УДК 510.649

Афонін А.О., старший викладач

Про спрямовану парамодуляцію в методі елімінації моделей

Стаття присвячена дослідженням з вбудовування парамодуляційних правил у метод елімінації моделей та вхідну резолюцію. Даються результати про коректність та повноту побудованих розширень.

Ключові слова: резолюція, парамодуляція, метод елімінації моделей.

A.O. Afonin, senior lecturer

On directed paramodulation in model elimination method

The paper is devoted to the research on the building-in of paramodulation rules into the model elimination method and input resolution. The results about the soundness and completeness of the constructed extensions are given.

Key Words: resolution, paramodulation, model elimination method.

E-mail: andrew.afonin@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Метод елімінації моделей Лавленда [1,4,5] займає особливе місце в автоматичному пошуку суперечності на базі резолюційної техніці [7]. Це викликано, по-перше, повною відсутністю в ньому техніки поглинання і, по-друге, можливістю відказа від звичайного правила факторизації. У даному дослідженні показується, як можна вбудувати в метод елімінації моделей парамодуляційні правила, що враховують "напрям" їх дій, так, щоб при цьому були збережені ці привабливі для програмної реалізації властивості. Отримані результати дають змогу також побудувати парамодуляційні розширення вхідної резолюції. Відмітимо, що виклад даного матеріалу припускає знайомство з роботою [3], у зв'язку з чим він носить переважно ескізний характер.

Метод елімінації моделей

Розглядається класична логіка першого порядку з рівністю в її резолюційному трактуванні. При цьому вважаються відомими поняття терму, атомарної формули і формули.

Метод елімінації моделей має справу з впорядкованими диз'юнктами [2], які можуть містити так звані "обрамлені" літери.

Атомарна формула або її заперечення називається літерою.

Доповненням літери L називається результат приписування до L знака заперечення, якщо L є атомарна формула, і результат зняття з L знака заперечення, якщо ні. Якщо L - літера, то $\sim L$ позначає її доповнення. Рівність позначається символом "=".

Формула вигляду $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ називається диз'юнктом ($L_1, \ldots, L_n$ - літери), який ототожнюється з впорядкованою мульти-множиною [2,8]. Деякі з літер диз'юнкта можуть бути обрамленими. Обрамлена літера L позначається $\underline{L}$; Λ позначає пусту формулу.

Відмітимо, що представлення диз'юнкту у вигляді формули дозволяє розрізняти різні входження однієї і тієї ж літери в один і той же диз'юнкт. Також слід відзначити, що важливим є той факт, що диз'юнкт являє собою "лінійний" вираз при читанні його як формули зліва направо. , який задає лінійний порядок на входження літер в диз'юнкт.

Диз'юнкт, який є результатом перейменування в ньому деяких змінних називається варіантом.

Підстановка, уніфікатор і найбільш загальний уніфікатор (*н.з.у*) згадуються в змісті роботи [7]. Якщо σ є підстановка і Ex є вираз, то результат застосування σ до Ex позначається $Ex{*}\sigma$.

IS позначає далі множину так званих вхідних диз'юнктів.

Метод елімінації моделей має наступні правила виведення.

Правило модельної резолюції MR. Нехай диз'юнкти C_1 і C_2, які не мають загальних змінних, мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E \vee D'_2$, де L і E - літери, D_1, D_2 і D'_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), причому D_2 належить *IS*. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \sim E\}$. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом модельної резолюції *MR* може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee D'_2){*}\sigma$.

Правило внутрішній резолюції IR. Нехай диз'юнкт C має вигляд $D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee E$, де $\underline{L}$ і E - літери, причому $\underline{L}$ - сама крайня справа обрамлена літера і D_1 і D_2 - диз'юнкти (можливо, порожні). Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \sim E\}$. Тоді говориться, що із C за правилом унарної резолюції вправо IR може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee \underline{L} \vee D_2)*\sigma$.

Правило скорочення вліво LD. Нехай диз'юнкт C має вигляд $D_1 \vee E \vee D_2 \vee \underline{L}$, де D_1 і D_2 - диз'юнкти і $\underline{L}$ - обрамлена літера, а E - перша справа необрамлена літера. Тоді говориться, що із C за правилом скорочення LD може бути виведений диз'юнкт $D_1 \vee E$.

В цієї системи понять метод елімінації моделей має наступне формулювання.

Послідовність диз'юнктів $C_1, \ldots, C_n$ являється виведенням диз'юнкту C_n, який задовольняє *методу елімінації моделей* відносно диз'юнкту D із множини вхідних диз'юнктів IS, тоді и тильки тоді, коли C_1 є варіантом D, а кожен C_i із $C_2, \ldots, C_n$ є висновком одного із правил MR, IR і LD, однією із посилок якого є варіант диз'юнкту C_i. Також припускатимемо, що LD застосовується всякий раз, коли це можна зробити. (Звертаємо увагу на те, що в даному трактуванні методу елімінації моделей правило факторизації відсутнє.)

Теорема 1. Нехай D є диз'юнктом з множини вхідних диз'юнктів IS, таким, що множина $IS\backslash\{D\}$ є несуперечливою. IS являється суперечливою множиною тоді и тільки тоді, коли існує виведення пустої формули Λ відносно D, що задовольняє методу елімінації моделей.

Доведення (схема). Виходячи з властивостей н.з.у., очевидно, що досить розглянути випадок, коли диз'юнкти не містять змінних. Тому, для доведення коректності достатньо перевірити коректність правил в випадку доведення повноти.

Якщо ми розглянемо числення ***lT*** літеральних дерев із [3], то відповідно до властивостей цього числення, IS являється несумісною множиною тоді і тільки тоді, коли в численні ***lT*** існує виведення виродженого дерева Δ відносно D. Можна показати, що це виведення можна побудувати відповідно порядку "спочатку справа наліво і потім зверху вниз". Кожен крок цей побудови, при її "лінійної" проекції, буде відповідати одному з правил виведення MR, IR і LD. Маємо повноту метода. Q.E.D.

Приклад 1. Нехай $IS=\{L \vee L, \neg L \vee \neg L\}$. Наступний ланцюжок є виведенням в методі елімінації моделей:

1. $L \vee L$ ($\in IS$)
2. $\neg L \vee \neg L$ ($\in IS$)
3. $L \vee \underline{L} \vee \neg L$ (із (1) і (2), згідно MR)
4. $L \vee \underline{L}$ (із (3), згідно IR)
5. L (із (4), згідно LD)
6. $\underline{L} \vee \neg L$ (із (5) і (2), згідно MR)
7. $\underline{L}$ (із (6), згідно IR)
8. Λ (із (7), згідно LD)

Значить, IS є суперечлива множина диз'юнктів. Цей приклад також демонструє, що IR є необхідним правилом, і що у випадку відмови від правила факторизації неможливо уникнути використання тавтологій (тобто диз'юнктів, що містять як деяку літеру, так і її заперечення).

Відомо, що вхідна резолюція є неповним методом у загальному випадку й повним для множин хорнових диз'юнктів. Цей факт випливає з наведеного прикладу й твердження нижче, якщо під вхідною резолюцією розуміти МЕМ, у якому є присутнім тільки правило MR. Більше того, якщо розуміти лінійне спростування звичайним образом [2], то для одержання повних вхідних резолюційних методів у випадку хорнових диз'юнктів можна обмежитися лінійною вхідною резолюцією.

Наслідок 1. Множина вхідних хорнових диз'юнктів IS являється суперечливою множиною тоді й тільки тоді, коли існує таке виведення пустої формули Λ відносно деякого диз'юнкта з IS, яке задовольняє лінійної вхідної резолюції з правилом MR.

Доведення. IS обов'язково містить хоча б один такий диз'юнкт вигляду $\neg E_1 \vee \ldots \vee \neg E_m$, де $E_1, \ldots, E_m$ – атомарні формули, що $IS\backslash\{\neg E_1 \vee \ldots \vee \neg E_m\}$ є несуперечливою множиною. Відповідно до теореми 1 існує виведення пустого диз'юнкта Λ відносно $\neg E_1 \vee \ldots \vee \neg E_m$. Очевидно, що в цьому виведенні беруть участь тільки застосування правила MR. Отже, він є лінійним виведенням, що задовольняє умовам вхідної резолюції.Q.E.D.

Приклад 2. Якщо ми розглянемо суперечливу множину хорнових диз'юнктів $IS=\{L, \neg L \vee E, \neg E \vee \neg E$, де L и E- атомарні формули, то можна побудувати наступне виведення, що задовольняє лінійної вхідної резолюції:

1. L ($\in IS$)
2. $\neg L \vee E$ ($\in IS$)
3. $\neg E \vee \neg E$ ($\in IS$)
4. $\neg L \vee \neg E$ (із (3) і (2), згідно MR)
5. $\neg L \vee \neg L$ (із (4) і (2), згідно MR)
6. $\neg L$ (із (5) і (1) , згідно MR)
7. Λ (із (6) і (1), згідно IR)

Метод елімінації моделей з спрямованою парамодуляцією

Як і в [9], множина диз'юнктів S називається E-несуперечливою тоді і тільки тоді, коли є н несуперечливою множина $S \cup Eq$, де Eq - мінімальна множина, що задовольняє наступним властивостям: для всяких термів t, t' і t'', побудованих з констант і функціональних символів, що входять в диз'юнкти із S (якщо диз'юнкти із S не містять жодної константи, то спеціальна константа c_0 бере участь в побудові t, t' і t''), має місце: $t=t \in Eq$; якщо $t=t' \in Eq$, то t'=t $\in Eq$; якщо t=t'$\in Eq$ і t'=t''$\in Eq$, то t=t' t=t'$\in Eq$.

Також нагадаємо, що вираз виду $f(x_1 \ldots, x_k)= f(x_1 \ldots, x_k)$, де f - к-арний функціональний символ і $x_1 \ldots, x_k$ - змінні, називається аксіомою функціональної рефлексивності.

Для множини S, $AFR(S)$ позначає множину всіх аксіом функціональної рефлексивності для функціональних символів із S.

Метод елімінації моделей у формі, яка надана вище, допускає наступні спрямовані парамодуляційні правила, що базуються на звичайної парамодуляції [2,9].

Правило модельної парамодуляції MP_i (в вхідній диз'юнкт). Нехай диз'юнкти C_1 і C_2, які не мають загальних змінних і мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E \vee D'_2$, де L і E - літери, D_1, D_2 і D'_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), причому D_2 обов'язково належить IS та існує парамодуляція із L в E з парамодулянтом E' [2], і при цьому породжується н.з.у. σ. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом модельної парамодуляції MP_i може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee \underline{L} \vee D_2) * \sigma \vee E' \vee D'_2 * \sigma$.

Правило модельної парамодуляції MP_o (із вхідного диз'юнкта). Нехай диз'юнкти C_1 і C_2, які не мають загальних змінних і мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E \vee D'_2$, де L і E - літери, D_1, D_2 і D'_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), причому D_2 обов'язково належить IS та існує парамодуляція із E в L з парамодулянтом L', і при цьому породжується н.з.у. σ. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом модельної парамодуляції MP_o може бути виведений диз'юнкт $D_1 * \sigma \vee \underline{L'} \vee (D_2 \vee \vee D'_2) * \sigma$.

Правило модельної парамодуляції вліво MP_l. Нехай диз'юнкт C має вигляд $D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee E$, де $\underline{L}$ і E - літери, причому $\underline{L}$ - обрамлена літера, і D_1 і D_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), та існує парамодуляція із E в L з парамодулянтом L' і при цьому породжується н.з.у. σ. Тоді говориться, що із C за правилом модельної парамодуляції вліво MP_l може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee \underline{E}) * \sigma \vee L'$.

Правило модельної парамодуляції вправо MP_r. Нехай диз'юнкт C має вигляд $D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee E$, де $\underline{L}$ і E - літери, причому $\underline{L}$ - обрамлена літера, і D_1 і D_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), та існує парамодуляція із E в L з парамодулянтом E' і при цьому породжується н.з.у. σ. Тоді говориться, що із C за правилом модельної парамодуляції вправо MP_r може бути виведений диз'юнкт $(D_1 \vee \underline{L} \vee D_2 \vee \underline{E}) * \sigma \vee E'$.

Приведені правила, дозволяють задати два парамодуляційних розширення метода елімінації моделей. Має місто наступний результат.

Теорема 2. Нехай IS є множина вхідних диз'юнктів, і C є такій диз'юнкт з IS, що множина $IS \setminus \{C\}$ є E-несуперечливою. Множина IS є E-суперечливою тоді і тільки тоді, коли існує виведення пустої формули Λ з множини $IS \cup AFR(IS) \cup \{x=x\}$, і це виведення задовольняє парамодуляційному розширенню метода елімінації моделей, яке містить правила MP_i, MP_o і MP_r (MP_i, MP_o і MP_l).

Доведення (схема). Як і при доведенні теореми 1, досить розглянути випадок, коли діз'юнкти не містять змінних. Далі, для доведення повноти, можна скористатися численнями $\boldsymbol{lT_d}$ $\boldsymbol{lT_u}$ із [3] для побудови таких "проекцій" дерев виведення в $\boldsymbol{lT_d}$ і $\boldsymbol{lT_u}$, які можуть бути розглянуті як необхідні виведення в в парамодуляційних розширеннях з правилами MP_i, MP_o і MP_r та MP_i, MP_o і MP_l. Для доведення коректності достатньо перевірити коректність правил виведення. Q.E.D.

Приклад 3. Наступний ланцюжок є виведенням в методі елімінації моделей з парамодуляцією (IS містить диз'юнкти 1 - 6.):

1. $a=b$ ($\in IS$)
2. $R_1(h_1(z, z))$ ($\in IS$)
3. $R_2(h_2(u, u))$ ($\in IS$)
4. $g_1(f(a), f(b))=h_1(f(a),f(b))$ ($\in IS$)
5. $g_2(f(a),f(b))=h_2(f(a),f(b))$ ($\in IS$)
6. $\neg R_1(g_1(x, x)) \vee \neg R_2(g_2(y, y))$ ($\in IS$)
7. $f(v) = f(v)$ ($\in AFR(IS)$)

(a і b - константи; x, y, z і u - змінни, R_1 і R_2 - предикатні символи; f, g_1, g_2, h_1 і h_2 - функціональні символи)

8. $\neg R1(g1(x, x)) \vee \neg R2(g2(f(v), f(v))) \vee \neg R2(g2(f(v), f(v)))$ *(із (7) і (6),* згідно *MPo)*
9. $\neg R1(g_1(x, x)) \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \neg R_2(g_2(f(a), f(b)))$ (із (1) і (8), згідно MP_o)

10. $\neg R_1(g_1(x, x)) \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(b)))} \vee \neg R_2(h_2(f(a), f(b)))$ (із (5) і (9), згідно MP_o)
11. $\neg R_1(g_1(x, x)) \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_2(h_2(f(a), f(b)))} \vee \neg R_2(h_2(f(a), f(a)))$ (із (1) і (10), згідно MP_o)
12. $\neg R_1(g_1(x, x)) \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_2(g_2(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_2(h_2(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_2(h_2(f(a), f(a)))}$ (із (3) і (11), згідно MR)
13. $\neg R_1(g_1(x, x))$ (із (12), згідно LD)
14. $\underline{\neg R_1(g_1(f(v), f(v)))} \vee \neg R_1(g_1(f(v), f(v)))$ (із (7) і (13), згідно MP_o)
15. $\underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \neg R_1(g_1(f(a), f(b)))$ (із (1) і (14), згідно MP_o)
16. $\underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))}$ _ $\underline{\neg R1(g_1(f(a), f(b)))} \vee \neg R_1(h_1(f(a), f(b)))$ (із (4) і (15), згідно MP_o)
17. $\underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_1(h_1(f(a), f(b)))} \vee \neg R_1(h_1(f(a), f(a)))$ (із (1) і (16), згідно MP_o)
18. $\underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(a)))} \vee \underline{\neg R_1(g_1(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_1(h_1(f(a), f(b)))} \vee \underline{\neg R_1(h_1(f(a), f(a)))}$ (із (2) і (17), згідно MR)
19. Λ (із (18), згідно LD)

Значить, IS є E-суперечлива множина.

Цей приклад також демонструє необхідність використання в методі аксіом функціональної рефлективності.

Якщо розглянути випадок хорнових диз'юнктів з літерами рівності, наслідок 1 може бути трансформованим в наступне твердження, доведення якого повторює, у деякому смислі, доказ наслідку 1.

Наслідок 2. Множина вхідних хорнових диз'юнктів IS являється E-суперечливою множиною тоді и тільки тоді, коли існує виведення пустої формули Λ з множини $IS \cup AFR(IS) \cup \{x=x\}$ відносно некоторого дизъюнкта з IS , що задовольняє линейної вхідної резолюції з парамодуляційними правилами MP_i, MP_o і MP_r (MP_i, MP_o і MP_l).

Приклад вище може служити ілюстрацією до наслідку 2, тому що всі диз'юнкти з IS являются хорновимі, а наведенє виведення є лінійним і вхідним.

Висновок

Проведене дослідження демонструє, що метод елімінації моделей (МЕМ) допускає такі парамодуляційні розширення, які зберігають всі його позитивні риси. Це робить метод привабливим для його реалізації в різних інтелектуальних системах з дедуктивнимі можливостями. Іншим достоїнством МЕМ є те, що перехід від МЕМ до вхідної резолюції здійснюється просто видаленням з МЕМ двох правил висновку. Сама ж вхідна резолюція в різних її модифікаціях є одним з методів, широко використовуємим в системах логічного програмування.

Список використаних джерел

1. *Loveland D.W.* Automated theorem proving: a logical basis / D.W. Loveland.– Netherlands: North-Holland, 1978.– 273 p.
2. *Chang C. and Lee R.* Symbolic logic and mechanical theorem proving / C. Chang C. and R. Lee.– Orlando, FL, USA: Academic Press, 1997. – 331 p.
3. *Афонин А.А.* О древовидной форме поиска опровержения в интеллектуальных системах с логическими возможностями / А.А. Афонин // Математичні машини і системи. – 2010. – № 2. – С. 87-95.
4. *Loveland D.V.* Mechanical theorem proving by model elimination / D.V. Loveland // Journal of the ACM.–1968.–v.15.,№ 2.–P. 236-251.
5. *Loveland D. W.* A simplified format for the model elimination theorem-proving procedure / D.V. Loveland // Journal of the ACM.–1969.–v.16,№ 3.–P.349-363.
6. *Stickel M.E.* Automated deduction by Theory Resolution / M.E. Stickel // Journal of Automated Reasoning.– v.1, №4.–1985.–P. 333-355.
7. *Robinson J. A.* A machine-oriented logic based on resolution principle / J. A Robinson // Journal of the ACM.–v.12.–1965.–P. 23-41.
8. *Bachmair L., Ganzinger H.* Resolution theorem proving / L.Bachmair H.Ganzinger // Handbook of Automated Reasoning.– Elsevier Science Pub. – 2001.– P. 19 - 99.
9. *Neiuwenhuis R.,Rubio A.* Paramodulation-based theorem-proving / R.Neiuwenhuis, A.Rubio // Handbook of Automated Reasoning.–Elsevier Science Pub.–2001.– P.371 – 444.

Надійшла до редколегії 29.03.10