній групі. Ці підгрупи можуть мати різні властивості та бути по-різному розташованими в самій групі, тобто різним чином впливати на її будову. Результати праць [3]–[5] свідчать, що скінченні системи топологічних твірних в проскінченних групах вказаного типу не є рідкістю, їх є "багато" як у імовірнісному сенсі, так і в сенсі категорії Бера. А тому огляд різних типів таких систем твірних, їх конструктивна характеризація є змістовною задачею, яка може використовуватися при дослідженні будови та вивченні властивостей нескінченно ітерованих вінцевих добутків.

У даній статті ми продовжуємо дослідження метасиметричних та метазнакозмінних груп, розпочаті в [1], [2]. Праця складається зі вступу і п'яти розділів. У другому розділі статті розглядаються проскінченна топологія та відповідна метрика на довільних нескінченно ітерованих вінцевих добутках груп. У третьому розділі обчислюються супернатуральні числа — порядки метасиметричних та метазнакозмінних груп нескінченного степеня в розумінні теорії проскінченних груп. В четвертому розділі досліджуються скінченні системи твірних (у топологічному сенсі) метазнакозмінних груп. В п'ятому розділі охарактеризовано нормалізатори метазнакозмінних груп у відповідних метасиметричних групах. І, нарешті, в шостому розділі встановлено, що метазнакозмінні групи, компоненти метастепеня яких не менші ніж 5, є досконалими, а в разі, коли метастепінь є необмеженною послідовністю, ці групи — універсальні щодо занурень в класі проскінченних груп зліченної ваги.

2. Нескінченно ітеровані вінцеві добутки груп підстановок як проскінченні групи. Нескінченно ітеровані добутки груп підстановок визначаються майже так само, як і скінченно ітеровані. А саме, нехай (G_1, X_1), (G_2, X_2),... — нескінченна послідовність груп підстановок. *Нескінченно ітерованим вінцевим добутком* груп підстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2),... називається група G найможливіших перетворень множини $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, які мають такі дві властивості:

1) для довільного $g \in G$ та довільної послідовності $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ k-а координата y_k образу $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots) = \overline{x^g}$ залежить лише від перших k координат $x_1, x_2, \ldots, x_k$ прообразу $\overline{x}$ (і самого перетворення g);

2) перетворення $x_{k+1} \mapsto y_{k+1}$ множини X_{k+1}, яке однозначно визначається перетворенням g, при фіксованих k перших координатах $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_k^0$ образу
$$\overline{x} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}, \ldots),$$
є підстановкою на X_{k+1}.

Підстановка $g_{k+1} : x_{k+1} \mapsto y_{k+1}$, що визначається умовою 2), очевидно, залежить від вибору елементів $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$, тобто умова 2) визначає певну функцію вигляду
$$g_{k+1} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \to G_{k+1}.$$
Звідси отримуємо, що підстановці $g \in G$ однозначно відповідає нескінченний набір вигляду
$$u = [g_1, g_2(\overline{x}_1), g_3(\overline{x}_2), \ldots], \tag{1}$$
де $g_k(\overline{x}_{k-1}) \in G_k^{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k-1}}$, який, в свою чергу, однозначно визначає підстановку g. Як і у випадку скінченно ітерованих вінцевих добутків, ми називатимемо такі набори *таблицями*. Таблиця (1) діє на довільну послідовність $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ за правилом:
$$\overline{x}^u = (x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}, x_3^{g_3(x_1,x_2)}, \ldots). \tag{2}$$

Тотожній підстановці множини X відповідає таблиця $[e, e, \ldots]$, де символ e вживається як для позначення нейтрального елемента у групах, так і для позначення сталих функцій, тотожно рівних e.

Добутком таблиць з i-ими координатами $g_i(\overline{x}_{i-1}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ та $h_i(\overline{x}_{i-1}) = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$, є таблиця, i-тою координатою якої є функція

$$g_i(\overline{x}_{i-1}) \cdot h_i(x_1^{g_1}, x_2^{g_2(x_1)}, \ldots, x_{i-1}^{g_{i-1}(x_1,\ldots,x_{i-2})}), \tag{3}$$

а *оберненою* до таблиці з координатами $g_i(\overline{x}_{i-1})$ є таблиця, i-та координата якої дорівнює

$$g_i^{-1}\Big(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}\right)}, \ldots, x_{i-1}^{g_{i-1}^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}},\ldots\right)}\Big), \qquad i \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Вінцевий добуток за нескінченною послідовністю груп підстановок $(G_1, X_1), (G_2, X_2), \ldots$ позначатимемо символом $\wr_{i=1}^{\infty}(G_i, X_i)$, або, коротше, $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.
Для довільного натурального n відображення $\varphi_n : \wr_{i=1}^{n+1} G_i \to \wr_{i=1}^{n} G_i$, задане рівністю

$$\varphi_n\left([g_1, g_2(\overline{x}_1), \ldots, g_n(\overline{x}_{n-1}), g_{n+1}(\overline{x}_n)]\right) = [g_1, g_2(\overline{x}_1), \ldots, g_n(\overline{x}_{n-1})], \tag{5}$$

очевидно, є епіморфізмом. Отже, з вінцевим добутком $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ природно пов'язується зворотний спектр груп $\left\langle \ \wr_{i=1}^{n+1} G_i, \ \varphi_n \ \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Лема 1. *Для довільної нескінченної послідовності груп підстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2),... виконується співвідношення*

$$\varprojlim_{n} \left(\mathop{\wr}_{i=1}^{n+1} G_i, \ \varphi_n \right) \simeq \mathop{\wr}_{i=1}^{\infty} G_i. \tag{6}$$

Зокрема, якщо групи G_i є скінченними і діють на скінченних множинах ($i = 1, 2, \ldots$), то вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ є проскінченною групою.

Доведення. Досить пересвідчитися, що правильною є перша частина твердження. Згідно з визначенням (5) епіморфізмів φ_n, кожен елемент групи з лівої частини співвідношення (6) — узгоджена послідовність скінченних таблиць — однозначно визначає деяку нескінченну таблицю, тобто елемент з правої частини співвідношення (6). Ця відповідність і буде ізоморфізмом. □

Для вінцевих добутків за нескінченними послідовностями груп можна сформулювати критерій транзитивності, аналогічний до критерію, сформулюваного в [1] для скінченно ітерованих вінцевих добутків груп підстановок.

Лема 2. *Вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{\infty}(G_i, X_i)$ діє транзитивно на множині $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ тоді й лише тоді, коли кожна з груп підстановок (G_i, X_i), $i \in \mathbb{N}$, транзитивна.*

Нехай для всіх $i \in \mathbb{N}$ групи підстановок (G_i, X_i) є скінченними. Проскінченна топологія на вінцевому добутку $G = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ природно задається базою околів одиниці в G. А саме, для довільного $k \in \mathbb{N}$ множина $\overline{G}^{(k)}$ всеможливих таблиць вигляду $[e, e, \ldots, e, g_{k+1}(\overline{x}_k), g_{k+2}(\overline{x}_{k+1}), \ldots]$ з групи G утворює нормальну підгрупу в цій групі (так звану k-ту базу вінцевого добутку).

З загальної теорії проскінченних груп [7] легко випливає таке твердження.

Лема 3. *Система околів одиниці $\left\{\overline{G}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ в групі G задає на G топологію, яка збігається з проскінченною топологією на цій групі.*

Проскінченна топологія на групі G може бути охарактеризована також, якщо на G ввести структуру метричної групи. Фіксуємо деяке дійсне число η, $0 < \eta < 1$. Для довільних таблиць $u = [g_1, g_2(\overline{x}_1), \ldots]$, $v = [h_1, h_2(\overline{x}_1), \ldots]$, $u \neq v$, символом $k(u,v)$ позначимо таке натуральне число k, що $g_1 = h_1$, $g_2 = h_2$, ..., $g_k = h_k$ але $g_{k+1} \neq h_{k+1}$. Визначимо тепер на групі G функцію $d(u,v)$ від двох змінних, поклавши для довільних $u, v \in G$:

$$d(u,v) = \begin{cases} \eta^{k(u,v)}, & \text{якщо} \quad u \neq v, \\ 0, & \text{якщо} \quad u = v. \end{cases} \tag{7}$$

Лема 4. *Функція $d(x,y)$, визначена рівністю (7), є неархімедовою метрикою на групі G. Топологія, яку визначає на G метрика d, збігається з проскінченною топологією на цій групі.*

Доведення. Умова того, що початки таблиць довжиною k збігаються рівносильна до умови, що $u \cdot v^{-1} \in \overline{G}^{(k)}$. Тепер доведення леми випливає з того, що підгрупи $\overline{G}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, утворюють спадний ряд нормальних дільників з тривіальним перетином. □

Проскінченність групи G означає, що відносно топології, визначеної на ній лемою 3 або лемою 4, ця група є компактною, цілком незв'язною. З означення вінцевого добутку за нескінченною послідовністю груп підстановок і означення метрики d на ньому випливає також таке твердження.

Лема 5. *Метрична група $\left(\wr_{i=1}^{\infty} G_i,\, d \right)$ є повною, а її діаметр дорівнює 1.*

Доведення. 1) Нехай послідовність таблиць u_1, u_2, ... є послідовністю Коші елементів з $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що для довільних $k, l > N$ виконується рівність $d(u_k, u_l) < \varepsilon$. З означення метрики d випливає, що довжини спільних початків таблиць цієї послідовності $u_n, n \geq 1$ збільшуються із зростанням n. А тому ці спільні початки визначають деяку нескінченну таблицю u з $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. Послідовність u і є границею послідовності u_1, u_2, ... Оскільки початкова послідовність вибрана довільно, то група є повною.

2) За означенням метрика d набуває значень з інтервалу $[0,1]$, причому відстань між таблицями, перші координати яких різні, дорівнює одиниці. Тому, $\mathrm{diam}(\wr_{i=1}^{\infty} G_i) = 1$. □

Вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ містить підгрупу *майже тривіальних таблиць*, тобто таблиць, в яких лише скінченна кількість координат є нетривіальними. Цю підгрупу часто розглядають як незалежну конструкцію і називають *фінітарним вінцевим добутком* за послідовністю груп підстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2),... Позначатимемо фінітарний вінцевий добуток груп символом $(F) \wr_{i=1}^{\infty} G_i$.

Лема 6. *Підгрупа $(F) \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ є скрізь щільною в групі $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.*

Доведення. Нехай $u = [g_1, g_2(\overline{x}_1), \ldots]$ — деяка таблиця з $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. Побудуємо за нею послідовність таблиць $u_n = [g_1, g_2(\overline{x}_1), \ldots, g_n(\overline{x}_{n-1}), e, e, \ldots]$, $n \geq 1$. Ця послідовність є збіжною і її границею є таблиця u. Оскільки кожен елемент u_n цієї послідовності належить до $(F) \wr_{i=1}^{\infty} G_i$, то це означає, що підгрупа $(F) \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ є скрізь щільною в в групі $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. □

Отже, кожна нескінченна таблиця є границею послідовності майже тривіальних таблиць. Враховуючи це, можна будувати нескінченні таблиці з потрібними властивостями за послідовностями таблиць із n-ітерованих вінцевих добутків груп (G_1, X_1), (G_2, X_2),...,(G_n, X_n),... при $n \in \mathbb{N}$.

Таблицю, яка складається з перших k координат таблиці $u \in \wr_{i=1}^{n} G_i$ (де $k \leq n$) позначатимемо символом $u^{(k)}$, а таблицю з $(F) \wr_{i=1}^{\infty} G_i$, яка утворюється з таблиці $u \in \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ дописуванням тривіальних координат, — символом $\overline{u}$.

Означення 1. Послідовність таблиць $u_n \in \wr_{i=1}^{n} G_i$, $n = 1, 2, \ldots$, назвемо *узгодженою*, якщо для довільних натуральних k, n, $k < n$, виконується рівність $(u_n)^{(k)} = u_k$.

Безпосередньо з леми 6 отримуємо.

Лема 7. *Нехай $u_n \in \wr_{i=1}^{n} G_i$, $n = 1, 2, \ldots$ — деяка узгоджена послідовність скінченних таблиць. Тоді послідовність $\overline{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$ є збіжною у вінцевому добутку $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.*

Отже, кожна узгоджена послідовність $u_n \in \wr_{i=1}^{n} G_i$, $n = 1, 2, \ldots$, визначає деякий елемент $u \in \wr_{i=1}^{\infty} G_i$, $u = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{u}_n$. Далі писатимемо просто $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, оскільки зі сказаного вище зрозуміло, про що йде мова.

Лема 8. *Нехай $u_{1,n}$, $u_{2,n}$,..., $u_{s,n}$ — такі s узгоджених послідовностей елементів, вибраних з вінцевих добутків $\wr_{i=1}^{n} G_i$, $n \in \mathbb{N}$, що при кожному $n \in \mathbb{N}$ група $\wr_{i=1}^{n} G_i$ породжується елементами $u_{1,n}$, $u_{2,n}$,$\ldots$, $u_{s,n}$. Тоді множина елементів u_1, u_2,$\ldots$, u_s, де $u_i = \lim\limits_{n\to\infty} u_{i,n}$, $1 \leq i \leq s$, є системою топологічних твірних вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$.*

Доведення. Множина елементів u_1, u_2,$\ldots$, u_s має ту властивість, що при довільному n їх обмеження $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$,..., $u_s^{(n)}$ — таблиці довжини n — породжують вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{n} G_i$. Отже, елементи u_1, u_2,..., u_s породжують (в алгебраїчному сенсі) таку підгрупу групи $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$, обмеження таблиць якої на перші n координат збігається з вінцевим добутком $\wr_{i=1}^{n} G_i$. Але замикання такої підгрупи в проскінченній топології вінцевого добутку збігається з $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. Це й означає, що u_1, u_2,..., u_s є системою топологічних твірних $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. □

Лема 9. *Нескінченно ітерований вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ є топологічно скінченно породженою групою тоді й лише тоді, коли існує таке число $k \in \mathbb{N}$, що кожна група з послідовності $\wr_{i=1}^{n} G_i$, $n = 1, 2, \ldots$, є k-породженою.*

Доведення. За умов леми, в групах $\wr_{i=1}^{n} G_i$ можна вибрати узгоджені послідовності систем твірних, які визначатимуть деяку скінченну систему твірних вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$. Якщо ж умови леми не виконуються, то $\wr_{i=1}^{\infty} G_i$ не може містити скінченної системи топологічних твірних, оскільки групи $\wr_{i=1}^{n} G_i$, $n = 1, 2, \ldots$, є гомоморфними образами цієї групи і кількість елементів у системах твірних цих груп є необмеженою. □

3. Порядки метасиметричних та метазнакозмінних груп нескінченного рангу. Символом S_n, $n \in \mathbb{N}$, позначатимемо симетричну групу степеня n, а символом A_n — її знакозмінну підгрупу. Нехай $\widehat{k} = \langle k_1, k_2, \ldots \rangle$ — деяка нескінченна послідовність натуральних чисел, така, що $k_i \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots$.

Означення 2. *Метасиметричною* (відповідно, *метазнакозмінною*) групою нескінченного рангу метастепеня $\widehat{k}$ назвемо вінцевий добуток за нескінченною послідовністю симетричних груп S_{k_1}, S_{k_2},...(відповідно, знакозмінних груп A_{k_1}, A_{k_2},...).

Метасиметричну групу метастепеня $\widehat{k}$ позначатимемо символом $S(\widehat{k})$, а метазнакозмінну групу метастепеня $\widehat{k}$ — символом $A(\widehat{k})$. Отже, за означенням маємо

$$S(\widehat{k}) = \wr_{i=1}^{\infty} S_{k_i}, \qquad A(\widehat{k}) = \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}.$$

Групи $S(\widehat{k})$ та $A(\widehat{k})$ є групами підстановок на множині $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, де $X_i = \{1, 2, \ldots, k_i\}$ $(i \in \{1, 2, \ldots\})$, причому $A(\widehat{k})$ очевидним способом ототожнюється з підгрупою в $S(\widehat{k})$. Зауважимо, що $A(\widehat{k})$ не є нормальним дільником в $S(\widehat{k})$.

Оскільки групи $S(\widehat{k})$ та $A(\widehat{k})$ є проскінченними, то можна говорити про їхні порядки, які є супернатуральними числами. Нагадаємо (див., наприклад, [7]), що *супернатуральним числом* або *числом Стейніца* називається формальний вираз вигляду

$$\prod_{p \in P} p^{k(p)}, \tag{8}$$

де P — множина простих чисел, а $k(p) \in \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Множина S всіх супернатуральних чисел є природним розширенням множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел, оскільки натуральні числа можна ототожнювати з виразами (8), в яких лише скінченна кількість показників степенів $k(p)$ відмінні від нуля, причому жоден з них не дорівнює ∞. На множині S вводиться *відношення подільності*, яке є розширенням відношення подільності на $\mathbb{N}$. А саме, для супернатуральних чисел $a = \prod_{p \in P} p^{k(p)}$ та $b = \prod_{p \in P} p^{l(p)}$ покладемо $a \,|\, b$ тоді й тільки тоді, коли для довільного $p \in P$ виконується нерівність $k(p) \le l(p)$. Частково впорядкована множина $(S, |\,)$ є граткою, оскільки в ній можна визначити поняття найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного для супернатуральних чисел

$$\begin{aligned} &a) \quad \text{НСД}(a, b) = \prod_{p \in P} p^{r(p)}, \quad \text{де} \quad r(p) = \min\{k(p), l(p)\}; \\ &b) \quad \text{НСК}(a, b) = \prod_{p \in P} p^{s(p)}, \quad \text{де} \quad s(p) = \max\{k(p), l(p)\} \end{aligned} \tag{9}$$

(для натурального k і символу ∞ вважають, що $\min\{k, \infty\} = k$, $\max\{k, \infty\} = \infty$).
У гратці супернатуральних чисел існують найбільший і найменший елементи — числа

$$A = \prod_{p \in P} p^{\infty}, \qquad 1 = \prod_{p \in P} p^{0}.$$

Крім того, ця гратка є повною, тобто точна верхня грань і точна нижня грань в ній існують для довільної множини елементів.

Нехай тепер $\widehat{k} = (k_1, k_2, \ldots)$ — деяка послідовність натуральних чисел. Символом $p(\widehat{k})$ позначатимемо множину всіх простих чисел, які не перевищують принаймні одного з чисел k_i $(i \in \{1, 2, \ldots\})$. Множина $p(\widehat{k})$ буде скінченною тоді й лише тоді, коли послідовність $\widehat{k}$ є обмеженою. Якщо ж послідовність $\widehat{k}$ необмежена, то $p(\widehat{k}) = P$.

Нехай $\widehat{k} = \langle k_1, k_2, \ldots \rangle$ — обмежена послідовність, $i(\widehat{k})$ — найбільше з чисел k_i, які зустрічаються в $\widehat{k}$ нескінченно багато разів, $f(\widehat{k})$ — найбільше з чисел, які входять в $\widehat{k}$ лише скінченну кількість разів, $n(\widehat{k})$ — номер останнього входження $f(\widehat{k})$ в послідовність $\widehat{k}$. Для довільного простого числа p, такого, що $p \,|\, f(\widehat{k})$, символом $l_{\widehat{k}}(p)$ позначимо показник степеня, з яким це число входить до розкладу на добуток простих множників порядку вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{n(\widehat{k})} S_{k_i}$. Очевидно, що кожне просте число $p > 2$, $p \,|\, f(\widehat{k})$, входить до розкладу числа $|\wr_{i=1}^{n(\widehat{k})} A_{k_i}|$ з тим же показником $l_{\widehat{k}}(p)$, а для $p = 2$ цей показник дорівнює $l_{\widehat{k}}(2) - 1$.
Порядок проскінченної групи G позначатимемо символом $|G|$.

Теорема 1. *Нехай* $\widehat{k}$ *— довільна нескінченна послідовність над множиною чисел* $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $S(\widehat{k})$ *— метасиметрична група метастепеня* $\widehat{k}$. *Тоді*

1) якщо послідовність $\widehat{k}$ *необмежена, то* $|S(\widehat{k})| = A$;

2) якщо послідовність $\widehat{k}$ *обмежена, причому* $i(\widehat{k}) \geq f(\widehat{k})$, *то*

$$|S(\widehat{k})| = \prod_{p \leq i(\overline{k}), p \in P} p^{\infty}; \tag{10}$$

3) якщо послідовність $\widehat{k}$ *обмежена, причому* $i(\widehat{k}) < f(\widehat{k})$, *то*

$$|S(\widehat{k})| = \Big(\prod_{p \leq i(\overline{k}), p \in P} p^{\infty}\Big) \cdot \Big(\prod_{i(\overline{k}) < p \leq f(\widehat{k}), p \in P,} p^{l_{\widehat{k}}(p)}\Big). \tag{11}$$

Доведення. Порядок проскінченної групи G, яка є границею зростаючого спектру груп

$$G_1 \overset{\varphi_1}{\leftarrow} G_2 \overset{\varphi_2}{\leftarrow} G_3 \overset{\varphi_3}{\leftarrow} \ldots \tag{12}$$

визначається рівністю

$$|G| = |G_1| \cdot \frac{|G_2|}{|G_1|} \cdot \frac{|G_3|}{|G_1|} \cdot \ldots, \tag{13}$$

в якій можна скоротити довільну початкову кількість множників і яка є коректною в області супернатуральних чисел. Метасиметрична група $S(\widehat{k})$ ізоморфна границі оберненого спектру (12), де $G_l = \wr_{i=1}^{l} S_{k_i}$, $(l = 1, 2, \ldots)$, а $\varphi_l : G_{l+1} \to G_l$ — гомоморфізм, що задається викреслюванням останньої координати таблиць із $G_{l+1} = \wr_{i=1}^{l+1} S_{k_i}$. А тому, в нашому випадку, частка $\dfrac{G_{l+1}}{G_l}$ у добутку (13) має вигляд

$$\frac{G_{l+1}}{G_l} = |S_{k_{l+1}}|^{k_1 k_2 \ldots k_l} = (k_{l+1}!)^{k_1 k_2 \ldots k_l}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

і в її розклад на добуток простих множників входять ті й лише ті прості числа p, для яких $p \leq k_{l+1}$, причому показник степеня, з яким входить число p в цей розклад не менший ніж $k_1 k_2 \ldots k_l$. А тому у випадку, коли послідовність $\widehat{k}$ є необмеженою, маємо:

a) серед простих дільників всіх членів послідовності чисел (14) зустрінуться всі прості числа;

b) кожне просте число, починаючи з деякого місця, входитиме до розкладу відповідних членів послідовності зі все більшим та більшим показником.

Звідси дістаємо, що послідовність (14) однозначно визначає супернатуральне число $\prod_{p \in P} p^{\infty} = A$, яке й буде дорівнювати порядку метасиметричної групи $S(\widehat{k})$.

2) Нехай тепер послідовність $\widehat{k}$ є обмеженою, причому $i(\widehat{k}) \geq f(\widehat{k})$. Тоді існує лише скінченна кількість простих дільників p членів послідовності (14), причому всі вони будуть задовольняти умову $p \leq i(\widehat{k})$. Оскільки нескінченно багато членів послідовності $\widehat{k}$ дорівнюють $i(\widehat{k})$, то кожен з простих дільників p входить в розклад відповідних членів послідовності (14) зі все більшими показниками, тобто має місце рівність (10).

3) Якщо послідовність $\widehat{k}$ обмежена, але $i(\widehat{k}) < f(\widehat{k})$, то ті прості дільники p членів послідовності (14), які задовольняють нерівність $p \leq i(\widehat{k})$, входитимуть в розклад $|S(\widehat{k})|$

з показниками степеня ∞, як це випливає зі сказаного вище, а ті, що задовольняють нерівність $i(\widehat{k}) < p \leq f(\widehat{k})$, входитимуть в розклад $S(\widehat{k})$ з натуральними показниками. Щоб визначити такий показник, потрібно знайти найбільший номер s, такий, що при $t > s$ в розкладі порядку $|\wr_{i=1}^{t} S_{k_i}|$ скінченної метасиметричної групи показник при простому числі p не збільшується. За означенням, таким числом є саме $l_{\widehat{k}}(p)$. Звідси й дістаємо, що в розглянутому випадку виконуэться рівність (11). Теорему доведено. □

Теорема 2. *Нехай $\widehat{k}$ — довільна нескінченна послідовність над множиною чисел $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, $A(\widehat{k})$ — метазнакозмінна група метастепеня $\widehat{k}$. Тоді:*
1) Якщо послідовність $\widehat{k}$ має вигляд $\widehat{k} = \langle k_1, k_2, \ldots, k_s, 3, 3, \ldots\rangle$, то порядок $A(\widehat{k})$ визначається рівністю

$$|A(\widehat{k})| = m \cdot 3^{\infty}, \tag{15}$$

де m є часткою від ділення порядку метазнакозмінної групи $A(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ на найвищий степінь числа 3, який ділить цей порядок;
2) для всіх інших послідовностей $\widehat{k}$, визначених в умові теореми, справджується рівність

$$|A(\widehat{k})| = |S(\widehat{k})|; \tag{16}$$

3) індекс метазнакозмінної групи в метасиметричній групі визначається рівністю

$$[S(\widehat{k}) : A(\widehat{k})] = 2^{\infty}. \tag{17}$$

Доведення. 1) Порядок скінченного фактора $A(k_1, k_2, \ldots, k_s, 3, 3, \ldots, 3)$, де число 3 повторюється l раз, груп $A(\widehat{k})$ дорівнює $m \cdot 3^{r(l)}$, де $r(l)$ — певна поліноміальна функція, яка монотонно зростає з ростом l, причому $(m, 3) = 1$. Звідси, за означенням порядку проскінченної групи отримуємо (15).

2) Для послідовностей $\widehat{k}$, які не закінчуються підпослідовністю $< 3, 3, \ldots >$ міркування про показники простих множників у розкладі супернатурального числа $|A(\widehat{k})|$ в кожному з розглянутих у теоремі 1 випадків, для групи $A(\widehat{k})$ проходять точно так само, як і для групи $S(\widehat{k})$. Звідси отримуємо рівність (16).

3) Індекс $[S(\widehat{k}) : A(\widehat{k})]$ визначається за послідовністю індексів $\Big[\wr_{i=1}^{n} S_{k_i} : \wr_{i=1}^{n} A_{k_i}\Big]$. Для довільного числа n такий індекс є показником двійки, причому зі зростанням n цей показник зростає (див. [1]). Звідси й дістаємо (17). Теорему доведено. □

4. Скінченні топологічні системи твірних метазнакозмінних груп нескінченного рангу. Як вже підкреслювалося у вступі, для довільної нескінченної послідовності $\widehat{k}$ над множиною $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ метасиметрична група $S(\widehat{k})$ є нескінченно породженою в топологічному сенсі [2]. З іншого боку, якщо $\widehat{k}$ є послідовністю над множиною $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$, то $A(\widehat{k})$ є топологічно 2-породженою [3]. Наведені в розділі 1 леми 7–9 дають змогу будувати скінченні системи в нескінченно ітерованих вінцевих добутках груп за допомогою граничного переходу, формалізованого у вигляді поняття узгодженості таблиць. Скористаємося цими твердженнями і результатами статті [2] для побудови скінченних систем твірних в $A(\widehat{k})$. При цьому, як і в [1], на послідовності $\widehat{k}$ накладається технічна умова $\eta(\widehat{k}) \geq 7$, де $\eta(\widehat{k})$ — найменший член послідовності $\widehat{k}$.

Нехай знакозмінна група A_{k_i} діє на множині $\{1, 2, \ldots, k_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Якщо k_i — непарне число, то вона породжується парою підстановок $a_i = (1, 2, \ldots, k_i)$, $b_i = (1, 2, 3)$, а якщо k_i — парне число, то твірними будуть $a_i = (1, 2, \ldots, k_i - 1)$, $b_i = (2, 3, \ldots, k_i)$ [8]. Визначимо тепер такі три елементи метазнакозмінної групи $A(\widehat{k})$:

$$u_2 = [e, a_2(x_1), e, \ldots], \quad v_1 = [b_1, e, e, \ldots], \quad v_2 = [e, b_2(x_1), e, \ldots],$$

де $a_2(x_1) = \begin{cases} a_2, & \text{якщо } x_1 = 1, \\ e, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$ $\quad b_2(x_1) = \begin{cases} b_2, & \text{якщо } x_1 = 1, \\ e, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Крім того, окремо побудуємо таблицю u_1, поклавши $u_1 = [c_1, e, c_2(\overline{x}_2), \ldots]$, де $c_1 = a_1$, а при $i \geq 3$ функцію c_i визначено рівністю $c_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } \overline{x}_i = (5, 4, 4, \ldots, 4, 1), \\ b_i, & \text{якщо } \overline{x}_i = (5, 4, 4, \ldots, 4, 2), \\ e, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Теорема 3. *Для довільної послідовності $\widehat{k}$, такої що $\eta(\widehat{k}) \geq 7$, метазнакозмінна група $A(\widehat{k})$ породжується в топологічному сенсі таблицями u_1, u_2, v_1, v_2.*

Доведення. Для довільного $l \in \mathbb{N}$ визначимо обмеження таблиць u_1, u_2, v_1, v_2 на перші l координат, тобто побудуємо таблиці $u_1^{(l)} = [c_1, e, c_3(\overline{x}_2), \ldots, c_l(\overline{x}_{l-1})]$, $u_2^{(l)} = [e, a_2(\overline{x}_1), e, \ldots, e]$, $v_1^{(l)} = [b_1, e, \ldots, e]$, $v_2^{(l)} = [e, b_2(\overline{x}_1), e, \ldots, e]$. Кожна з так побудованих чотирьох послідовностей $u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $v_1^{(l)}$, $v_2^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, є узгодженою в сенсі означення 1, причому в наведених вище спрощених позначеннях виконуються рівності $u_i = \lim\limits_{l \to \infty} u_i^{(l)}$, $\quad v_i = \lim\limits_{l \to \infty} v_i^{(l)}$.

За доведеним в [1], при довільному $l \in \mathbb{N}$ множина елементів $\{u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, v_1^{(l)}, v_2^{(l)}\}$ є системою твірних вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{l} A_{k_i}$. Звідси, за лемою 8, дістаємо, що множина $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ є системою твірних вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$, тобто метазнакозмінної групи $A(\widehat{k})$. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 1. Визначена в теоремі 3 система твірних є незвідною, тобто жодна її власна підсистема не буде топологічною системою твірних $A(\widehat{k})$.

Цілком подібно до доведення теореми 3, враховуючи ще один результат з [1], можна довести наступне твердження.

Теорема 4. *Для довільної послідовності $\widehat{k}$ такої, що $\eta(\widehat{k}) \geq 7$, і довільного натурального числа m метазнакозмінна група $A(\widehat{k})$ містить незвідні m-елементні топологічні системи твірних.*

Зазначимо, що на відміну від результатів з [3]–[5], де використовуються ймовірнісні міркування для встановлення факту існування систем топологічних твірних у вінцевих добутках вигляду $\wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$, ми наводимо явну конструкцію твірних, причому досить спеціальну — лише один елемент цієї системи є "істотно нескінченним тобто має нескінченно багато нетривіальних координат. Легко переконатися, що ті три елементи системи твірних, які нетривіально діють лише на перших двох координатах, можна вибирати багатьма різними способами. Крім того, для довільного елемента $w \in A(\widehat{k})$ трансформи $u_1^{(w)}$, $u_2^{(w)}$, $v_1^{(w)}$, $v_2^{(w)}$ твірних u_1, u_2, v_1, v_2 за допомогою елемента w знову утворюють систему твірних $A(\widehat{k})$. В такий спосіб отримуємо цілу множину 4-елементних систем, яка може бути використана для ймовірнісних оцінок можливостей вибору таких систем.

5. Нормалізатор метазнакозмінної групи в метасиметричній.

Нехай $\widehat{k} = \langle k_1, k_2, \ldots \rangle$ — довільна нескінченна послідовність над множиною $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$, $X_i = \{1, 2, \ldots, k_i\}$. Будемо вважати, що симетрична і знакозмінна групи S_{k_i} та A_{k_i} діють на множині X_i, $i = 1, 2, \ldots$. Тоді метасиметрична група $S(\widehat{k})$ та метазнакозмінна група $A(\widehat{k})$ діють транзитивно але імпримітивно на декартовому добутку $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. l-ту координату таблиці $u \in S(\widehat{k})$ позначатимемо символом $[u]_l$, а початковий відрізок довжини l цієї таблиці, тобто таблицю, що складається з перших l координат таблиці u — символом u_l.

Лема 10. *Для довільних таблиць $u, v \in S(\widehat{k})$ з координатами $g_l(\overline{x}_{l-1})$ та $h_l(\overline{x}_{l-1})$, $l = 1, 2, \ldots$, відповідно, виконуються рівності:*

a) $[u^{-1}]_l = g_l^{-1}\left(\overline{x}_{l-1}^{u_{l-1}^{-1}}\right)$; *b)* $[vuv^{-1}]_l = h_l(\overline{x}_{l-1}) g_l\left(\overline{x}_{l-1}^{v_{l-1}}\right) h_l^{-1}\left(\overline{x}_{l-1}^{v_{l-1}u_{l-1}v_{l-1}^{-1}}\right)$.

Доведення випливає з рівностей (3), (4).

Символом $\left[S(\widehat{k})\right]_l$ (відповідно, $\left[A(\widehat{k})\right]_l$) позначимо групу l-тих координат таблиць з $S(\widehat{k})$ (відповідно, з $A(\widehat{k})$), а символом $\left(S(\widehat{k})\right)_l$ (відповідно, $\left(A(\widehat{k})\right)_l$) — її образ при природному зануренні в $S(\widehat{k})$ (відповідно, в $A(\widehat{k})$). Підгрупи $\left(S(\widehat{k})\right)_l$, $l = 1, 2, \ldots$, групи $S(\widehat{k})$ породжують групу $(F) \wr_{i=1}^{\infty} S_{k_i}$, а підгрупи $\left(A(\widehat{k})\right)_l$, $l = 1, 2, \ldots$, — групу $(F) \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$, тобто скрізь щільну в проскінченній топології підгрупу метасиметричної групи $S(\widehat{k})$ чи метазнакозмінної групи $A(\widehat{k})$.

Означення 3. Функцію $g(\overline{x}_l) \in \left[S(\widehat{k})\right]_{l+1}$ називаємо *слабко альтернативною справа* (*зліва*), якщо існує підстановка $\sigma \in S_{k_{l+1}}$ та функція $h(x_l) \in \left[A(\widehat{k})\right]_{l+1}$ такі, що для довільного $\overline{x}_l^{(0)} \in X^{(l)}$ виконується рівність

$$g(\overline{x}_l^{(0)}) = h(\overline{x}_l^{(0)}) \cdot \sigma \qquad \left(g(\overline{x}_l^{(0)}) = \sigma \cdot h(\overline{x}_l^{(0)})\right).$$

Оскільки для довільної підстановки $\sigma \in \left[S(\widehat{k})\right]_{l+1}$ функція $\sigma^{-1} \cdot h(\overline{x}_l) \cdot \sigma$ міститься в $\left[A(\widehat{k})\right]_{l+1}$, то кожна слабко альтернативна справа функція є одночасно слабко альтернативною зліва і навпаки. А тому далі можна говорити просто про слабко альтернативні функції. Нехай H_{l+1} — підмножина всіх слабко альтернативних функцій з $\left[S(\widehat{k})\right]_{l+1}$.

Лема 11. *Множина всіх слабко альтернативних функції H_{l+1} є підгрупою в групі $\left[S(\widehat{k})\right]_{l+1}$, причому*

$$\left[\left[S(\widehat{k})\right]_{l+1} : H_{l+1}\right] = 2. \tag{18}$$

Доведення. Добуток слабко альтернативних функцій є знову слабко альтернативною. Оскільки $|H_{l+1}| < \infty$, то звідси дістаємо, що H_{l+1} — підгрупа. Рівність (18) випливає з того, що $\left[S_{k_{l+1}} : A_{k_{l+1}}\right] = 2$. □

Символом $N(\widehat{k})$ позначимо нормалізатор підгрупи $A(\widehat{k})$ в групі $S(\widehat{k})$.

Теорема 5. *Для довільної послідовності $\widehat{k}$ над множиною $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ нормалізатор $N(\widehat{k})$ підгрупи $A(\widehat{k})$ в $S(\widehat{k})$ складається з найможливіших таблиць вигляду $[g_1, g_2(\overline{x}_1), g_3(\overline{x}_2), \ldots]$ таких, що $g_1 \in A_{k_1}$ та $g_l(\overline{x}_{l-1}) \in H_l$ при $l > 1$. При цьому має місце рівність*

$$\left[N(\widehat{k}) : A(\widehat{k})\right] = 2^{\infty}. \tag{19}$$

Доведення. Зрозуміло, що нормалізатор $N(\widehat{k})$ є розщіплюваною підгрупою в $S(\widehat{k})$ у тому сенсі, що разом з кожною таблицею $[g_1, g_2(\overline{x}_1), g_3(\overline{x}_2), \ldots]$ він містить також всі її координатні таблиці, тобто таблиці вигляду $[e, \ldots e, g_i(\overline{x}_{i-1}), e, \ldots]$ $(i \in \{1, 2, \ldots\})$. А кожна розщіплювальна підгрупа в $S(\widehat{k})$ однозначно визначається нескінченною послідовністю своїх координатних підгруп — підгруп функцій з $\left[S(\widehat{k})\right]_l$, $l = 1, 2, \ldots$, для яких відповідні координатні таблиці містяться в цій підгрупі.

Отже, досить довести, що нормалізатор $N(\widehat{k})$ визначається послідовністю координатних підгруп $M_1 = A_{k_1}$, M_2, M_3,. . . .

Пересвідчимось, що кожна таблиця, яка належить до підгрупи M, визначеної послідовністю M_1, M_2, M_3,. . . , міститься в нормалізаторі $N(\widehat{k})$. Нехай u — таблиця з координатами $g_l(\overline{x}_{l-1})$, $l \geq 1$, з цієї підгрупи, а $v = [h_1, h_2(\overline{x}_1), h_3(\overline{x}_2), \ldots] \in A(\widehat{k})$, тоді l-та координата таблиці uvu^{-1} має вигляд $F_l = g_l(\overline{x}_{l-1}) \cdot h(\overline{x}^u_{l-1}) \cdot g_l^{-1}\left(\overline{x}^{uvu^{-1}}_{l-1}\right)$.
За означенням підгрупи M, функція $g_l(\overline{x}_{l-1})$ має вигляд $g_l(\overline{x}_{l-1}) = \sigma g_l'(\overline{x}_{l-1})$. Звідси дістаємо
$F_l = \sigma \cdot g_l'(\overline{x}_{l-1}) \cdot h(\overline{x}^u_{l-1}) \cdot \left(\sigma \cdot g_l'\left(\overline{x}^{uvu^{-1}}_{l-1}\right)\right)^{-1} = \sigma \cdot \left(g_l'(\overline{x}_{l-1}) \cdot h(\overline{x}^u_{l-1}) \cdot \left(g_l'\left(\overline{x}^{uvu^{-1}}_{l-1}\right)\right)^{-1}\right) \cdot \sigma^{-1}$.
Добуток $g_l'(\overline{x}_{l-1}) \cdot h(\overline{x}^u_{l-1}) \cdot \left(g_l'\left(\overline{x}^{uvu^{-1}}_{l-1}\right)\right)^{-1}$ міститься в $[A(\widehat{k})]_l$. А тому й $F_l \in [A(\widehat{k})]_l$. Оскільки при довільному l координата $[uvu^{-1}]_l$ таблиці uvu^{-1} міститься в $[A(\widehat{k})]_l$, то $uvu^{-1} \in M$, що й вимагалося. Отже, виконується включення $M \subseteq N(\widehat{k})$. Перевірка включення в інший бік здійснюється подібно, тому ми її не наводимо. Теорему доведено. □

6. Досконалість та універсальність метазнакозмінних груп. Нагадаємо, що група G називається *досконалою*, якщо вона збігається зі своїм комутантом (тобто $G = G'$), а її центр тривіальний.

Теорема 6. *Для довільної нескінченної послідовності натуральних чисел $\widehat{k}$ такої, що $\eta(\widehat{k}) \geq 5$, метазнакозмінна група $A(\widehat{k})$ є досконалою.*

Доведення. Вінцевий добуток довільної нескінченної послідовності нетривіальних груп $G_1, G_2, \ldots$ має тривіальний центр. А тому досить переконатися, що при виконанні умов теореми справджується рівність $A(\widehat{k}) = A'(\widehat{k})$. Оскільки група $A(\widehat{k})$ є скінченно породженою як проскінченна група, то її комутант є замкненою підгрупою, а, отже, збігається із замиканням комутанта підгрупи $(F) \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$ — фінітарної частини вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$. Комутант $(F) \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$ є розщіплюваною підгрупою, а тому визначається послідовністю своїх координатних груп $G_1 = A_{k_1}$, G_2, G_3,... Кожна з груп G_i $(i \geq 2)$ є підгрупою прямого степеня $(A_{k_i})^{m_i}$ для відповідного значення натурального числа m_i. Оскільки групи G_i визначають комутант групи $(F) \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$, то для довільного i підгрупа $G_i \leq (A_{k_i})^{m_i}$ містить комутант прямого степеня $(A_{k_i})^{m_i}$. Враховуючи, що $\eta(\widehat{k}) \geq 5$, кожна з груп A_{k_i} є простою, а тому комутант $(A_{k_i})^{m_i}$ збігається з $(A_{k_i})^{m_i}$. Звідси дістаємо, що $G_i = (A_{k_i})^{m_i}$, тобто комутант групи $(F) \wr_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$ визначається послідовністю координатних підгруп $[A(\widehat{k})]_1$, $[A(\widehat{k})]_2$, $[A(\widehat{k})]_3$, а отже збігається з усією групою. Теорему доведено. □

Теорема 7. *Якщо послідовність $\widehat{k}$ необмежена, то метазнакозмінна група $A(\widehat{k})$ є універсальною щодо занурення в класі всіх проскінченних груп зліченної ваги. Іншими словами, кожна проскінченна група зі зліченною базою околів одиниці ізоморфно занурюється в $A(\widehat{k})$. При цьому образ цієї групи є замкненою підгрупою в $A(\widehat{k})$.*

Доведення. Як доведено в [9] (див. також [7], стор. 56), декартів добуток знакозмінних груп $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ є універсальним щодо занурень в класі проскінченних груп зліченної ваги. Для довільного $l \geq 1$ координатна група $[A(\widehat{k})]_l$ містить знакозмінну групу A_{k_l} як підгрупу сталих функцій. Всі такі підгрупи породжують в $A(\widehat{k})$ групу, яка ізоморфна до декартового добутку $\prod_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$. Оскільки послідовність $\widehat{k}$ необмежена, то з неї можна вибрати строго зростаючу підпослідовність k_{r_1}, k_{r_2},.... Декартів добуток $\prod_{i=1}^{\infty} A_{k_{r_i}}$ містить підгрупу, яка ізоморфна з $\prod_{n=3}^{\infty} A_n$ та міститься в $\prod_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$. Звідси й отримуємо потрібне занурення. Замкненість образу даної проскінченної групи при такому зануренні випливає з того, що, як встановлено в [9], замкненим є образ цієї групи при її зануренні в $\prod_{n=3}^{\infty} A_n$. Теорему доведено. □

Зауваження 2. Якщо послідовність $\widehat{k}$ є обмеженою, то група $A(\widehat{k})$ очевидно не універсальна щодо занурень для класу проскінченних груп скінченної ваги. Це означає, що умова необмеженості послідовності $\widehat{k}$ є необхідною та достатньою для універсальності $A(\widehat{k})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І. *Системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу*// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика.— Чернівці: Рута, 2006.— Вип. 314-315.— С.64–72.
2. Сикора В.С., Сущанский В.И. *Системы порождающих групп автоматных подстановок*// Кибернетика и системный анализ.— 2000.— №3.— С.121–133.
3. Bhattacharjee M. *The probability of generating certain profinite groups by two elements*// Israel Journal of Mathematics.— 1994.— V.86.— P.311–329.
4. Quick M. *Probabilistic generation of wreath products of non-abelian simple groups*// Comm. Algebra.— 2004.— V.32.— P.4753–4768.
5. Quick M. *Probabilistic generation of wreath products of non-abelian simple groups.* II// Internat. J. of Algebra and Comput.— 2006.— V.16.— №3.— P.493–503.
6. Woryna A. *On generation of wreath products of cyclic groups by two-state time-varying Mealy automata*// Internat. J. of Algebra and Comput.— 2006.— V.16.— №2.— P.397–415.
7. Wilson J. Profinite groups.— Oxford: Clarendon Press, 1998.— 284 p.
8. Conder M. *More on generators for alternating and symmetric groups*// Quarterly. J. of Mathematics.— 1981.— V.32.— P.137–163.
9. Lubotsky A., Wilson J.S. *An embedding theorem for profinite groups*// Arch. Math. (Basel).— 1984.— V.53.— P.397–399.

Києво-Могилянська Академія, Київ,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,Чернівці,
Сілезький політехнічний університет, Глівіце, Польща

Надійшло 27.11.2007