

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь — бакалавр

на тему: **“ТРАФІЧНІ МУЛЬТИМНОЖИНИ”**

Виконав студент
4-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Приймич Микола Юрійович
(ПІБ)

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

“ _____ ” _____ 2021 р.

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено “_____” _____ 2021 р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.08.2020			
2.	Ознайомлення з темою курсової.	28.08.2020			
3.	Розробка плану та структури роботи.	20.09.2020			
4.	Дослідження основних властивостей графічних мультимножин.	26.11.2020			
5.	Розробка алгоритму перевірки мультимножини на графічність.	11.03.2021			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	18.03.2021			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	13.05.2021			

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

Зміст

1	Вступ	4
2	Основні означення та попередні результати	5
2.1	Означення	5
2.2	Попередні результати	7
3	Основні результати	9
4	Програмна реалізація	18
4.1	Опис класів	18
4.2	Опис методів	20
4.3	Робота алгоритму на прикладі	20
	Література	24

1 Вступ

Графічність мультимножини є фундаментальним поняттям теорії графів, що застосовується в багатьох її розділах. Проблема визначення властивостей, що вказують на графічність мультимножини, полягає у тому, щоб якомога точніше дати певні явні ознаки графічності мультимножини для всіх можливих класів графів.

Ця проблема є багатою на дослідження темою. Серед людей, які зробили свій внесок у цю тему, були Пітер Хаммер, Бруно Сімеоне, Сейфолла Луї Хакімі та багато інших.

Метою дослідження є розробка та реалізація алгоритму перевірки мультимножини на графічність та її побудова у вигляді графа. Мета роботи зумовила наступні наукові **завдання**:

1. Дослідити графічну реалізацію мультимножин на простих графах.
2. Дослідити графічну реалізацію мультимножин на мультиграфах графах.
3. Реалізувати алгоритм перевірки мультимножини на графічність.
4. Реалізувати алгоритм побудови графічної мультимножини на графі.

Робота складається з трьох частин. В 2 розділі ми досліджуємо згадані раніше поняття в різних класах графів. Також, ми описали центр та периферію певних класів графів.

В 3 розділі ми описали алгоритм перевірки мультимножини на графічність та її зображення на графі, навели пояснення до програмної реалізації алгоритму та показали роботу алгоритму на прикладі.

2 Основні означення та попередні результати

2.1 Означення

Граф — один із базових термінів теорії графів, що включає в себе множину вершин і ребер.

Вершина — один із базових термінів теорії графів, що є точкою, з якої можуть виходити ребра в інші вершини графа.

Ребро — один із базових термінів теорії графів, що з'єднує вершини графа між собою.

Суміжні вершини — вершини, які з'єднані одним спільним ребром.

Компонента зв'язності — деяка підмножина вершин графа. Для будь-якої вершини із цієї підмножини існує шлях до іншої будь-якої вершини із цієї ж підмножини та не існує шляхів до вершин із інших множин.

Зв'язний граф — тип графа, у якому всі вершини містяться в одній компоненті зв'язності.

Скінченний граф — граф, який містить в собі скінченну кількість вершин.

Двочастковий граф — граф, множину вершин V якого можна розбити на дві підмножини V_1 та V_2 таким чином, що будь-яке ребро цього графа буде інцидентне вершині із V_1 та V_2 .

Цикл — замкнений ланцюг вершин графа.

Простий цикл — цикл, що не проходить двічі через одну і ту саму вершину.

Зв'язна множина вершин — множина вершин графа, яка породжує зв'язний підграф.

Точка з'єднання — вершина графа, видалення якої призведе до збільшення кількості компонент зв'язності цього графа.

Блок в графі — підграф без точок з'єднання.

Ізоморфні графи — графи, в яких існує взаємооднозначна відповідність між їх вершинами і ребрами, при яких зберігається суміжність та інцидентність.

Висяча вершина — вершина, яка є суміжною лише із однієї іншою вершиною.

Двозв'язний граф — граф без точок з'єднання.

Ізометричний підграф — це зв'язний підграф H зв'язного графа G , метрика якого співпадає із метрикою G на множині вершин $V(H)$.

Дерево — зв'язний граф, який не містить циклів.

Повний граф K_n — граф із n вершинами, кожні дві вершини якого є суміжними.

Шлях — послідовність вершин і ребер, кожен елемент якої є інцидентним із сусідніми елементами.

Простий шлях — шлях, в якому жодна вершина не зустрічається двічі.

Split-граф — граф, мультимножину вершин якого можна розбити на повний підграф і сукупність незв'язних вершин. На split-графах є визначеною функція $m(d) = \max\{k : 1 \leq k \leq n, d_k \geq k - 1\}$, де $1 \leq k < n$.

Мультимножина — пара X, f , де X — впорядкована множина; $f : X \rightarrow N$.

Розщеплення $\sigma(G)$ — мінімальна кількість ребер, які потрібно додати або відняти від довільного графа G , щоб отримати в результаті split-граф.

2.2 Попередні результати

Теорема 1. Теорема Ердеша-Галлаї. Мультимножина $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ числа $2q$ на p частин, $(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p)$ є графічним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого цілого числа $p \geq r \geq 1$, $\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^p \min\{r, d_i\}$

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності є тривіальним: кожне ребро враховується двічі, тому їх сума є парною, права ж частина – це вклад в суму перших k степенів від ребер, індукованих відповідними вершинами і ребрами, у вершини, що залишилися.

Достатність. Нехай субреалізація неспадної мультимножини $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ є графом із вершинами $v_1, v_2, \dots, v_p$, такими, що $d(v_i) \leq d_i \leq p$, де $d(v_i)$ визначає степінь v_i . Також дана мультимножина $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ задовільняє початковим умовам.

Враховуючи ці початкові умови, будуємо реалізацію через послідовні субреалізації. Початкова субреалізація має p вершин і не містить ребер.

В цій субреалізації маємо критичний індекс r – найбільший індекс такий, що $d(v_i) = d_i$ для $1 \leq i \leq r$. Від самого початку r може дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли мультимножина містить лише нулі. В такому випадку алгоритм є закінченим. Поки $r \leq p$, ми отримуємо нову субреалізацію з меншою різницею $d_r - d(v_r)$ при вершині v_r , не змінюючи при цьому степінь будь-якої вершини v_i таких, що $i < r$. Цей алгоритм зупиниться лише в тому випадку, коли поточна субреалізація буде являти собою реалізацію Π .

Нехай $S = v_{r+1}, \dots, v_n$. Ми зберігаємо умову, що S – незалежна множина, що початково виконується. Записуємо $v_i \leftrightarrow v_j$, якщо $v_i v_j \in E(G)$; інакше $v_i \nleftrightarrow v_j$.

Випадок 1. $v_r \nleftrightarrow v_i$ для деякої вершини такої, що $d(v_i) < d_i$. Додаємо ребро $v_r v_i$.

Випадок 2. $v_r \nleftrightarrow v_i$ для деякого i такого, що $i < r$. Оскільки $d(v_i) = d_i \geq d_r > d(v_r)$, існує $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$, де $N(z) = \{y : z \leftrightarrow y\}$. Якщо $d_r - d(v_r) \geq 2$, то замінюємо uv_i на $\{uv_r, v_i v_r\}$. Якщо $d_r - d(v_r) = 1$, то, оскільки $\sum d_i - \sum d(v_i)$ – парна, то існує деякий індекс k , де $k > r$ такий, що $d(v_k) < d_k$. Випадок 1 застосовується лише тоді, коли $v_r \leftrightarrow v_k$; замінюємо $\{v_r v_k, uv_i\}$ на $\{uv_r, v_i v_r\}$.

Випадок 3. $v_1, \dots, v_{r-1} \in N(v_r)$, і $d(v_k) \neq \min r, d_k$ для деяких k , таких, що $k > r$. В субреалізації $d(v_k) \leq d_k$. Оскільки S є незалежною, $d(v_k \leq r)$. Отже $d(v_k) < \min\{r, d_k\}$, і Випадок 1 виконується, лише тоді, коли $v_k \leftrightarrow v_r$.

Оскільки $d(v_k) < r$, існує деяке i таке, що $i < r$, при чому $v_k \leftrightarrow v_i$. Оскільки $d(v_i) > d(v_k)$, існує деяке $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$. Замінюємо uv_i на $\{uv_r, v_i v_k\}$.

Випадок 4. $v_1, \dots, v_{r-1} \in N(v_r)$, і $v_i \leftrightarrow v_j$ для деяких i та j , при цьому $i < j < r$. Випадок 2 виконується, лише тоді, коли $v_i, v_j \in N(v_r)$. Оскільки $d(v_i) \geq d(v_j) > d(v_r)$, існує деяке $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$ і $w \in N(v_j) - (N(v_r) \cup \{v_r\})$. Оскільки $u, w \notin N(v_r)$, Випадок 2 виконується, лише тоді, коли $u, w \in S$. Замінюємо $\{uv_i, wv_j\}$ на $\{v_i v_j, uv_r\}$.

Якщо жоден із зазначених випадків не виконується, то $v_1, \dots, v_r$ є попарно суміжними і $d(v_k) = \min\{r, d_k\}$ для $k > r$. Оскільки S є незалежною, $\sum_{i=1}^n d(v_i) = r(r-1) + \sum_{k=r+1}^n \min\{r, d_k\}$. Згідно з умовою, $\sum_{i=1}^r d_i$ є обмежений правою частиною. Отже ми уже маємо недостачу у вершині r . Збільшуємо r на 1 і продовжуємо алгоритм.

□

Твердження 1.

1. G – split-граф, тоді і тільки тоді, якщо $\sigma(G) = 0$
2. Для всіх графів G , $\sigma(G) = \sigma(\overline{G})$
3. Якщо $G_1, \dots, G_r$ – зв'язні компоненти зв'язності G , то

$$\sigma(G) \geq \sigma(G_1) + \dots + \sigma(G_n)$$

Доведення. Пункти 1 та 2 є очевидними. Третій пункт слідує із спостереження, що будь-яке додавання або видалення ребер в G для отримання split-графа також призводить до отримання split-графів $G_1, \dots, G_r$. □

Для отримання явної формули в наступній теоремі, потрібна лема, яка говорить: Для кожного $S \subseteq V$, мультимножина

$$s(S) = \frac{1}{2}|S|(|S| - 1) - |E(G(S))| + |E(G(V - S))|$$

.

3 Основні результати

Твердження 2. Мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ реалізується псевдографом тоді і тільки тоді, коли число $\sum_{i=1}^p d_i$ – є парним числом.

Доведення. Необхідність. Згідно з лемою про рукостискання, сума всіх степеней графа є парним числом. Кратні ребра не впливають на парність $\sum_{i=1}^p d_i$, оскільки додають 2 до суми степенів вершин графа, власне, як і петлі, що говорить про те, що $\sum_{i=1}^p d_i$ завжди буде парним числом.

Достатність. Розіб'ємо елементи мультимножини на дві групи згідно з їх парністю. Розглянемо парні елементи мультимножини: їхню графічність можна зобразити шляхом додавання петель до кожної вершини, доки не буде досягнуто потрібної кількості ребер при кожній вершині. Розглянемо непарні елементи мультимножини. Згідно з лемою про рукостискання, ми маємо непарну кількість непарних вершин в графі. Зв'язуючи елемент мультимножини найбільшого степеня кратними ребрами із наступним елементом мультимножини, рухаючись далі по елементам незростаючої мультимножини, ми можемо досягнути повного графічного зображення нашої мультимножини. $\square$

Теорема 2. Мультимножина $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ реалізується мультиграфом, тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $\sum_{i=1}^n d_i = 2q$, де $q \in N$
2. $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$.

Доведення. Необхідність умови $\sum_{i=1}^n d_i = 2q$, виконується внаслідок того, що q – кількість вершин графа G .

Щоб довести умову $\sum_{i=1}^{n-1} d_i \geq d_n$, припустимо супротивне: нехай існує граф G такий, що $\sum_{i=1}^{n-1} d_i < d_n$. Нехай d_n – степінь вершини v_n графа G . Із нерівності $\sum_{i=1}^n -1d_i < d_n$ випливає, що існує хоча б одна вершина із графа G , яка є суміжної тільки з v_n . Це суперечить умові, оскільки $\sum_{i=1}^n -1d_i \geq d_n$. Достатність. Достатність доводиться за індукцією. Якщо $n = 2$, то з другої умови випливає, що $d_1 = d_2$. Така мультимножина реалізується графом з двома вершинами, які є суміжними. Для $n = 3$ маємо мультимножину

(d_1, d_2, d_3) , яка задовільняє першу і другу умови, і нам потрібно знайти граф з трьома вершинами, який реалізує цю мультимножину.

Розглянемо графи з трьома вершинами. Нехай $n_{ij} = n + ji$ позначає кількість ребер між вершинами v_i та v_j , де $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. З цього маємо:

$$\begin{aligned} d_1 &= n_{12} + n_{13} = n_{21} + n_{31}, \\ d_2 &= n_{23} + n_{21} = n_{32} + n_{12}, \\ d_3 &= n_{31} + n_{32} = n_{13} + n_{23}. \end{aligned}$$

З цієї системи рівнянь, отримуємо

$$\begin{aligned} n_{12} &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_3}{2}, \\ n_{13} &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_2}{2}, \\ n_{23} &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_1}{2}. \end{aligned}$$

Існування шуканого графа є доведеним, якщо показати, що n_{12}, n_{13}, n_{23} – невід’ємні числа. З другої умови випливає, що сума будь-яких $n - 1$ цілих чисел є не меншою ніж число, що залишилося, з чого слідує, що n_{12}, n_{13}, n_{23} – невід’ємними. З першої умови слідує, що $\sum_{i=1}^n d_i - 2d_j, (1 \leq j \leq n)$ є парною, з чого слідує, що n_{12}, n_{13}, n_{23} – цілі числа.

Щоб завершити доведення за індукцією, припустимо, що твердження виконується для $n < k$, де $k > 3$, з чого ми покажемо, що воно виконується і для $n = k$. Нехай $d_1, d_2, \dots, d_k$, де k натуральних чисел, які задовільняють початковим умовам. Розглянемо мультимножину натуральних чисел $d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, d_k - d_1$. Припустимо, що $d_k - d_1 \neq 0$. Потрібно, щоб ця нова мультимножина задовільняла початкові умови. Сума елементів мультимножини рівна $\sum_{i=1}^k d_i - 2d_1$, яка є парним числом, з чого слідує, що $\sum_{i=1}^n d_i$ також є парною, оскільки задовільняється перша умова. Залишається довести, що нова мультимножина задовільняє другу умову.

Маємо $\sum_{i=1}^{k-1} d_i \geq d_k$, з чого випливає $\sum_{i=2}^{k-1} d_i \geq d_k - d_1$. Якщо $d_k - d_1$ – найбільше число мультимножини, то це задовільняє другій умові, якщо ж ні, то d_{k-1} є найбільшим числом мультимножини і нам потрібно показати, що $(d_2 + d_3 + \dots + d_{k-2} + (d_k - d_1)) \geq d_{k-1}$. Ця нерівність виконується для $k > 3$, оскільки $d_k \geq d_{2k-1}$ і $d_2 \geq d_1$.

Згідно з гіпотезою будь-яка мультимножина із $n < k$ натуральних чисел, яка задовільняє початковим умовам, є графічною, тобто існує граф G_1 , який реалізує мультимножину степеней вершин графа $(d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, d_k - d_1)$.

До графа G_1 додаємо вершину v_1 і з'єднуємо з нею d_1 вершин із G_1 , які відповідають цілому числу $d_k - d_1$. Побудований таким чином граф відповідає початковій мультимножині. Якщо $d_k - d_1 = 0$, то нова мультимножина становить собою $(d_2, d_3, \dots, d_{k-1})$, яка також задовільняє початковим умовам, а, відповідно, реалізується графом G_1 . Крім того нам потрібно додати дві вершини до G_1 і з'єднати з ними $d_1 = d_k$ вершин. Цей крок є останнім в доведенні теореми, оскільки ми отримуємо початковий граф. $\square$

З цієї теореми випливає наслідок

Наслідок 1. Для будь-якої трьохелементної мультимножини (d_1, d_2, d_3) існує лише один граф, який реалізує цю мультимножину, вершини якого мають степені d_1, d_2, d_3 .

d -інваріантне перетворення. Припустимо, що граф G реалізує мультимножину (d_1, d_2, d_3) . Розглянемо пару підграфів $e(v_i, v_j)$ і $e(v_k, v_0)$ із графа G , які є зв'язними і відповідно містять вершини v_i, v_j та v_k, v_0 . Щоб не втратити загальності, припустимо, що вершини v_i, v_j, v_k, v_0 є попарно різними. Перетворимо граф G в граф G_1 , шляхом видалення з нього підграфів $e(v_i, v_j)$ і $e(v_k, v_0)$ і додання до нього підграфів $e(v_i, v_k)$ та $e(v_j, v_0)$, які відповідно містять вершини v_i, v_k та v_j, v_0 , або додання до нього підграфів $e(v_i, v_0)$ та $e(v_j, v_k)$, які відповідно містять вершини v_i, v_0 та v_k . Потрібно зазначити, що при такому перетворенні степені вершин графа залишаються незмінними. Таке перетворення називається елементарним d -інваріантним перетворенням. Сукупність всіх графів, які реалізують одну і ту ж саму мультимножину називається сукупністю d -інваріантних графів.

Лема 1. Нехай $g_1, g_2, \dots, g_r; r > 1$, – компоненти зв'язності G , при цьому не кожен з них є деревом. Тоді існує граф G_1 , який є d -інваріантним для графа G із $r - 1$ компонент зв'язності.

Доведення. Нехай g_i – компонента зв'язності графа G , яка містить цикл. Нехай e_{v_i, v_1} – підграф, який містить цикл g_i . Візьмемо довільний e_{v_j, v_1} – підграф g_j , при цьому $i \neq j$. Завдяки елементарному d -перетворенню, що включає e_{v_i, v_1} і e_{v_j, v_1} , ми отримуємо новий граф G_1 , в якому підграфи g_i та g_j знаходяться в одній компоненті зв'язності, тобто кількість компонент початкового графа була зменшена на одну. $\square$

Потрібно зазначити, що таким чином ми можемо зменшувати кількість компонент зв'язності, доки в початковому графі G існують компоненти зв'язності, що містять цикл.

Теорема 3 Достатні і необхідні умови для мультимножини $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ для її реалізації у вигляді зв'язного графа:

1. Мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ є графічною, тобто вона задовільняє умовам **Теорема 2**.

2. $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2(n-1)$.

Доведення. Необхідність. Необхідність першої умови уже є доведеним. Для того, щоб довести необхідність другої умови, розглянемо зв'язний граф G . В зв'язному графі з n вершин, кількість елементів мультимножини q принаймні рівне $n-1$. Відомо, що $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2q$, з чого випливає $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2(n-1)$.

Достатність. Щоб довести достатність, припустимо, що мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ задовільняє початкові умови. Доведемо, що серед усіх d -інваріантних графів, які реалізують мультимножину $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ існує хоча б один зв'язний. Оскільки мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ задовільняє першу умову, то існує граф G , який реалізує цю мультимножину. Якщо G – зв'язний, то доведення є завершеним, тому припустимо, що G – не є зв'язним. Позначимо компоненти зв'язності графа G через $g_1, g_2, \dots, g_r$, де $r > 1$. Припустимо, що $g_1, g_2, \dots, g_r$ – компоненти зв'язності без циклів. У випадку, якщо компонента зв'язності g_i містить цикл, то згідно з **Лемою 1**, ми можемо її об'єднати з іншою компонентою зв'язності g_j , зменшивши при цьому загальну кількість компонент зв'язності. Ми можемо продовжувати цю операцію, доки всі компоненти зв'язності не будуть містити циклів. Якщо $g_1, g_2, \dots, g_r$ – не містять циклів, то кількість компонент зв'язності становить $n-r$. З цього випливає $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$, тобто виконується друга умова теореми і теорема є доведеною. $\square$

Наступний наслідок легко виводиться як наслідок попередньої теореми:
Наслідок 2. Мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ реалізується деревом тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1).$$

Теорема 4 [7]. Мультимножина $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$, $p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$, є графічною тоді і тільки тоді, коли графічною є модифікована мультимножина $\Pi' = (d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}, d_{d_2+1}, \dots, d_p)$.

Наслідок 3. Мультимножина $\Pi = (d_1, d_2, \dots, d_p)$, де

$$p-1 \geq (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p),$$

є графічною тоді і тільки тоді, коли наступний алгоритм приводить до мультимножини, в якій кожен елемент дорівнює нулю:

1. Знайти модифіковану мультимножину Π' , визначену в формулюванні **Теорема 4**.
2. Розташувати елементи мультимножини Π' в порядку незростання і позначити нову мультимножину через Π_1 .
3. Для Π_1 знайти модифіковану мультимножину Π'' так само, як і на кроці 1, і отримати впорядковану мультимножину Π_2 .
4. Продовжувати цю процедуру до отримання хоча б одного від'ємного елемента мультимножини або ж до отримання мультимножини, кожен елемент якої буде дорівнювати нулю.

Приклад 1. Маємо мультимножину

$$\Pi = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2).$$

Згідно з алгоритмом маємо:

$$\Pi' = (4, 2, 2, 1, 1, 2)$$

$$\Pi_1 = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$$

$$\Pi'' = (1, 1, 1, 0, 1)$$

Із Π'' можна побачити, що вона є графічною, тому Π також є графічним.

Лема 2. Нехай Π – мультимножина із n натуральних чисел. Тоді Π є мультимножиною степенів дерева тоді і тільки тоді, коли $\sum \Pi = 2n - 2$. Більш того, якщо $\sum D = 2n - 2$, то для будь-яких $l, k \in \Pi$, Π може бути реалізованим, як дерево, в якому вершина степеня l є суміжною вершині степеня k , лише тоді, коли $n > 2$ і $l = k = 1$.

Доведення. Кожне дерево на n вершинах має $n - 1$ ребро, таким чином, сума його степенів дорівнює $2n - 2$.

Припустимо, що Π – мультимножина натуральних чисел, сума якої дорівнює $2n - 2$. Припустимо, що $n \geq 3$, оскільки для $n \leq 2$ доведення леми є тривіальним.

За індукцією доведемо, що Π є мультимножиною степеней вершин дерева. При індукційному кроці, потрібно зазначити, що при $\sum \Pi = 2n - 2$

і при $n \geq 3$, існує хоча б одна одиниця в Π і, принаймні, один елемент x , який більший за одиницю в Π . Утворимо нову мультимножину Π' із Π шляхом видалення із неї одиниці і зменшення x на 1. Π' складається із $n - 1$ натуральних чисел, сума яких дорівнює $2(n - 1) - 2$. За припущенням індукції, існує дерево T' , яке реалізує Π' . Додання вершини до T' , яка є суміжною до вершини степеня $x - 1$, утворює дерево T на n вершинах, що реалізує Π .

Доведемо більш сильне твердження. Припустимо без втрати загальності, що $l \leq k$. Нехай T – дерево, що реалізує Π . Нехай y – вершина степеня l і r – вершина степеня k в T . Якщо існує ребро ry , то доведення закінчене. В іншому випадку r є коренем дерева T . Оскільки $n > 2, k \geq 2$, і r має, принаймні, двох дітей. Позначимо T_y – піддерево T , коренем якого є y , і p – батько y в T . Позначимо T_x – піддерево T , коренем якого є дитина вершини r вершина x , при цьому $y \notin V(T_x)$. Тепер поміняємо місцями T_x і T_y , видалимо ребра rx, ry , додамо ребра px, py . В результаті отримаємо граф, що є деревом і реалізує Π , має вершину степеня l , яка є суміжною до вершини степеня k . $\square$

Теорема 5. Мультимножина $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ графа G містить незростаючу послідовність степенів $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n, \chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$.

Доведення. Застосуємо метод послідовного пошуку, щоб зафарбувати вершини із заданим порядком вершин. Якщо вершина v_i уже є зафарбованою, то кількість уже розфарбованих вершин не може перевищувати як мінімум $(i - 1)$ і його степінь d_i для кожного i . Тому для того, щоб розфарбувати цю вершину і вершини із меншими індексами, кількість необхідних кольорів повинна не перевищувати $1 + \min\{i - 1, d_i\}$. З цього слідує, що $\chi(G)$ не може перевищувати цих n чисел. Тому $\chi(G) \leq 1 + \max\{d_i, i - 1\} \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$. $\square$

Теорема 6 . [2] Граф G із мультимножиною вершин Π є split-графом тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^m d_i = m(m - 1) + \sum_{i=m+1}^n d_i$$

де $m = m(d)$.

Потрібно зазначити, що за означенням m виконується умова $d_i \leq m - 1$ для всіх $i > m$ таких, що $\sum_{i=m+1}^n d_i = \sum_{i=m+1}^n \min\{m, d_i\}$. Тобто ця теорема може бути перефразованою: граф G є split-графом тоді і тільки тоді, коли мультимножина задовільняє нерівності Ердеша-Галлаї із строгою рівністю.

Наслідок 4. Якщо граф є split-графом, то кожен граф з такою ж мультимножиною степенів вершин також є split-графом.

Теорема 7. Якщо G – split-граф із мультимножиною степенів вершин d , то виконується наступне:

1. $\omega(G) = m(d)$
2. $\chi(G) = m(d)$.

Доведення. 1. Згідно з умови завжди має виконуватися нерівність $\omega(G) \leq m(d)$. Якщо V – множина вершин графа G , то нехай виконується умова $S \subseteq V$ така, що $|S| > m = m(d)$. Якщо вершини графа G пронумеровані від 1 до n таким чином, що $d_1 \geq \dots \geq d_n$, S має містити в собі вершину $k > m$. Згідно з означення m граф має задовільняти нерівність $d_k \leq m - 1 < |S| - 1$ і з цього слідує, що S не може бути клікою. Розглянемо конкретний набір вершин $S_m = \{1, \dots, m\}$. При цьому виконуються наступні рівності:

$$\begin{aligned} 0 &= \{m(m-1) - \sum_{i=1}^m d_i + \sum_{i=m+1}^n d_i\} = 2s(S_m) = \\ &= \{m(m-1) - |E(G(S_m))|\} + |E(G(V - S_m))|; \end{aligned}$$

Оскільки в дужках містяться невід’ємні числа, виконуються рівності $E(G(S_m)) = m(m-1)$ і $E(G(V - S_m)) = 0$. З цього слідує, що S_m є повним підграфом, $V - S$ є незалежною частиною, а отже перша теза теореми є доведеною.

2. Нам потрібно рівно m кольорів, для вершин в S_m . Кожна вершина k в $V - S_m$ є несуміжною із вершинами S_m , інакше це суперечило першій умові теореми. З цього слідує, що k може бути пофарбованою одним із m кольорів. Отже $V - S$ є незалежною і друга теза теореми є доведеною.

□

Мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ називається гамільтоною, якщо будь-який граф, що реалізує цю мультимножину, є гамільтоновим.

Теорема 8.[5] Якщо $d_i \leq i \implies d_{n-1} \geq n - i$ виконується для будь-якого $i < n/2$, то мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ є гамільтоною.

Легко побачити, що ця теорема включає не всі гамільтонові мультимножини: мультимножини $(2, 2, 2, 2, 2)$ реалізується єдиним графом – циклом довжини 5, який є гамільтоновим, що суперечить умові теореми при $i = 2$. При цьому ми можемо сказати, що теорема описує типові гамільтонові графи. Щоб бути більш точними, будемо називати сильногамільтоновими, якщо будь-який граф, який реалізує деяку задану мультимножину, є гамільтоновим, при чому елементи мультимножини поточно якою є рівними або більшими за елементи заданої мультимножини.

Також потрібно зазначити, що мультимножина є сильногамільтоною тоді і тільки тоді, коли вона задовільняє умові теореми. Щоб показати це, введемо два графи $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, множини вершин яких не перетинаються. Позначимо об'єднання графів через $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Позначимо з'єднання графів через $G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times V_2))$. Якщо мультимножина $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ суперечить умовам теореми $d_i \leq i$ та $d_{n-1} < n - 1$ для деяких $i < n/2$, тоді легко довести, що

$$H_i = (\overline{K_i} \cup K_{n-2i}) \vee K_i$$

є негамільтоновим графом, елементи мультимножини якого поточно більші або рівні за елементи мультимножини $(d_1, d_2, \dots, d_p)$.

Теорема 9. Для будь-якого графа G ,

$$\sigma(G) = \sigma_m(d)$$

де d – мультимножина степенів вершин графа G

Доведення. Для будь-якого $S \subseteq V$, виконується

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2|E(G(S))| + |\delta S|$$

, де $d(x)$ – степінь вершини x .

З цього слідує

$$s(S) = \frac{1}{2} \{ |S|(|S| - 1) - \sum_{x \in S} d(x) + \sum_{x \in V-S} d(x) \}$$

Оскільки мультимножина d – незростаюча, позначивши $k = |S|$, маємо

$$\sum_{x \subseteq S} d(x) \leq \sum_{i=1}^k d_i, \quad \sum_{x \in V-S} d(x) \geq \sum_{i=k+1}^n d_i;$$

З того, що $|S| = k$, слідує

$$s(S) \geq \frac{1}{2} [|S|(|S| - 1) - \sum_{i=1}^k d_i + \sum_{i=k+1}^n d_i] = \sigma_k(d).$$

З іншої сторони, можна помітити, що для кожного k існує хоча б одна мультимножина S , а саме $S_k \equiv \{1, \dots, k\}$ для якого попередня нерівність виконується як рівність, з чого маємо

$$\sigma(G) = \min_{S \subseteq V} s(S) = \min_{1 \leq k < n} \min_{|S|=k} s(S) = \min_{1 \leq k < n} \sigma_k(d).$$

□

4 Програмна реалізація

Для реалізації алгоритму була застосована мова програмування Java та бібліотеки `asm`, `awt`, `util`.

4.1 Опис класів

Клас **Point**

Репрезентація точки на площині.

Поля:

- **serial** – порядковий номер точки в мультимножині.
- **degreeNumber** – степінь точки в мультимножині.
- **x** – координата точки на вісі абсцис.
- **y** – координата точки на вісі ординат.

Статичні методи:

Point decrement(Point p)

Зменшення значення степеню точки на 1 для подальшого виконання алгоритму.

Аргументи:

- **p** – об'єкт точки, значення степеню якої потрібно змінити.

Повертає:

Об'єкт точки із зміненим значенням степеню точки.

Відкриті методи:

getSerial()

Отримання порядкового номеру певної точки.

Повертає:

Порядковий номер певної точки.

getDegreeNumber()

Отримання степеню певної точки.

Повертає:

Степінь певної точки.

decrement(Point p)

Зменшення значення степеню певної точки на 1.

Аргументи:

- **p** – деяка точка.

Повертає:

Об'єкт точки із зміненням значенням степеню.

compareTo(Point o)

Метод для порівняння значень степенів точок між собою для подальшого їх сортування.

Аргументи:

- **o** – деяка точка, яку потрібно порівняти з іншою точкою.

Повертає:

Значення в межах $[-1, 1]$. Якщо значення 1, то вважаємо, що степінь початкової точки – більший, якщо 0, то вважаємо, що степені точок рівні, інакше – степінь початкової точки – менший.

4.2 Опис методів

addPoint(Point p)

Додання точки із заданими параметрами на екран програми.

Аргументи:

- **p** – точка, яку потрібно додати.

Повертає:

Зображення точки на екрані програми.

addLine(Point p1, Point p2)

Додання ребра між заданими точками на екран програми.

Аргументи:

- **p1** – деяка точка, яка слугує початковою точкою ребра.
- **p2** – деяка точка, яка слугує кінцевою точкою ребра.

Повертає:

Зображення ребра на екрані програми.

run()

Метод що запускає програму і створює вікно для зображення елементів.

4.3 Робота алгоритму на прикладі

Наведемо результат роботи алгоритму для масиву точок: (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)

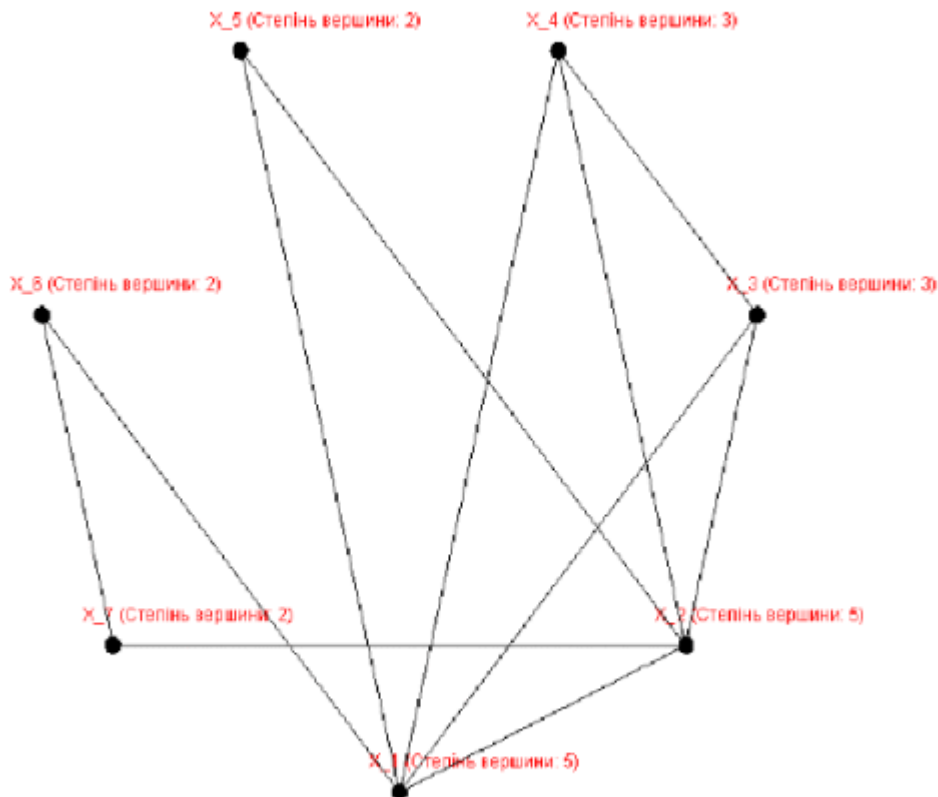
Зобразимо початковий граф без ребер:



Запустимо алгоритм Хавела-Хакімі на даній мультимножині:

```
while (!arrayList.isEmpty()) {
    Collections.sort(arrayList, Collections.reverseOrder());
    Point firstElement = arrayList.get(0);
    if (firstElement.getDegreeNumber() > arrayList.size() - 1) {
        isGraphic = false;
        break;
    }
    arrayList.remove(0);
    for (int i = 0; i < firstElement.getDegreeNumber(); i++) {
        Point p = Point.decrement(arrayList.get(i));
        try {
            TimeUnit.SECONDS.sleep(1);
        } catch (InterruptedException e) {
            e.printStackTrace();
        }
        hh.addLine(firstElement, p);
        arrayList.set(i, p);
    }
    arrayList = arrayList.stream().filter(p -> p.getDegreeNumber() != 0).collect(Collectors.toList());
}
```

Отримали один із можливих варіантів графу, який реалізує дану мультимножину:



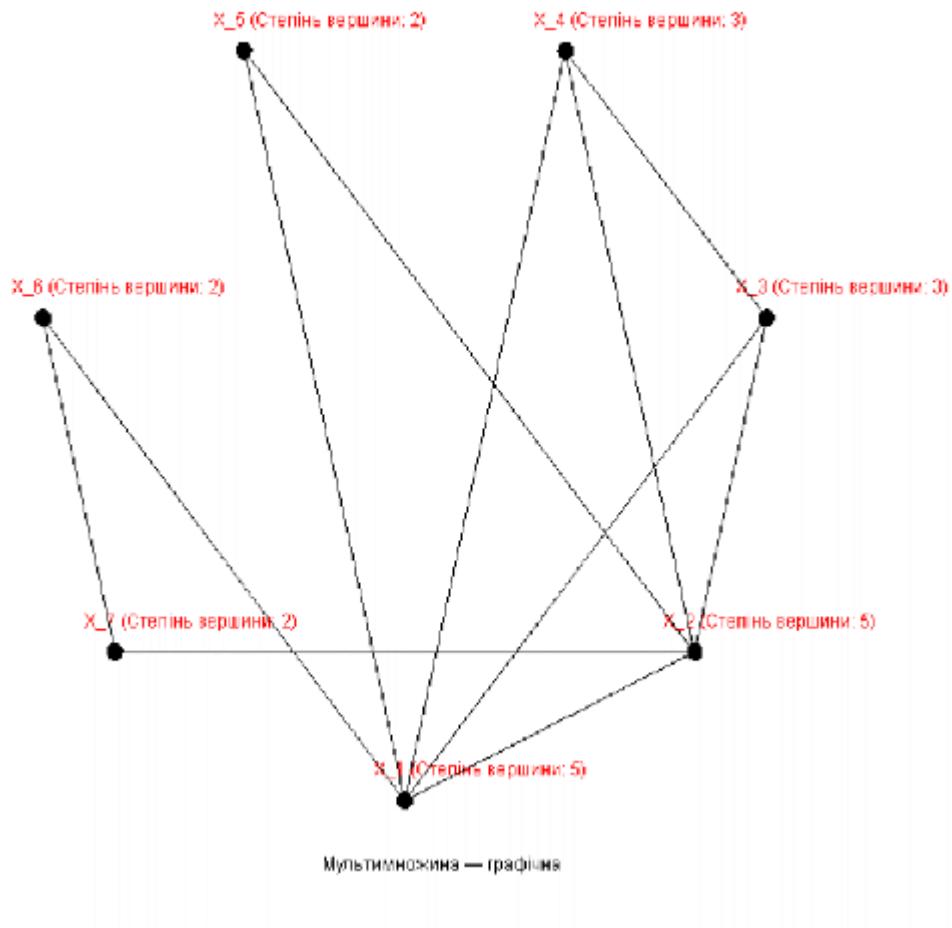
Запустимо частину коду, яка показує висновок, чи є дана мультимножина графічною:

```

GLabel label2;
if (isGraphic) {
    label2 = new GLabel("Мультимножина – графічна",250, 600);
    hh.addLabel(label2);
}
else {
    label2 = new GLabel("Мультимножина – не графічна",250, 600);
    hh.addLabel(label2);
};

```

Отримали граф, який реалізує дану мультимножину, із висновком графічності даної мультимножини:



Література

- [1] A. Tripathi, S. Venugopalanb , D. B. West, A short constructive proof of the Erdős-Gallai characterization of graphic lists, Elsevier B.V.— 2009. —P. 1–2.
- [2] P. L. Hammer, B. Simeone, The splittance of a graph, University of Waterloo, Ont., Canada and Instituto per le Applicazioni del Calcoto, Rome, Italy, 1980, pp. 2–8.
- [3] D. Szeszlér, Hamilton Cycles and Degree Sequences, Department of Computer Science and Information Theory Budapest University of Technology and Economics Pázmány Péter sétány 1/D, Budapest, Hungary, 2000, p. 1–3.
- [4] P. Bose, V. Dujmović, D. Krizanc, S. Langerman, P. Morin, D. R. Wood, S. Wuhner, A characterization of the degree sequences of 2-trees.1, SCHOOL OF COMPUTER SCIENCE CARLETON UNIVERSITY, OTTAWA, CANADA (2006), pp. 1 - 10.
- [5] S. L. Hakimi, On Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph. I, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 10, No. 3 (Sep., 1962), pp. 496-506.
- [6] Welsh, D. J. A. Powell, M. B., An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems, The Computer Journal T. 10 (1)(1967): pp. 85–86.
- [7] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.: pp. 77-81.