

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ДРОБОВА МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ ГРАФІВ»**

Виконав: студент 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Чирков Максим Володимирович

Керівник: Олійник Б. В.,
Завідувачка кафедри, професор,
доктор фіз.-мат. наук

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
«____» _____ 20____ р.

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., д.ф-м.н., Б. В. Олійник

_____ (підпис)

„_____” _____ 2022

р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу

студенту 4-го курсу, факультету інформатики

Чиркову Максиму Володимировичу

Зробити огляд відомих результатів, знайти дробову метричну розмірність для певного типу графів

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

Зміст

Анотація

Вступ

1 Огляд теоретичної частини

2 Постановка задачі

3 Виконання практичної частини

4 Результати практичної частини

Висновки

Список літератури

Дата видачі „_____” _____ 2022 р. Керівник

_____ (підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Додаток Г
(обов'язковий)
Зразок календарного плану виконання курсової роботи

Тема:

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на дипломну роботу.	02.11.2021	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи.	15.11.2021	
7.	Написання пояснювальної роботи.	20.04.2022	
8.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	22.04.2022	
8.	Аналіз отриманих результатів з керівником, написання доповіді та попередній захист кваліфікаційної роботи.	15.06.2022	
10.	Корегування роботи за результатами попереднього захисту.	18.06.2022	
11.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	29.06.2022	
12.	Захист кваліфікаційної роботи	05.07.2022	

Студент _____

Керівник _____

“ _____ ” _____

Зміст

1 Анотація

2 Вступ

2.1	Актуальність	6
2.2	Об'єкт дослідження	6
2.3	Предмет дослідження	6
2.4	Мета, завдання дослідження	7
2.5	Методи дослідження	7
2.6	Опис роботи	7

3 Дробова метрична розмірність графів

3.1	Загальні відомості про дробову метричну розмірність	8
3.2	Вершинно-транзитивні графи	9
3.3	Графи з $\dim_f(G) = \frac{ V(G) }{2}$	11
3.4	Дробова метрична розмірність деяких стандартних графів	12
3.5	Графи, для яких $\dim_f(G) = \dim(G)$	13
3.6	Дробова метрична розмірність дерева	14
3.7	Дробова метрична розмірність уніциклічного графа	15

4 Ілюстрація та знаходження дробової метричної розмірності 17

5 Висновки 21

6 Список літератури 22

Анотація

В роботі розглядається дробова метрична розмірність графів. Зроблено огляд відомих результатів щодо знаходження дробової розмірності графів, оцінки дробової розмірності графів для вершинно-транзитивних графів, графів прямого добутку, графів Хемінга, Томпсона тощо. В результаті роботи запропонована ілюстрація знаходження дробової метричної розмірності для конкретного типу графів.

Ключові слова: дробова метрична розмірність, метрична розмірність, графи

Вступ

Актуальність

Поняття метричної розмірності було введено Блюменталем [5] у 1953 році для метричних просторів. Пізніше Слатер [6] ввів концепцію роздільної множини для зв'язного графа G під терміном локаційної множини, яка насправді була метричною розмірністю для графа. Незалежно від нього, Хараррі та Мелтер [4] також досліджували цю концепцію для графів, але використали термін метрична розмірність. Проблема мінімальної метричної розмірності полягає в тому, щоб знайти метричний базис графа G . Метричний базис є мінімальною розділяючою множиною для графа G . Гарі та Джонсон показали, що проблема є NP-повною для графів в загальному випадку.

Застосування розділяючих множин зустрічається у різних сферах, включаючи проблему зважування монети, винаходження ліків, навігація роботами, виявлення та перевірка мережі, зв'язані з'єднання в графах та стратегії для “mastermind game”.

Існує багато різних узагальнень метричної розмірності для графів:

1. Реберна метрична розмірність
2. Змішана метрична розмірність
3. Дробова метрична розмірність

Огляду відомих результатів і дослідження дробової метричної розмірності для деяких типів графів присвячено цю роботу.

Об'єкт дослідження

Дробова метрична розмірність графів

Предмет дослідження

Моделювання та ілюстрація певного типу графів дробової розмірності які описуються.

Мета, завдання дослідження

Огляд відомих результатів щодо знаходження дробової метричної розмірності графів. Знаходження дробової метричної розмірності для певного типу графів.

Методи дослідження

Комбінаторні методи що використовуються в теорії графів

Опис роботи

Робота складається з розділів **1, 2**. В розділі **1** описуються теоретичні аспекти теорії графів, робиться огляд відомих результатів щодо обчислення дробової метричної розмірності графів для вершинно-транзитивних графів, графів Хемінга, прямого добутку графів, графів Томпсона. А також описано ряд відомих результатів щодо характеристики графів, дробова метрична розмірність яких дорівнює кількості вершин навпіл. Розділ **2** є практичною частиною роботи. В ньому аналізуються побудовані графи і обчислюється їх дробова розмірність.

3 Дробова метрична розмірність графів

3.1 Загальні відомості про дробову метричну розмірність

Нехай G скінченний, простий і зв'язний граф. Позначимо $V(G)$ і $E(G)$ як множини вершин та ребер відповідно. Для будь-яких двох вершин x і y з G , нехай $d_G(x, y)$ позначатиме відстань між x та y , $R_G\{x, y\}$ позначатиме множину вершин z таку, що $d_G(x, z) \neq d_G(y, z)$. Якщо зрозуміло про який граф йде мова, $d_G(x, y)$ і $R_G\{x, y\}$ записуватимемо як $d(x, y)$ і $R\{x, y\}$ відповідно. Розділяюча множина графа G є підмножиною W з $V(G)$ такою, що $W \cap R_G\{x, y\} \neq \emptyset$ для будь-яких двох різних вершин x і y з G .

Метрична розмірність графа G , позначається як $\dim(G)$, є найменшою потужністю усіх розділяючих множин з G .

Нехай $f : V(G) \rightarrow [0, 1]$ дійснозначна функція. Для $W \subseteq V(G)$ позначимо $f(W) = \sum_{v \in W} f(v)$. Назвемо f розділяючою функцією графа G , якщо $f(R_G\{x, y\}) \geq 1$ для будь-яких двох різних вершин x і y з G . Дробова метрична розмірність, позначається як $\dim_f(G)$, визначається як:

$\dim_f(G) = \min\{|g| : g \text{ — розділяюча функція графа } G\},$
де $|g| = g(V(G))$.

Декартів добуток графів G і H , позначається як $G \times H$, це граф з множиною вершин $V(G) \times V(H) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$, де (u_1, v_1) прилягає до (u_2, v_2) коли $(u_1 = u_2 \text{ і } \{v_1, v_2\} \in E(H))$, або $v_1 = v_2$ і $\{u_1, u_2\} \in E(G)$.

Зробимо огляд вершинно-транзитивних графів.

3.2 Вершинно-транзитивні графи

Для графа G нехай $r(G) = \min\{|R\{x, y\}| | x, y \in V(G), x \neq y\}$. (1)

Лема 1 [1]

Нехай G – граф для якого справджується $r(G)$ (1). Тоді $\dim_f(G) \leq \frac{|V(G)|}{r(G)}$.

Теорема 1 [1] (2)

Нехай граф G – вершинно-транзитивний, для якого справджується $r(G)$ (1). Тоді $\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{r(G)}$.

Теорема 2 [1] (3)

Якщо n – непарне ціле число і $n \geq 3$, тоді $\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1}$.

Доведення

Для будь-яких двох різних вершин u_1v_1 і u_2v_2 з $K_2 \times C_n$, маємо

$$|R\{u_1v_1, u_2v_2\}| = \begin{cases} 2n - 2, & \text{якщо } u_1 = u_2, v_1 \neq v_2 \\ 2n, & \text{якщо } u_1 \neq u_2, v_1 = v_2 \\ n + 1, & \text{якщо } u_1 \neq u_2, d_{C_n}(v_1, v_2) = 1 \\ 2n - 2, & \text{якщо } u_1 \neq u_2, d_{C_n}(v_1, v_2) \geq 2 \end{cases}$$

Оскільки $K_2 \times C_n$ – вершинно транзитивний граф, то $\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1}$ за теоремою 1 (2). $\square$

Граф G з діаметром d називається дистанційно-регулярним, якщо для усіх цілих чисел $0 \leq h, i, j \leq d$ і будь-яких двох вершин x, y на дистанції h , число $p_{i,j}^h = |\{z \in V(G) | d(x, z) = i, d(y, z) = j\}|$ є константою. Числа $p_{i,j}^h$ називаються перехресними числами графа G .

Теорема 3 [1]

Нехай G вершинно-транзитивний, дистанційно-регулярний граф з діаметром d .
Тоді

$$\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{|V(G)| - \max\{\sum_{i=1}^d \frac{h}{p} \mid h = 1, \dots, d\}}$$

Граф Хемінга, позначається як $H_{n,k}$, має множину вершин $\{(x_1, \dots, x_n) \mid 1 \leq x_i \leq k, 1 \leq i \leq n\}$, при цьому дві вершини є суміжними, якщо вони відрізняються рівно однією координатою.

Теорема 4 [1]

Нехай $H_{n,k}$ – граф Хемінга, де $k \geq 3$. Тоді

$$\dim_f(H_{n,k}) = \frac{k}{2}$$

Нехай X – множина розмірності n , і $\binom{X}{k}$ позначає множину всіх k -підмножин X .
Граф Джонсона, позначається як $J(n,k)$, має $\binom{X}{k}$ як множину вершин, де дві k -підмножини є суміжними, якщо їх перетин має розмір $k-1$.

Лема 2 [1]

Нехай m додатнє ціле число і n довільне ціле число. Тоді

$$\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n-1} \geq \binom{m}{n}$$

Теорема 5 [1]

Нехай $J(n,k)$ – граф Томпсона, в якому $4 \leq 2k \leq n$. Тоді

$$\dim_f(J(n,k)) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } (n,k) = (4,2), \\ \frac{35}{17}, & \text{якщо } (n,k) = (8,4), \\ \frac{n^2 - n}{2kn - 2k^2}, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Зробимо огляд відомих результатів щодо характеристизації графів, дробова метричність яких дорівнює кількості вершин напіл.

3.3 Графи з $\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{2}$

Теорема 6 [2]

Нехай G зв'язний граф порядку n . Тоді $\dim_f(G) \leq \frac{n}{2}$. Далі $\dim_f(G) = \frac{n}{2}$ тоді і тільки тоді, якщо існує бієкція $\alpha: V(G) \rightarrow V(G)$ така, що $\alpha(v) \neq i$ і $|R\{v, \alpha(v)\}| = 2$ для всіх $v \in V(G)$.

Наслідок 1 [2]

$\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{2}$ для кожного з наступних графів:

1. $G = K_n, n \geq 2$.
2. $G = K_n - e, n \geq 4$.
3. $G = K_{2t} - M, t \geq 2$ і M ідеально збігається в K_{2t} .
4. G є повним k – дольовим графом $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, де $k \geq 2$ і $n_i \geq 2$.

Наслідок 2 [2]

Нехай $\wp$ позначає сукупність усіх зв'язних графів G з $\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{2}$. Якщо $G_1, G_2 \in \wp$, тоді $G_1 + G_2 \in \wp$, де $G_1 + G_2$ це граф, отриманий з G_1 і G_2 шляхом з'єднання кожної вершини G_1 з кожною вершиною G_2 .

Наслідок 3 [2]

Якщо $\dim_f(G) = \frac{n}{2}$, тоді $\dim_f(G + \overline{K_k}) = \frac{n+k}{2}$

Теорема 7 [2]

Будь-який зв'язний граф H може бути вкладений як індукований підграф зв'язного графа G з $\dim_f(G) = \frac{|V(G)|}{2}$

3.4 Дробова метрична розмірність деяких стандартних графів

Теорема 8 [2]

Для графа Петерсона(P), $\dim_f(P) = \frac{5}{3}$

Теорема 9 [2]

Для циклу C_n

$$\dim_f(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{n-1}, & \text{якщо } n \text{ не парне} \\ \frac{n}{n-2}, & \text{якщо } n \text{ парне} \end{cases}$$

Теорема 10 [2]

Для гіперкубу $G = Q_n, n \geq 2, \dim_f(Q_n) = 2$

Теорема 11 [2]

Нехай $G = (V, E)$ зв'язний граф порядку n . Нехай існує підмножина S із V яка задовольняє наступні умови:

1. Існує бієкція $\alpha: V - S \rightarrow V - S$ така, що $\alpha(v) \neq v$ і $|R\{v, \alpha(v)\}| = 2$ для всіх $v \in V - S$

2. Для кожного $\{x, y\} \in V_p$ існує $v \in V - S$ таке, що $R\{v, \alpha(v)\} \subseteq R\{x, y\}$,

Тоді $\dim_f(G) = \frac{n-|S|}{2}$

Теорема 12 [2]

Для колеса $W_n, n \geq 5$

$$\dim_f(W_n) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } n = 5 \\ \frac{3}{2}, & \text{якщо } n = 6 \\ \frac{n-1}{4}, & \text{якщо } n \geq 7 \end{cases}$$

3.5 Графи, для яких $\dim_f(G) = \dim(G)$

Теорема 13 [2]

Нехай G – граф дружби, який складається з k частин, де $k \geq 2$. Тоді $\dim_f(G) = k = \dim(G)$.

Теорема 14 [2]

Для графа-сітки $G = P_m \times P_n$, $\dim_f(G) = 2 = \dim(G)$

3.6 Дробова метрична розмірність дерева

Лема 3 [3]

Нехай G узагальнений зірчастий граф, а w – вузол у G . Нехай $u \in V(G)$ де степінь u дорівнює 1. Якщо дві різні вершини $x, y \in V(G)$ задовольняють $w \in R\{x, y\}$, тоді $u \in R\{x, y\}$.

Лема 4 [4]

Для $n \geq 3$, нехай G узагальнений зірчастий граф $S_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Тоді $\dim_f(G) = \frac{n}{2}$

Теорема 15 [4]

Нехай G граф-дерево з k вузлами $w_1, w_2, \dots, w_k$. Нехай $L(w)$ кількість листків вузла w графа G . Тоді

$$\dim_f(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L(w_i)$$

3.7 Дробова метрична розмірність уніциклічного графа

Нехай G – уніциклічний граф. Нехай R – індукований підграф графа G , який є ізоморфним циклу. Вершина $v \in V(R)$ називається корнем, якщо степінь v більше ніж 2. Якщо корінь v має степінь більше ніж 3 і $G - v$ має компонент шляху, то v називається трав'яним корнем. Розглянемо також множину вершин $Q \subseteq V(R)$ яка є множиною усіх вершин зі степенем принаймні 3 в R і множину вершин $A \subseteq Q$ яка є максимальною підмножиною Q так, що для кожного $u, v \in A, d(u, v) \neq \left\lfloor \frac{|V(R)|}{2} \right\rfloor$.

Нехай A, B, C, D, E набори уніциклічних графів G , де:

1. A – множина з G , яка є ізоморфна до циклічного графа.
2. B – множина з G , якій належать тільки трав'яні корені.

Розіб'ємо B на 5 частин $B_1, B_2, \dots, B_5$, де:

- a) $G \in B_1$ якщо $G \in B$ і R з G ізоморфне до C_4
- b) $G \in B_2$ якщо $G \in B$ і R з G є парним циклом порядку принаймні 6 і $|A| \leq 3$
- c) $G \in B_3$ якщо $G \in B$ і R з G є парним циклом порядку принаймні 6 і $|A| \geq 4$
- d) $G \in B_4$ якщо $G \in B$ і R ізоморфне до C_3
- e) $G \in B_5$ якщо $G \in B$ і R з G є непарним циклом порядку принаймні 5
3. C – множина з G , яка має один корінь, який не є трав'яним корнем.
4. D – множина з G , яка має 2 корені, які не є трав'яними коренями.

Розіб'ємо D на 2 частини D_1 і D_2 , де:

- a) $G \in D_1$ якщо $G \in D, R$ ізоморфне до паного цикла, і для двох різних коренів $u, v \in V(G), d(u, v) = \frac{|V(R)|}{2}$
- b) $G \in D_2$ якщо $G \in D$ але $G \notin D_1$
5. E – множина з G яка не належить A, B, C або D

Теорема 16 [3]

Нехай G уніциклічний граф порядку $n \geq 3$, який має k вузлів $w_1, w_2, \dots, w_k$.

Нехай $L(w)$ кількість листків вузла w графа G . Нехай R індукований підграф G , який ізоморфний циклу. Нехай $Q \subseteq V(R)$

яка є множиною усіх вершин зі степенем принаймні 3 в R і множину вершин $A \subseteq Q$ яка є максимальною підмножиною Q так, що для кожного

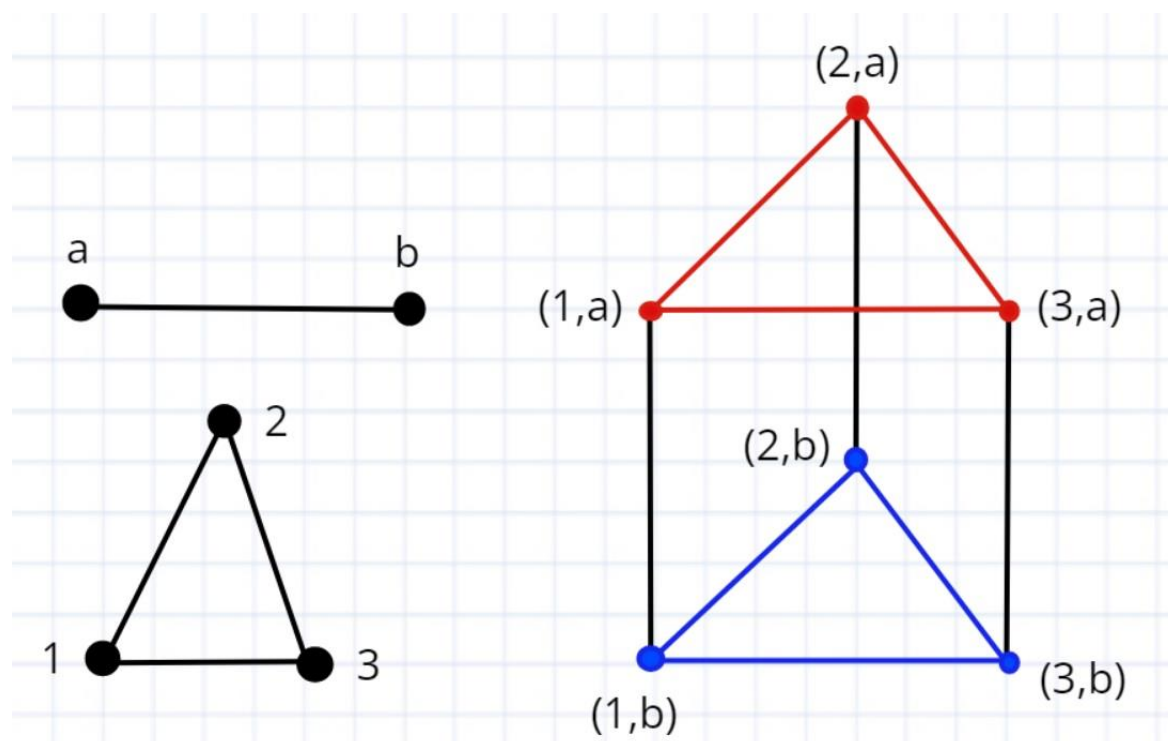
$u, v \in A, d(u, v) \neq \left\lfloor \frac{|V(R)|}{2} \right\rfloor$. Якщо $G \notin B_5$, тоді

$$dim_f(G) = \begin{cases} \frac{|V(R)|}{|V(R)| - 1}, & \text{якщо } G \in A \text{ і } R \text{ парний цикл} \\ \frac{|V(R)|}{|V(R)| - 2}, & \text{якщо } G \in A \text{ і } R \text{ непарний цикл} \\ 2, & \text{якщо } G \in B_1 \\ \frac{3}{2}, & \text{якщо } G \in B_2 \bigcup B_4 \\ \frac{2|A|}{|A| + 1}, & \text{якщо } G \in B_3 \\ 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L(w_i), & \text{якщо } G \in C \bigcup D_1 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L(w_i), & \text{якщо } G \in D_2 \bigcup E \end{cases}$$

4. Ілюстрація та знаходження дробової метричної розмірності

Для знаходження дробової метричної розмірності скористаймося теоремою (3). Візьмемо повний граф з двома вершинами і цикл довжиною $n \geq 3$, n – непарне.

Приклад 1

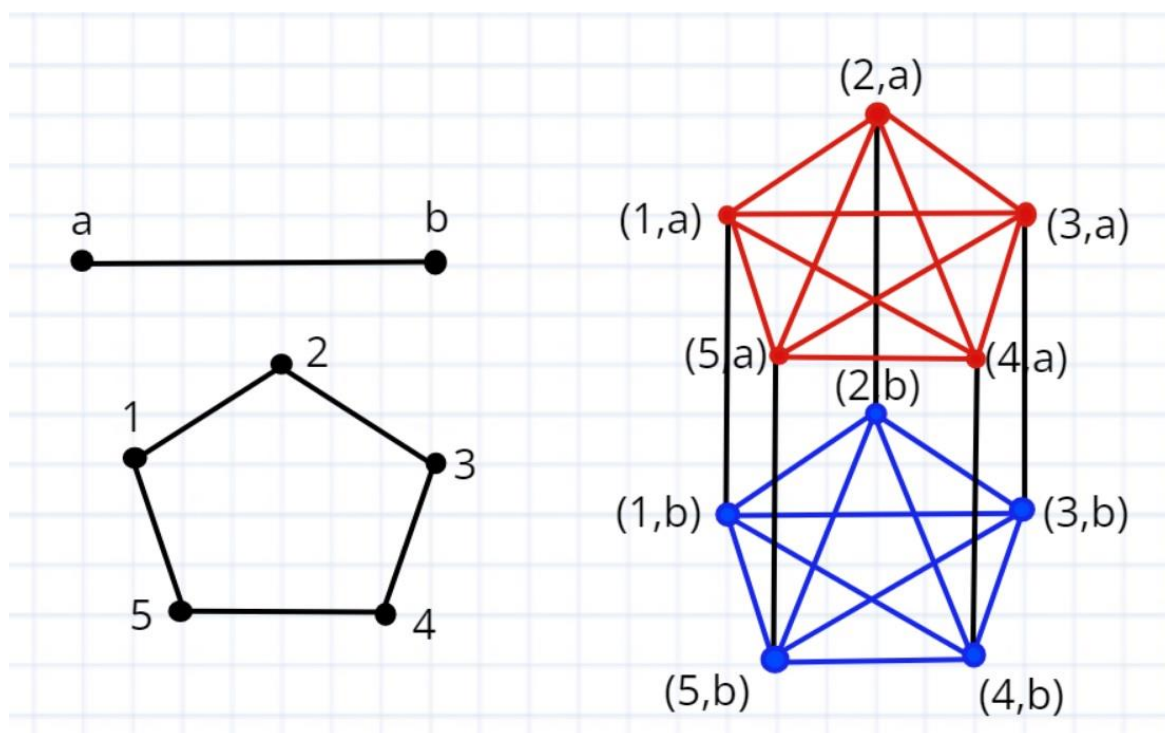


У даному прикладі розглянемо цикл довжиною 5. При декартовому добудку двох початкових графів (зліва) отримаємо граф, що знаходиться справа на малюнку. Відповідно для обчислення дробової метричної розмірності скористаймося формулою з теореми (3).

$$\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: Дробова метрична розмірність для даного декартового добутку дорівнюватиме $\frac{3}{2}$.

Приклад 2

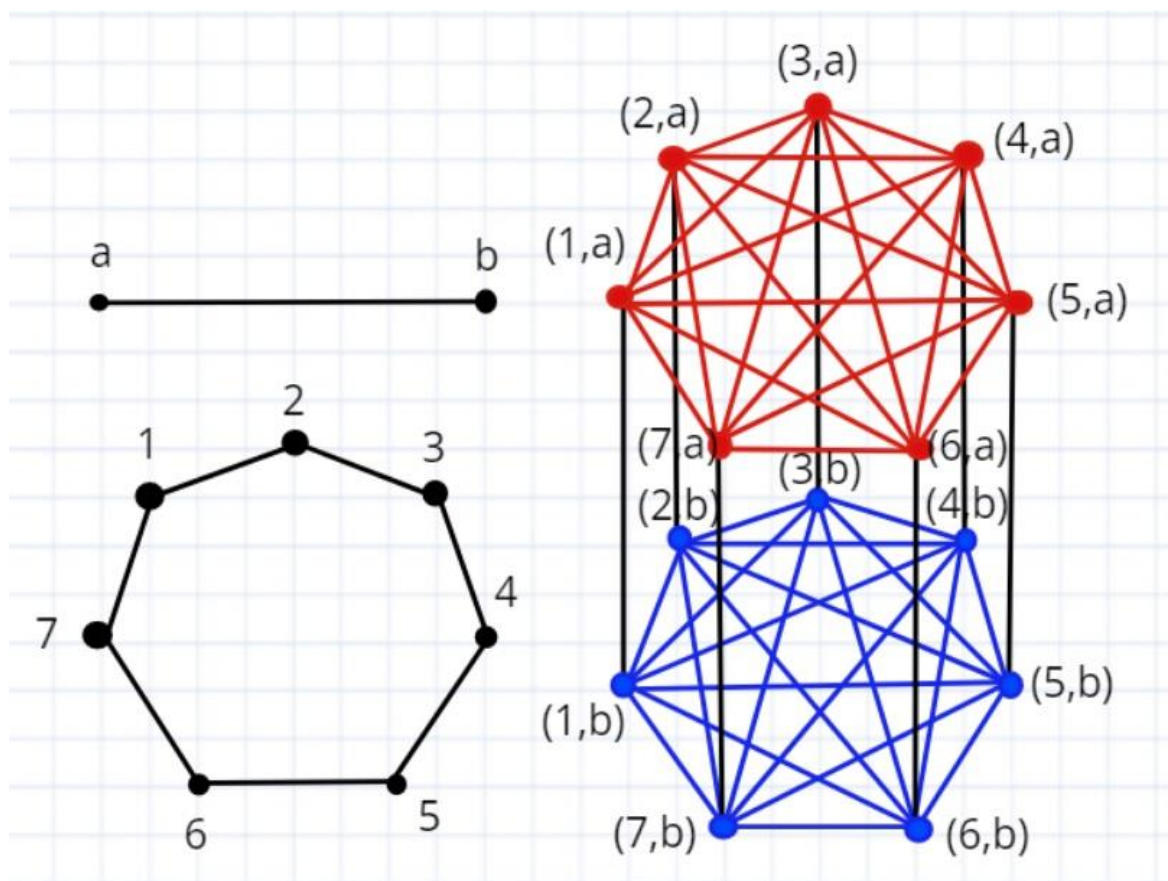


У даному прикладі розглянемо цикл довжиною 5. При декартовому добутку двох початкових графів (зліва) отримаємо граф, що знаходиться справа на малюнку. Відповідно для обчислення дробової метричної розмірності скористаймося формулою з теореми (3).

$$\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1} = \frac{2 \cdot 5}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь: Дробова метрична розмірність для даного декартового добутку дорівнюватиме $\frac{5}{3}$.

Приклад 3

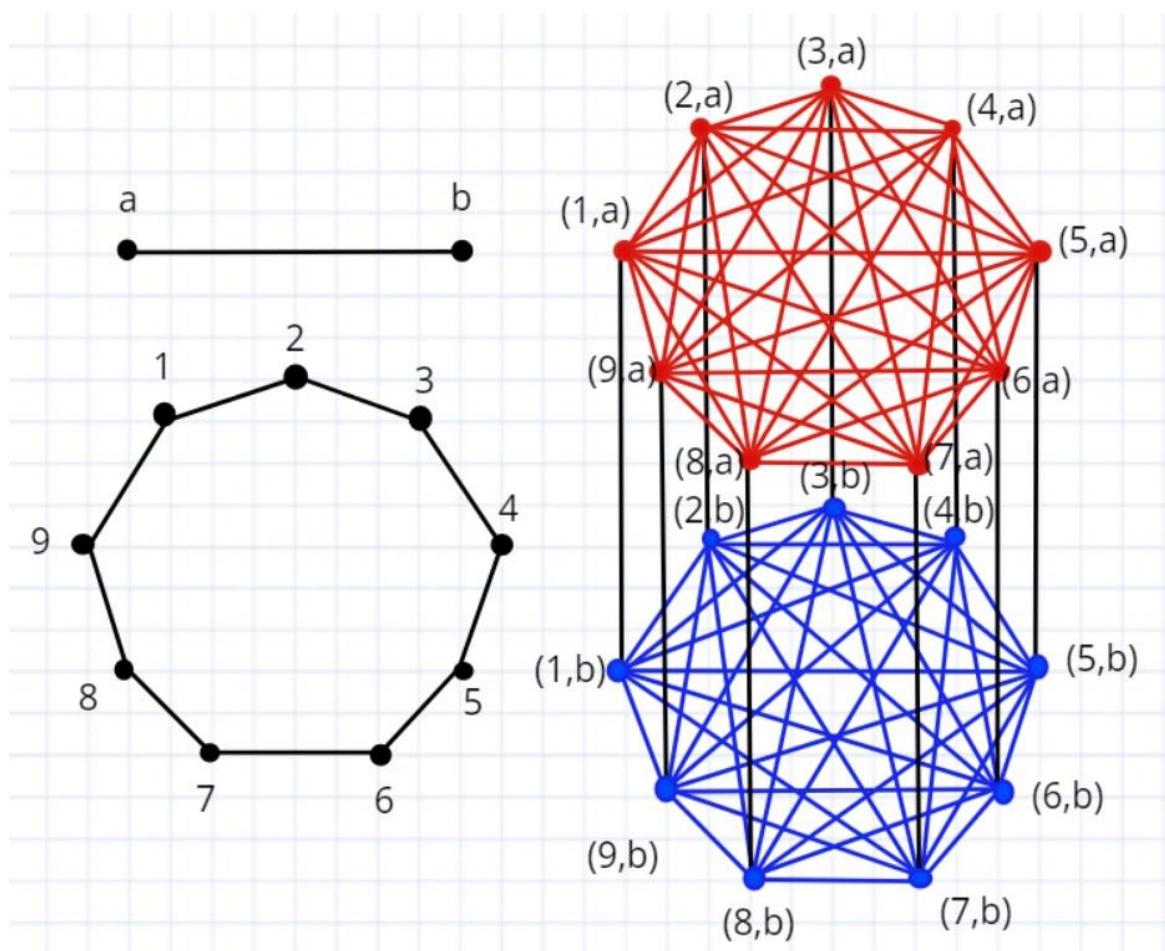


У даному прикладі розглянемо цикл довжиною 7. При декартовому добутку двох початкових графів (зліва) отримаємо граф, що знаходиться справа на малюнку. Відповідно для обчислення дробової метричної розмірності скористаймося формулою з теореми (3).

$$\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1} = \frac{2*7}{7+1} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}.$$

Відповідь: Дробова метрична розмірність для даного декартового добутку дорівнюватиме $\frac{7}{4}$.

Приклад 4



У даному прикладі розглянемо цикл довжиною 9. При декартовому добутку двох початкових графів (зліва) отримаємо граф, що знаходиться справа на малюнку. Відповідно для обчислення дробової метричної розмірності скористаймося формулою з теореми (3).

$$\dim_f(K_2 \times C_n) = \frac{2n}{n+1} = \frac{2 \cdot 9}{9+1} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$$

Відповідь: Дробова метрична розмірність для даного декартового добутку дорівнюватиме $\frac{9}{5}$.

5 Висновки

В роботі розглянуто поняття дробової метричної розмірності графів. Зроблено огляд відомих результатів щодо обчислення дробової метричної розмірності графів для вершинно-транзитивних графів, графів Хемінга, прямого добутку графів, графів Томпсона. А також розглянуто ряд відомих результатів щодо характеристики графів, дробова метрична розмірність яких дорівнює кількості вершин навпіл. Знайдено і графічно проілюстровано знаходження дробової метричної розмірності прямих добуток графів $K_2 \times C_3, K_2 \times C_5, K_2 \times C_7, K_2 \times C_9$.

6 Список літератури

1. On the fractional metric dimension of graphs
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X14000109>
2. The fractional metric dimension of graphs
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X11002561#br000090>
3. Fractional metric dimension of tree and unicyclic graph
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915035358>
4. Harary F., Melter R. A.. On the the metric dimension of a graph // Ars Combinatoria, 1976 , 2 , P.191-195.
5. Leonard M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry
// Oxford: At the Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege), XI, 1953.
6. Slater P. J. Leaves of trees // Congr. Number 1975 , 70, P. 549-559.