

ЧАРІВНИЙ СВІТ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ¹

Пропонується огляд проблем, пов'язаних із оборотними поліноміальними відображеннями.

Ключові слова : афінна група Кремони, поліноміальне перетворення, ручні та дикі перетворення, локально-нільпотентні диференціювання, нескінченновимірні алгебраїчні групи, нескінченновимірні алгебри Лі.

Перетворення F — афінного алгебраїчного многовиду X називається бірегулярним або поліноміальним оборотним, якщо F є регулярним і існує регулярний морфізм $G: X \rightarrow X$ такий, що $F \circ G = G \circ F = Id$ — тотожне перетворення. Якщо

$$X = A_n(\mathbb{F}) = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{F}\}$$

афінний простір над полем $\mathbb{F}$, то F можна ототожнити з набором поліномів $[F]_i = f_i$:

$$F = \langle f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle. \quad (1)$$

Інколи ми будемо вживати іншу форму:

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \vec{e}_i, \quad (2)$$

де $\vec{e}_i$ — вектор, i -та координата якого дорівнює $1 \in \mathbb{F}$, а решта нулю. Бірегулярні перетворення афінного простору часом називають афінними перетвореннями Кремони, а якщо F, G — раціональні, то F називають біраціональним перетворенням Кремони. Умови оборотності $\exists G: F(G) = Id$ мають наслідком умову якобіана:

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \text{const} \neq 0. \quad (3)$$

Питання про те, чи впливає з умови якобіана поліноміальна оборотність F , складає зміст відомої гіпотези якобіана, яка не розв'язана досі навіть у розмірності 2. У роботі [1] запропонована редукція цієї проблеми до кубічних поліноміальних відображень, що задовольняють умову якобіана, в просторах довільної розмірності.

Будь-яке бірегулярне перетворення F афінного простору визначає автоморфізм алгебри поліномів $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, який визначається таким чином $x_i \rightarrow f_i$, при цьому $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \mathbb{F}[f_1, f_2, \dots, f_n]$. Найпростішими прикладами бірегулярних перетворень є лінійні: $f_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + c_i$, де $\det(\alpha_{i,j}) \neq 0$. Такі перетворення утворюють групу, яку називають афінною групою — напіпрямий добуток загальної лінійної групи $GL_n(\mathbb{F})$ на

групу трансляцій афінного простору. В розмірності 1 всі афінні перетворення Кремони є лінійними і мають вигляд $x_1 \rightarrow \alpha x_1 + c$. Це впливає з порівняння степенів поліномів у лівій та правій частині тотожності $F(G(x)) = x$. Звернемо увагу на те, що регулярне відображення $x \rightarrow x^3$ не є бірегулярним. Нелінійні афінні перетворення з'являються вже в розмірності 2, наприклад $\langle x_1, x_2 + x_1^2 \rangle$, яке є прикладом елементарного бірегулярного перетворення. Елементарні перетворення є найпростішими прикладами нелінійних бірегулярних автоморфізмів афінного простору. Отже, при $n > 1$ група GA_n бірегулярних перетворень афінного простору, яку часом називають афінною групою Кремони, містить афінну підгрупу AGL_n як власну підгрупу.

Означення 1. Перетворення афінного простору виду

$$Id + a(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \vec{e}_i$$

називається елементарним.

Неважко переконатися, що унітрикутні перетворення виду

$$t = x + \sum_{i=1}^n h_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \vec{e}_i \quad (4)$$

мають обернені для будь-яких поліномів a_i . Для їх обчислення можна скористатися індуктивними формулами

$$\begin{aligned} [t]_1 &= x_1 - h_1, \\ [t]_i &= x_i - h_i^{t^{-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

$i = 2, \dots, n$. Оскільки поліном a_i не залежить від змінних з номером більшим за $i - 1$, то дія на нього унітрикутного перетворення t^{-1} визначається тільки першими $i - 1$ координатами цього перетворення. Отже, ця формула дійсно індуктивна.

Легко переконатися, що такі перетворення утворюють підгрупу U_n унітрикутних перетворень

¹Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Ф 25./157-2008 № ДР 0107U010499.

афінного простору A_n , яку природно розглядати як ітерований алгебраїчний вінцевий степінь адитивної групи $\mathbb{F}^+$. Неважко помітити, що будь-який елемент U_n є композицією елементарних унітрикутних перетворень $x + h_i(x_1, \dots, x_{i-1})\vec{e}_i$. З іншого боку, будь-яке елементарне перетворення спряжене до унітрикутного $x + a(x_1, \dots, x_{n-1})\vec{e}_n$ за допомогою транспозиції (x_i, x_n) . Легко отримати, що трикутні перетворення, для яких $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i)$ мають вигляд:

$$t = \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i + h_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}))\vec{e}_i, \quad (6)$$

де $\alpha_i \in \mathbb{F}^*$.

Означення 2. Перетворення $q \in GA_n$ називається **ручним**, якщо його можна подати як ітеровану композицію елементарних та лінійних перетворень.

Ручні перетворення утворюють підгрупу $TGA_n \subseteq GA_n$ і складають найбільш простий клас нелінійних оборотних поліноміальних перетворень. Для вільної асоціативної алгебри $\mathbb{F} \langle x \rangle$, тобто алгебри некомутативних поліномів, поняття ручного та дикого автоморфізму вводиться аналогічним чином. При цьому довільний автоморфізм $\mathbb{F} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ індукує автоморфізм $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, а довільний ручний автоморфізм $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ можна підняти до автоморфізму $\mathbb{F} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

В розмірності $n = 2$ добре відома

Теорема 1 ([2]). $GA_2 = AGL_2 * B_2$, де $*$ — означає амальгамований добуток, а група трикутних афінних перетворень є перетином співмножників.

Як наслідок, отримуємо $TGA_2 = GA_2$. Питання про те, чи існують дикі автоморфізми у вищих розмірностях, залишалось відкритим до останнього часу, доки І. Шестаков та У. Умірбаєв не довели гіпотезу Нагати (див. [3]), яка стверджувала, що автоморфізм

$$\begin{aligned} < x_1 - 2x_2(x_2^2 + x_3x_1) - x_3(x_2^2 + x_3x_1)^2, \\ x_2 + x_3(x_2^2 + x_3x_1), x_3 > \end{aligned} \quad (7)$$

афінного простору не є ручним.

У той же час залишається актуальним питання поставлене в роботі [8] — чи піднімається автоморфізм Нагати до автоморфізму вільної асоціативної алгебри $\mathbb{F} \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$? Як відмічено в роботі [4], поліном $x_2^2 + x_3x_1$ є інваріантним при дії автоморфізму Нагати і вказаний автоморфізм може розглядатись як лінійне відображення з коефіцієнтами в кільці поліномів $\mathbb{F}[x_1x_3 + x_2^2]$. У вказаній роботі таку властивість називають квазілінійністю.

Як показано в роботі [5], природне продовження автоморфізму Нагати до автоморфізму афінного простору більшої розмірності призводить до ручного автоморфізму. Автоморфізми з такою властивістю називають стабільно ручними.

Існує гіпотеза про те, що всі бірегулярні автоморфізми є стабільно ручними.

Одночасно виникає природне питання про проміжні підгрупи $AGL_n \leq ? \leq TGA_n$. Розглянемо найпростіші елементарні нелінійні перетворення афінного простору:

$$\tau_n^{(m)} = x + x_1^{m+1}\vec{e}_n, m = 1, 2, \dots$$

і покладемо

$$Q_n^m = \langle AGL_n, \tau_n^m \rangle.$$

Зокрема, можна запитати: чи має місце рівність $TGA_n = Q_n^m$ для якого-небудь m ? В розмірності 2 такого m не існує, про що свідчить

Лема 1. В розмірності $n = 2$ підгрупи Q_2^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ утворюють строго зростаючий ланцюг підгруп

$$AGL_2 = Q_2^0 \subset Q_2^1 \subset Q_2^2 \subset \dots \subset Q_2^m \subset \dots,$$

причому $\cup_{m=0}^{+\infty} Q_2^m = GA_2$.

Доведення. Скориставшись комутаторами трансляцій $\langle x_1 + 1, x_2 \rangle \in B_2 \cap AGL_2$, з елементів $\tau_2^{(m)}$, можна отримати всі трикутні елементи степеня меншого m . З іншого боку, трикутні елементи більшого степеня отримати неможливо, бо це б суперечило однозначності розкладу елемента в амальгамованому добутку. Зокрема, трикутний елемент має амальгамовану довжину 1 і його представлення як композиції іншого трикутного та афінних перетворень, можливе лише коли ці афінні перетворення є лінійно-трикутними. Але множення на ці елементи також призводять до трикутних елементів і не підвищують степінь елемента. Отже, елемент $\tau_2^{(m+1)}$ неможливо представити як композицію трикутних елементів меншого степеня та лінійних перетворень. Легко помітити, що всі трикутні елементи будуть належати об'єднанню підгруп Q_2^{m+1} , звідки і випливає, що воно збігається з GA_2 .

У розмірностях вищих за 2, ситуація значно складніша. Добре відомо, що вже група GA_3 не розкладається в амальгамований добуток вказаного типу. Зокрема, легко отримати рівність:

$$\begin{aligned} &(\tau_3^{(1)})^{(1,2)} \cdot (\tau_3^{(1)})^{(2,3)} = \\ &= \langle x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + (x_2 + x_1^2)^2 \rangle, \end{aligned}$$

тут (i, j) означає перетворення що переставляє відповідні змінні. Ця рівність означає, що за допомогою лінійних перетворень (у даному випадку перестановок) можна з трикутних перетворень отримувати трикутні перетворення вищого степеня. Крім того, як відмічено в [6], наявність прикладу Баса нетриангульованої $\mathbb{F}^+$ дії має наслідком неможливість розкладу GA_3 в амальгамований добуток AGL_3 з якою-небудь підгрупою B_3 . Більше того має місце

Теорема 2 ([10]). При $n \geq 3$ для будь-якого $t \in U_n \setminus AGL_n$ має місце

$$TGA_n = \langle AGL_n, t \rangle.$$

Після цієї теореми природно поставити запитання: чи не буде AGL_n при $n \geq 3$ максимальною підгрупою у групі ручних перетворень? На цьому шляху вводяться певні класи поліноміальних перетворень q , для яких має місце $\langle AGL_n, q \rangle = TGA_n$.

Означення 3. Перетворення $q \in TGA_n$ назовемо k -трикутним, якщо його можна подати у вигляді

$$q = C_0 \cdot t_1 \cdot C_1 \cdot t_2 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_{k-1} \cdot t_k \cdot C_k,$$

де $C_i \in AGL_n, t_i \in B_n$ і більш короткий запис цього елемента у вказаному вигляді є неможливим (тобто він не є $k-1$ -трикутним). При цьому число k будемо називати композиційно-трикутною довжиною.

Отже, елементи AGL_n та B_n мають композиційно-трикутну довжину 0 та 1 відповідно. Елементи, що мають композиційно-трикутну довжину рівну 2 будемо називати бітрикутними.

Теорема 3 ([11]). Нехай q довільне бітрикутне перетворення афінного простору, тоді:

$$TGA_n = \langle q, AGL_n \rangle,$$

для всіх $n \geq 3$.

Основна ідея доведення полягає в тому, що комутатор бітрикутного перетворення з відповідною трансляцією дає трикутний елемент і, якщо він виявився нелінійним, то можна застосувати теорему 2. Розбір випадків, коли цей комутатор є лінійним і застосування теореми 2 суттєво ускладнює доведення. Для доведення аналогічної теореми для 3-трикутних перетворень виду $q = t_1^{A_1} \cdot t_2^{A_2} \cdot t_3^{A_3} \in G$ можна також скористатися описаним прийомом. Трансляцію $c \in A_n^+$ завжди можна вибрати такою, щоби вона комутувала з $t_1^{A_1}$ і тоді відповідний комутатор буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} [c, q] &= q^{-c} \cdot q = \\ &= \left(t_3^{-A_3} \cdot t_2^{-A_2} \cdot t_1^{-A_1} \right)^c t_1^{A_1} \cdot t_2^{A_2} \cdot t_3^{A_3} = \\ &= t_3^{-A_3 \cdot c} \cdot \left(t_2^{-c'} t_2 \right)^{A_2} \cdot t_3^{A_3}, \end{aligned}$$

($c' = A_2 \cdot c \cdot A_2^{-1} \in A_n^+$), а отже має трикутну довжину не більше трьох, при цьому висота проміжного трикутного елемента в дужках знизилася порівняно з t_2 в елементі q . Продовжуючи цю процедуру, можна отримати елемент такого виду, у якого проміжний елемент буде лінійним, а сам елемент буде бітрикутним, і в такий спосіб звести доведення до попередньої теореми. «Більшість» 3-трикутних елементів підпадають під цю схему, але знову існують особливі випадки, коли $[c, q] \in AGL_n$, і вони вимагають особливих підходів. Повний огляд усіх цих випадків вдалося зробити тільки в розмірності 3.

Теорема 4. Нехай $q \in GA_3$ довільний 3-трикутний елемент GA_3 тоді

$$TGA_3 = \langle AGL_3, q \rangle.$$

Неважко переконатися, що елементи виду

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} f_j(x_1, x_2, \dots, x_{m_i}) \vec{e}_j \quad (8)$$

утворюють підгрупу, яка буде позначатися $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Всі такі групи містять підгрупу трикутних перетворень $P(1, 1, \dots, 1) = B_n$ і лежать в підгрупі $P(n-1, 1)$, елементи якої мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i \vec{e}_i + (\alpha x_n + h(x_1, \dots, x_{n-1})) \vec{e}_n. \quad (9)$$

Надалі перетворення такого типу будуть називатися 1-параболічного типу (за кількістю координат, що залежать від усіх змінних).

Теорема 5. Нехай $p \in P(n-1, 1)$ — нелінійний параболічний елемент виду (9), тоді

$$TGA_n = \langle AGL_n, p \rangle$$

Доведення. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\alpha = 1$ для елемента p . Легко порахувати комутатор елемента p з трансвекцією $A_{ni} = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + x_i \rangle$.

$t_1 = [p, A_{ni}] = x + (f_i(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_i) \vec{e}_n \in B_n$, який є трикутним перетворенням. Для того, щоб цей елемент був нелінійним, треба обрати таке значення i , щоб $f_i(x_1, \dots, x_{n-1})$ був нелінійним поліномом. Якщо такого значення не існує,

то $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ є нелінійним і p є нелінійним трикутним перетворенням. В обох випадках твердження впливає з попередньої теореми. Перетворення виду $q = Ap_1Bp_2$, де $A, B \in AGL_n$, а $p_1, p_2 \in P(n-1, 1)$ будемо називати біпараболічним.

Теорема 6 ([11]). Нехай q довільне нелінійне біпараболічне перетворення афінного простору, тоді:

$$TGA_n = \langle q, AGL_n \rangle,$$

для всіх $n \geq 3$.

Доведення цієї теореми також проводиться шляхом обчислення комутаторів з трансляціями та трансекціями й зведенням до попередніх теорем і також вимагає окремого розбору випадків, коли цей комутатор виявляється лінійним.

Застосування в криптографії

Композиційні властивості поліноміальних перетворень знайшли своє застосування в криптографії. Афінні шифри використовують афінні перетворення блоків відкритих текстів, що ототожнюються з векторами, координати яких або належать кільцю лишків, або належать скінченному полю. Їх властивості описані в більшості підручників з криптографії. Використання оборотних поліноміальних перетворень для створення криптографічних протоколів розпочалося з роботи [12] і отримало назву ТТМ (tame transformation method). Спочатку використовували перетворення 1-трикутні, які мали вигляд: $q = AtB$, $t \in U_n$, $A, B \in AGL_n$. Супротивник знає вигляд поліномів $[q]_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, але не знає факторизації цього елемента, зокрема лінійних перетворень A, B , що, як здавалося, не дає можливості знайти обернений за розумний час. Швидко з'ясувалося, що таку криптосистему легко зламати. Дійсно, якщо $\max_i \deg[q]_i = N$, то матриця складена з коефіцієнтів старших форм степеня N має ранг менший за n . Цю властивість має як невідоме перетворення t (у якого принаймні один рядок цієї матриці є нульовим) так і відоме q . Елементарні перетворення рядків, при яких будемо отримувати нульовий рядок, дадуть нам лінійну комбінацію $y_k = \sum_i \alpha_i x_i$, вздовж якої відбувається трансляція. Далі можна перейти до перетворення q' , яке залишає нерухомою змінну y_k , зафіксувати її і продовжити вказаний процес для перетворення q' , що діє в просторі меншої розмірності. На цьому шляху ми отримаємо подання елемента q у вигляді $q = Ct'$, $C \in AGL_n$, $t' \in U_n$, де i C і t' будуть уже відомі, а отже за допомогою формул (5) ми легко знайдемо обернений до t' , а оскільки матриця C буде отримана як добуток елементарних, то і C^{-1} буде відома. Тому для ТТМ стали використовувати бітрикутні перетворення, див [13].

Поліноміальні диференціювання

Локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів є джерелом нетривіальних автоморфізмів алгебри поліномів. Зокрема, згаданий вище автоморфізм Нагати є експонентою відповідного локально нільпотентного диференціювання. Більше того, існує гіпотеза, що всі автоморфізми алгебри поліномів, які утворюють афінну групу Кремони, є ітерованими композиціями афінних (лінійних) та експонент локально нільпотентних диференціювань цієї алгебри. Характеризація та побудова критерію локальної нільпотентності поліноміальних диференціювань є відомими дуже складними проблемами. Для поліномів від двох змінних теорема Ронтшлера, наведена нижче, дає в цьому випадку певну характеризацію. Існує також оцінка степеня нільпотентності локально нільпотентного диференціювання алгебри поліномів від двох змінних, яка дає такий критерій. Центральне місце тут займає проблема ядра диференціювання, яке є підалгеброю алгебри поліномів від n змінних і може бути нескінченно породженою, а отже є джерелом контрприкладів до 14-ї проблеми Гільберта, яка наведена в [14]. З іншого боку, добре відомо, що нескінченновимірні алгебри Лі Картанівського типу, див. [15], реалізуються як алгебри поліноміальних диференціювань. Ці алгебри допускають кореневий розклад відносно стандартного тору.

Нехай $A = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — поліноміальна алгебра над полем нульової характеристики $\mathbb{F}$. Поліноміальні диференціювання алгебри A мають форму лінійних диференціальних операторів:

$$D = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (10)$$

Означення 4. Диференціювання (10) називається локально нільпотентним, якщо для довільного поліному $f \in A$ існує натуральне число $m = m(f)$, для якого $D^m(f) = 0$.

Прикладами локально нільпотентних диференціювань є елементарні диференціювання:

$$a(x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (11)$$

а також трикутні диференціювання, які мають вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (12)$$

$a_n \in \mathbb{F}$. Одним із способів побудови нетривіальних локально нільпотентних диференціювань є множення елементарного або трикутного диференціювання на певний елемент його ядра. Таке диференціювання має вигляд $\phi \cdot D$, де D має вигляд (11) або

(12), а $u \in \text{Ker } D$. Прикладом, отриманим у такий спосіб, є таке диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних:

$$(x_3x_1 + x_2^2) \left(-2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (13)$$

експонента якого є як раз автоморфізмом Нагати (7). Іншим прикладом такого типу є диференціювання

$$(x_3x_1 + x_2x_4) \left(-x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (14)$$

експонента якого — автоморфізм Аніка, є кандидатом до класу диких автоморфізмів алгебри поліномів від чотирьох змінних.

Наведемо формулювання вищезгаданої теореми Ронтишлера.

Теорема 7 (Rentsler, [16]). Якщо D — локально нільпотентне диференціювання алгебри поліномів $\mathbb{F}[x_1, x_2]$, то існують поліноми $P, Q \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$ такі, що:

1. $\text{Ker } D = \mathbb{F}[P]$;
2. $\mathbb{F}[P, Q] = \mathbb{F}[x_1, x_2]$;
3. існує поліном $\alpha = \alpha(t)$ такий, що для довільного $h \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$:

$$D(h) = \alpha(P) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Наступна теорема дає алгоритм перевірки того, чи є диференціювання алгебри поліномів від двох змінних локально нільпотентним.

Теорема 8 ([17]). Диференціювання

$$D = a_1(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $D^{d^*+2}(x_i) = 0, i = 1, 2$, де

$$d^* = \max_{i,j} \deg_{x_i} a_j(x_1, x_2).$$

Розглянемо тепер нескінченновимірний векторний простір усіх поліноміальних диференціювань. Він має природний базис, що складається з мономіальних диференціювань:

$$e^i(k) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Вектор $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ будемо називати мультистепенем (mdeg) монома $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, а мультиступінь мономіального диференціювання визначимо таким чином $\text{mdeg}(e^i(k)) = k - 1_i$, де 1_i означає вектор, i -та координата якого дорівнює 1, а всі інші нульові.

Означення 5. Диференціювання називається моногенним, якщо всі мономіальні диференціювання, що входять в його розклад, мають однаковий мультиступінь.

Очевидно, що моногенні диференціювання, які не є елементарними, мають форму

$$D_k = x^k \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{F},$$

а їх дія, як і дія мономіальних диференціювань (16), на довільний моном x^m дає або моном мультистепеня

$$\text{mdeg}(D_k(x^m)) = k + m, \quad (17)$$

або нуль, внаслідок рівності нулю коефіцієнта $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i$, зокрема для мономіальних диференціювань (16), це можливо лише коли $m_i = 0$. Для довільної скінченної сукупності K мультистепенів мономіальних диференціювань — векторів з цілими коефіцієнтами, у яких може бути не більше однієї від'ємної координати і вона має дорівнювати -1 , розглянемо ітеровану композицію L диференціювань виду $e^i(k)$ або виду D_k , $k \in K$, взятих у довільному порядку, де диференціювання мультистепеня k застосовується s_k разів. Незалежно від порядку застосування будемо мати

$$\text{mdeg}(L(x^m)) = \sum_{k \in K} s_k k + m, \quad (18)$$

зокрема, якщо вектор у правій частині рівності містить від'ємну координату, то $L(x^m) = 0$. Формули (17), (18) будемо називати адитивним законом для мультистепенів.

Структура алгебри Лі на просторі поліноміальних диференціювань визначається стандартним чином:

$$[D_1, D_2] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k^1 \frac{\partial a_j^2}{\partial x_k} - a_k^2 \frac{\partial a_j^1}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (19)$$

де a_k^1, a_k^2 коефіцієнти D_1, D_2 в зображенні (10). Диференціювання (10), що задовольняють умову:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \text{const}, \quad (20)$$

утворюють підалгебру ga_n , а ті, для яких $\text{const} = 0$, утворюють ідеал sa_n в ga_n . Ці алгебри мають природне градування, m -однорідні компоненти якого складаються з диференціювань (10), коефіцієнти якого є однорідними формами степеня $m + 1$.

Приймаючи до уваги умову (20), де $const = 0$, побудуємо мономіальний базис алгебри sa_n :

$$\varepsilon^i(k) = e^i(k) - \frac{k_i}{k_n + 1} e^n(k - 1_i + 1_n), \quad (21)$$

(якщо $k_i = 0$, то $\varepsilon^i(k) = e^i(k)$). До цих елементів базису слід додати ще елементарні мономіальні диференціювання:

$$\xi(t) = e^n(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (22)$$

Звернемо увагу на те, що для даного мультистепеня k лінійні комбінації

$$D_k = \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \varepsilon^r(k + 1_r) \quad (23)$$

є моногенними диференціюваннями мультистепеня k , зокрема для них має місце формула (17), а коефіцієнти при мономах отримуються прямими обчисленнями. Підалгебра Лі стандартного алгебраїчного тору $\tau_{n-1} = Lie(T_{n-1})$ складається з диференціювань $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, де $\alpha_i \in \mathbb{F}$: $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Елементи

$$\varepsilon^i(1_i) = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

утворюють базис цієї алгебри. Опис кореневого розкладу ga_n та sa_n з використанням цього базису було отримано в [18], [19].

Теорема 9. *Має місце кореневий розклад:*

$$sa_n = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^{n-1}} W_\lambda,$$

причому, всі кореневі підпростори W_λ є ненульовими, бо породжуються диференціюваннями:

$$\varepsilon^r(k + 1_r), \text{ де } k_n - k_i = \lambda_i, r = 1, 2, \dots, n-1,$$

і можливо ще одним елементарним диференціюванням, що має одну з форм: або $\varepsilon^p(l)$, де $l_p = 0, l_i = \lambda_p - \lambda_i - 1, i < n, i \neq p, l_n = \lambda_p - 1$, або $\xi(t)$ де $t_i = -(\lambda_i + 1), i = 1, \dots, n-1$.

Зазначимо, що якщо $\Delta(a) = (a, a, \dots, a), a \in \mathbb{Z}$ і $\varepsilon^r(k + 1_r) \in W_\lambda$, то для довільного a :

$$\varepsilon^r(k + \Delta(a) + 1_r) \in W_\lambda,$$

і відтак W_λ є нескінченновимірним векторним простором. Зауважимо також, що диференціювання виду (23) є кореневими.

Кореневі локально нільпотентні диференціювання

Легко помітити, що елементарні диференціювання є кореневими тоді і тільки тоді, коли вони є мономіальними, тобто пропорційними:

$$x_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (24)$$

зауважимо, що вони є базисними елементами видів $\varepsilon^i(k), k_i = 0, \xi(t)$. Наступна теорема дає відповідь на запитання, поставлене В.Л. Поповим у роботі [20].

Теорема 10. *Усі кореневі локально нільпотентні диференціювання з sa_n є елементарними.*

Згідно теореми 9, кореневе диференціювання має вигляд

$$D = D_k + \dots + \beta \varepsilon^p(l) + \gamma \xi(t),$$

де $\dots$ позначені доданки вигляду $D_{k-\Delta(a)}, a \in \mathbb{N}$. З адитивного закону для мультистепенів одразу випливає, що D може бути локально нільпотентним лише якщо таким є D_k . Те, що диференціювання (23) не можуть бути локально нільпотентними, можна вивести і з теорії слайсів (див. [17]), одним з наслідків якої є:

Лема 2. *Якщо існує поліном $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, такий, що для даного локально нільпотентного диференціювання D елемент $D(f)$ ділиться на f , то $D(f) = 0$.*

Звідси випливає, що D_k не може бути локально нільпотентним ні для якого k , адже якщо $\alpha_j \neq 0$, то $D_k(x_j) = \alpha_j x^{k+1_j}$ ділиться на x_j .

З теореми 10 отримуємо наслідки для диференціювань, що є сумами декількох корневих.

Наслідок 1. *Довільне двокореневе локально нільпотентне диференціювання D після відповідної перестановки координат є трикутним і має одну з форм:*

$$(\alpha_1 x^k + \alpha_2 x^l) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad k_1 = l_1 = 0; \quad (25)$$

$$\alpha_1 x^k \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 x^l \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad k_1 = l_1 = l_2 = 0. \quad (26)$$

Наслідок 2. *Трикореневе локально нільпотентне диференціювання D може містити не більше одного моногенного не елементарного кореневого диференціювання D_k виду (23), в цьому випадку воно повинно мати вигляд:*

$$D = D_k + D_u + D_v, \quad (27)$$

де D_u, D_v є елементарними локально нільпотентними, причому мультистепені мають бути зв'язані лінійним зв'язком з натуральними коефіцієнтами:

$$a \cdot mdeg(D_k) = b \cdot mdeg(D_u) + (a - b) \cdot mdeg(D_v), \quad (28)$$

$$a, b \in \mathbb{N}, a > b.$$

Перейдемо до опису локально нільпотентних диференціювань алгебри поліномів від трьох змінних виду (27). Будемо вважати, що елементарні диференціювання мають вигляд:

$$D_u = \beta x_2^{u_2} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_v = \gamma x_1^{v_1} x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{F}, \quad (29)$$

адже можна зробити перейменування змінних. Тоді, згідно з формулами (21), (23), при $n = 3$ отримуємо:

$$\begin{aligned} D(x_3) &= D_k(x_3) = \\ &= \alpha_1 \varepsilon^1 (k + 1_1)(x_3) + \alpha_1 \varepsilon^2 (k + 1_2)(x_3) = \\ &= -\frac{\alpha_1(k_1 + 1) + \alpha_2(k_2 + 1)}{k_3 + 1} x_3^{k+1_3}. \end{aligned}$$

Оскільки $D(x_3)$ ділиться на x_3 , то за лемою 2 маємо $-\alpha_1(k_1 + 1) + \alpha_2(k_2 + 1) = 0$. Отже, з точністю до сталого множника, можна вважати, що

$$\begin{aligned} D_k &= (k_2 + 1)x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - \\ &- (k_1 + 1)x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Оскільки x_3 належить ядру диференціювання $D_k + D_u + D_v$, то воно буде локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли таким буде диференціювання алгебри поліномів від двох змінних $\bar{D} = D_k + D_u + D_v$:

$$\begin{aligned} \bar{D}_k &= (k_2 + 1)x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_1 + 1)x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2}; \\ \bar{D}_u &= x_2^{u_2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \bar{D}_v = x_1^{v_1} \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Для характеристики локально нільпотентних диференціювань такого виду скористаємося теоремою 7. Якщо покласти $h = x_1$, а потім $h = x_2$ у формулі (15), то отримаємо:

$$\bar{D}(x_1) = -\alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_2}; \quad \bar{D}(x_2) = \alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Нехай $u(t)$ — первісна до функції $\alpha(t)$, тоді отримуємо

$$\bar{D}(x_1) = -\frac{\partial u(P)}{\partial x_2}; \quad \bar{D}(x_2) = \frac{\partial u(P)}{\partial x_1}.$$

Якщо $\bar{D}$ є локально нільпотентним, то для нього має існувати вказане зображення, а отже мають існувати функція $u(t)$ та координатний поліном $P = P(x_1, x_2)$ такі, що виконуються рівності

$$-\frac{\partial u(P)}{\partial x_2} = (k_2 + 1)x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} + \beta x_2^{u_2};$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x_1} = -(k_1 + 1)x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} + \gamma x_1^{v_1}.$$

Легко побачити, що з точністю до константи, єдиним розв'язком системи є функція:

$$\begin{aligned} u(P) &= \psi(x_1, x_2) = \\ &= -x_1^{k_1+1} x_2^{k_2+1} + \frac{\gamma}{v_1 + 1} x_1^{v_1+1} - \frac{\beta}{u_2 + 1} x_2^{u_2+1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поліном $u(P)$ може бути сумою трьох мономів лише за таких умов:

1. P є мономом, а $u(t)$ є сумою трьох мономів ненульового степеня;
2. P є сумою двох мономів, а $u(t) = At^2$;
3. P є сумою трьох мономів, а $u(t) = At$,

де $A \in \mathbb{F}$.

У першому випадку, кожен моном $u(P)$ має ділитися на моном P , що, очевидно, не виконується в правій частині (31). У третьому випадку, з точністю до сталого множника, P повинно мати вигляд правої частини (31). Згідно з формулою (28), $ak_1 = -b + (a - b)u_2$, $ak_2 = bv_1 - (a - b)$, а отже $u_2, v_1 > 0$. Тоді точка $(0, 0)$ є спільним нулем частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}$, а отже P не може бути координатним.

У другому випадку для того, щоб виконувалось (31), поліном P повинен мати вигляд $P = p_1 x_1^{m_1} + p_2 x_2^{m_2}$, звідки $2m_1 = v_1 + 1, 2m_2 = u_2 + 1, m_1 = k_1 + 1, m_2 = k_2 + 1$. Отже, співвідношення (28) набуває вигляду:

$$2k_1 = -1 + v_1, \quad 2k_2 = u_2 - 1. \quad (32)$$

Крім того, щоб вказані частинні похідні не оберталися одночасно в нуль, очевидно, що або m_1 або m_2 мають дорівнювати 1. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $m_1 = 1$, тоді $k_1 = 0$, а поліном $P = x_1 + x_2^{m_2}$ є, очевидно, координатним. При цьому із співвідношення (32) отримуємо $v_1 = 1, u_2 = 2k_2 + 1$ і ми приходимо до диференціювання $\bar{D}$, що є сумою трьох кореневих:

$$\bar{D}_k = (k_2 + 1)x_1 x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^{k_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\bar{D}_u = \beta x_2^{2k_2+1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \bar{D}_v = \gamma x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Лема 3. Диференціювання $\bar{D} = \bar{D}_k + \bar{D}_u + \bar{D}_v$ є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $\beta\gamma = -(k_2 + 1)$.

Доведення. Застосуємо лему 8. Для диференціювання $\bar{D}$ маємо $d^* = 2k_2 + 1$. Оскільки

$$\bar{D}^2(x_2) = (k_2 + 1 + \gamma\beta)x_2^{2k_2+1},$$

то згідно цієї леми, якщо $\bar{D}$ локально нільпотентне, то $\bar{D}^{d^*}(x_2^{2k_2+1}) = 0$. Якщо $\bar{D}^2(x_2) \neq 0$, то поліном $(\bar{D}_k + \bar{D}_u + \bar{D}_v)^{2k_2+1}(x_2^{2k_2+1})$ буде містити мономи

$$\bar{D}_v^{2k_2+1}(x_2^{2k_2+1}) = (2k_2 + 1)! \gamma^{2k_2+1} x_1^{2k_2+1}.$$

При цьому, оскільки друга координата $mdeg(D_v) = v$ дорівнює -1 , а $k_2, u_2 = 2k_2 + 1 \geq 0$, то мультистепені $(2k_2 + 1)v$ не можна подати іншим способом як лінійну комбінацію з натуральними коефіцієнтами мультистепенів k, u, v . Отже, $\bar{D}$ може бути локально нільпотентним лише, коли $\bar{D}^2(x_2) = 0$, тобто, коли $\beta\gamma + k_2 + 1 = 0$. Але тоді диференціювання $\bar{D}$ можна подати наступним чином

$$\left((k_2 + 1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1} \right) \left(x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (33)$$

Тепер локальна нільпотентність $\bar{D}$ впливає з того, що поліном $(k_2 + 1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1}$ належить ядру трикутного диференціювання:

$$x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Наступна теорема була отримана разом з аспірантом кафедри математики П. Прокоф'євим, і узагальнює результати, анонсовані в [21], [22].

Теорема 11. Трикореневі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних після відповідного перейменування змінних з точністю до сталого множника мають одну з форм:

$$\left((k_2 + 1)x_1 x_3^m + \beta x_2^{k_2+1} \right) x_3^l \left(x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_3^m}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (34)$$

$$\left((k_2 + 1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1} x_3^m \right) x_3^l \left(x_2^{k_2} x_3^m \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (35)$$

де $m, l, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \beta \in \mathbb{F}^*$, або є трикутним однією з форм:

$$x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_3^{l_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\left(x_2^{k_2} x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2} x_3^{l_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu x_3^m \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\left(x_2^{k_2} x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2} x_3^{l_3} + \mu x_2^{m_2} x_3^{m_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Доведення. Як уже зазначалося, трикореневе локально нільпотентне диференціювання може містити не більше одного кореневого, що не є елементарним. У цьому випадку маємо $D = D_k + D_u + D_v$, де доданки мають вигляд (29), (30), причому співвідношення (32) має виконуватися для мультистепенів мономів від трьох змінних, зокрема має місце $2k_3 = u_3 + v_3$. З іншого боку, з (33) отримуємо вигляд диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних $D = D_k + D_u + D_v$:

$$D_k = (k_2 + 1)x_1 x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^{k_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$D_u = \beta x_2^{2k_2+1} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}; D_v = \frac{k_2 + 1}{\beta} x_1 x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Якщо $k_3 \geq u_3$, то отримуємо (34), де $m = k_3 - u_3, l = u_3$, а якщо $k_3 < u_3$, то $k_3 > v_3$, оскільки $2k_3 = u_3 + v_3$, і ми приходимо до формули (35), де $m = u_3 - k_3 = k_3 - v_3, l = v_3$.

У випадку, коли всі три кореневі диференціювання D_k, D_u, D_v є локально нільпотентними, а отже елементарними, слід розглянути систему лінійних рівнянь $\begin{cases} xk + yu + zv = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, де k, u, v — вектор-стовпчики ($k_1 = -1$). Додавання останнього рядка до решти дає підматрицю розмірності 3 в лівому верхньому куті, у якої нульова діагональ, а решта додатні числа. Оскільки цей мінор відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок, а отже подання мультистепеня у вигляді $s_1 k + s_2 u + s_3 v$ можна зробити не більше як одним способом. При всіх перестановках D_k, D_u, D_v у кількостях s_1, s_2, s_3 ми будемо отримувати в поліномі $D^{s_0}(x_j)$ мономи $x^{s_1 k + s_2 u + s_3 v}$ з різними коефіцієнтами (залежно від порядку застосування), але одного знаку, а отже їх сума буде відмінна від нуля. Таким чином, для локальної нільпотентності D необхідно, щоб для всіх s_1, s_2, s_3 таких, що $s_0 = s_1 + s_2 + s_3$, мультистепені $s_1 k + s_2 u + s_3 v$ містив від'ємну координату. Зокрема, рівність $s_3 = 0$ означає, що $D_k + D_u$ є локально нільпотентним, а отже має трикутний вигляд. Так само і для $D_k + D_v$ і для $D_u + D_v$. Застосування для них наслідку 1 дає потрібні трикутні форми.

Дикі автоморфізми Нагатівського типу.

Для дослідження дикості автоморфізмів алгебри поліномів від трьох змінних, які є експонентами диференціювань (34),(35), ми скористаємося технікою Шестакова та Умірбієва [3].

Означення 6. 1. Перетворення автоморфізму Кремони $F = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ виду

$F \rightarrow H \circ F$, де H є елементарним автоморфізмом $x_i \rightarrow x_i + a(x_j, x_k)$, $x_j \rightarrow x_j$, $x_k \rightarrow x_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, називається елементарним.

2. Якщо в результаті перетворення повний степінь відповідної координати понизився, то говорять, що автоморфізм F допускає елементарну редукцію, а сама вона є допустимою для нього.

Надалі, через $\bar{f}$ ми будемо позначати старшу однорідну форму полінома f . Якщо f — координатний поліном і допускає елементарну редукцію, то після її виконання, старша форма має бути знищена. В роботі [3] було введено ще чотири типи редукцій, за допомогою яких охарактеризовані всі ручні автоморфізми алгебри поліномів від трьох змінних. Для автоморфізмів, що фіксують одну змінну, зокрема для автоморфізма Нагати, цілком досить такого результату.

Теорема 12 ([3]). Автоморфізм виду

$$F = \langle f_1, f_2, x_3 \rangle,$$

є ручним тоді і тільки тоді, коли скінченною послідовністю допустимих елементарних редукцій, він може бути приведений до одиничного виду $Id = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

Теорема 13. Нехай D диференціювання виду (34), тоді автоморфізм

$\langle \exp(D)(x_1), \exp(D)(x_2), x_3 \rangle$ є диким, тоді і тільки тоді, коли $m > 0$, і $k_2 > 0$.

Доведення. Для випадку диференціювання D виду (34) покладемо

$$g = \left((k_2 + 1)x_1x_3^m + \beta x_2^{k_2+1} \right) x_3^l \in \text{Ker } D,$$

тоді для $f_1 = \exp(D)(x_1)$, $f_2 = \exp(D)(x_2)$ будемо мати наступні формули:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + gx_2^{k_2+1} + \\ &\sum_{j=2}^{k_2+1} (-1)^{j-1} \frac{g^j}{j! \beta^{j-1}} \frac{k_2!}{(k_2 - j + 1)!} x_2^{k_2-j+1} x_3^{m(j-1)} \\ &= x_1 + gx_2^{k_2+1} - \\ &- \frac{\beta}{k_2 + 1} x_3^{-m} \sum_{j=2}^{k_2+1} C_{k_2+1}^j \left(\frac{-gx_3^m}{\beta} \right)^j x_2^{k_2+1-j} = \\ &= x_1 - \frac{\beta}{k_2 + 1} x_3^{-m} \left(\left(x_2 - \frac{1}{\beta} gx_3^m \right)^{k_2+1} - x_2^{k_2+1} \right). \end{aligned}$$

$$f_2 = x_2 - gx_3^m \frac{1}{\beta}.$$

При $m > 0$ маємо:

$$\bar{f}_1 = (-1)^{k_2} (k_2 + 1)^{-1} \beta^{-k_2} \bar{g}^{k_2+1} x_3^{mk_2};$$

$$\deg_{x_3} \bar{f}_1 = k_2 m + (\deg_{x_3} \bar{g})(k_2 + 1).$$

У той же час $\bar{f}_2^{k_2+1}$ має степінь по x_3 рівний $(k_2 + 1)(m + \deg_{x_3} \bar{g})$, який при $m > 0$ перевищує $\deg_{x_3} \bar{f}_1$, а отже редукція f_1 неможлива. Редукція полінома f_2 очевидно можлива лише при $k_2 = 0$, коли $f_1 = x_1 + g$. За допомогою елементарного перетворення $x_2 \rightarrow x_2 + \frac{1}{\beta} x_1 x_3^m$ отримуємо елемент

$$\langle x_1 + g, x_2 + \frac{1}{\beta} x_1 x_3^m, x_3 \rangle.$$

Оскільки в цьому випадку $g = (x_1 x_3^m + \beta x_2) x_3^l$, то редукцією $x_1 \rightarrow x_1 - \beta x_2 x_3^l$, приходимо до елемента $\langle x_1, x_2 + \frac{1}{\beta} x_1 x_3^m, x_3 \rangle$, який є ручним.

У випадку $m = 0$ маємо:

$$f_1 = x_1 - \frac{\beta}{k_2 + 1} \left(\left(x_2 - \frac{1}{\beta} g \right)^{k_2+1} - x_2^{k_2+1} \right),$$

$$f_2 = x_2 - g \frac{1}{\beta}, \quad g = \left((k_2 + 1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1} \right) x_3^l.$$

Виконаємо елементарну редукцію $x_1 \rightarrow x_1 + \frac{\beta}{k_2+1} x_2^{k_2+1}$ і отримаємо елемент

$$F = \langle x_1 + \frac{\beta}{k_2 + 1} x_2^{k_2+1}, x_2 - g \frac{1}{\beta}, x_3 \rangle,$$

після чого редукцією $x_2 \rightarrow x_2 + \frac{k_2+1}{\beta} x_1 x_3^l$ отримуємо елементарний автоморфізм

$\langle x_1 + \frac{\beta}{k_2+1} x_2^{k_2+1}, x_2, x_3 \rangle$. Отже, експоненти диференціювань виду (34) є дикими автоморфізмами тоді і тільки тоді, коли і $m > 0$ і $k_2 > 0$.

Нескінченновимірні алгебраїчні групи

Згідно з [23], [24], нескінченновимірні алгебраїчні многовиди будуються як індуковані границі скінченновимірних, у зв'язку з чим їх іноді називають Ind-многовидами (Ind-varieties).

Означення 7. Ind-многовидом називають множину X разом з фільтрацією

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$$

такою, що $X = \cup_i X_i$, де кожне X_n є Ньотеровим алгебраїчним многовидом і занурення $X_n \subset X_{n+1}$ є замкненим.

Запис $X = \varinjlim X_n$ буде вживатися в сенсі цього означення. При цьому X має структуру топологічного простору, в якому підмножина $U \subset X$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли для будь-якого n множина $U \cap X_n$ є відкритою в X_n . Пучок регулярних функцій на X є проективною границею $\mathcal{O}_X = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n}$ регулярних функцій на X_n . Многовид X називають афінним, якщо всі X_n є такими.

Морфізм Ind-многовидів $X = \varinjlim X_n$ та $Y = \varinjlim Y_n$ визначається як відображення $\phi : X \rightarrow Y$ таке, що для будь-якого $n \geq 0$ обмеження $\phi|_{X_n}$ є морфізмом X_n на деякий Y_m , $m = m(n)$. Ізоморфізм, як звичайно, є морфізм, для якого існує обернене відображення, що також є морфізмом.

Ind-підмноговидом $Z \subset X$ називають підмножину, для якої $Z \cap X_n$ є підмноговидом для всіх n . Ind-многовид є зв'язним (незв'язним), якщо він є зв'язним (незв'язним), як топологічний простір.

Означення 8. Дотичний простір $Tan_x(X)$ до Ind-многовиду X в замкненій точці $x \in X$ є індукована границя відповідних дотичних просторів $\varinjlim T_x(X_n)$, починаючи з номера n , при якому $x \in X_m$ для всіх $m \geq n$.

При цьому, як і в скінченновимірному випадку кожен морфізм Ind-многовидів $\phi : X \rightarrow Y$ індукує лінійне відображення $d\phi_x : Tan_x(X) \rightarrow Tan_{\phi(x)}(Y)$ — диференціал ϕ .

Приклад 1. $\mathbb{F}^\infty = \varinjlim \mathbb{F}^n = \{(a_0, a_1, a_2, \dots)\}$, де тільки скінченна кількість значень $a_i \in \mathbb{F}$ відмінна від нуля.

Приклад 2. Довільний векторний простір зліченної розмірності з базисом $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$

Приклад 3. Для векторного простору зліченної розмірності зафіксуємо натуральне k і розглянемо грасманіан — множину $Gr(k, V)$ усіх k -вимірних підпросторів V . Фільтрація

$$0 \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \dots \subset V = \bigcup_{r \geq k} V_r,$$

$\dim V_r = r$ індукує фільтрацію

$$Gr(k, V_k) \subset Gr(k, V_{k+1}) \subset \dots \subset Gr(k, V),$$

причому отримана структура Ind-многовиду не залежить від способу обрання фільтрації на V . При $k = 1$ маємо проективний Ind-простір, визначений за допомогою V .

Приклад 4. Нехай

$$\mathbb{F}^{(r)}[x] = \mathbb{F}[x] \oplus \dots \oplus \mathbb{F}[x],$$

$x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Набори поліномів $\langle f_1, f_2, \dots, f_r \rangle$, для яких $\deg f_i \leq m$, утворюють

фільтруючий скінченновимірний афінний простір $\mathbb{F}_m^{(r)}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, де коефіцієнти поліномів утворюють набір афінних координат. Оскільки,

$$\mathbb{F}^{(r)}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \mathbb{F}_m^{(r)}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

то $\mathbb{F}^{(r)}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ є Ind-афінним простором.

Декартів добуток Ind-многовидів визначається таким чином:

Означення 9. Алгебраїчна нескінченновимірна група, (Ind-група або ∞ — вимірна група) є ind-многовид оздоблений структурою групи так, що відображення

$$G \times G \rightarrow G \quad (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1}$$

є морфізмом ind-многовидів.

Подібним чином вводяться поняття Ind-гомоморфізму та ind-підгрупи.

Приклад 5. Занурення $GL_n(V_n) \rightarrow GL_{n+1}(V_{n+1}), A \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ визначає нескінченновимірну групу $GL(V)$.

Приклад 6. Нехай A_n є n -вимірний афінний простір, який розглядається як алгебраїчний многовид і $Aut A_n = GA_n$ — група бірегулярних перетворень афінного простору. Як уже зазначалося у прикладі 4, простір $\mathbb{F}^{(2n)}[x]$ ($r = n$) можна розглядати як нескінченновимірний афінний простір, в якому коефіцієнти поліномів утворюють набір афінних координат. Елементами цього простору є набори поліномів

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n \rangle.$$

Для кожного m розглянемо афінний многовид:

$$W_m \subset \mathbb{F}_m^{(2n)}[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

який визначається системою співвідношень між коефіцієнтами, які впливають з умови існування оберненого елемента:

$$\begin{cases} f_1(g_1, g_2, \dots, g_n) = x_1 \\ f_2(g_1, g_2, \dots, g_n) = x_2 \\ \vdots \\ f_n(g_1, g_2, \dots, g_n) = x_n, \end{cases}$$

або у векторній формі: $F(G)(x) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Таким чином, для групи GA_n маємо фільтрацію скінченновимірними афінними многовидами:

$$W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_m \subset \dots \subset GA_n,$$

$GA_n = \bigcup_m W_m$. Оскільки коефіцієнти композиції наборів поліномів є поліноміальними функціями від коефіцієнтів співмножників, то GA_n є нескінченновимірною алгебраїчною групою (*Ind-групою*) в сенсі означення 9. Зауважимо, що у цьому прикладі, на відміну від попереднього, фільтруючі многовиди не є групами.

Як і в скінченновимірному випадку для Ind-груп поняття зв'язності та незвідності збігаються.

Теорема 14 ([24]). *Зв'язна нескінченновимірна алгебраїчна група є незвідною.*

Зокрема, в роботі [24], була доведена зв'язність, а отже і незвідність групи GA_n .

Дотичний простір $Tan_e(G)$ можна ототожнити з простором інваріантних диференціювань алгебри функцій $\mathbb{F}[G] = \varprojlim \mathbb{F}[X_n]$, або з простором неперервних гомоморфізмів $Hom(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, \mathbb{F})$, де замкнений ідеал $\mathcal{M}$ визначається як ядро гомоморфізму «значення в одиниці» $\mathbb{F}[G] = \varprojlim \mathbb{F}[X_n] \mapsto \mathbb{F}$, який визначається відповідними гомоморфізмами $\mathbb{F}[X_n] \rightarrow \mathbb{F}$. Після цього структура алгебри Лі $Lie(G)$ вводиться на $Tan_e(G)$ в звичайний спосіб. При такому підході на нескінченновимірні групи переносяться наступні результати.

Теорема 15 ([24]). *Нескінченновимірна алгебраїчна група є гладким многовидом.*

Звичайно, тут слід уточнити поняття гладкої точки. Це робиться шляхом розгляду $\widetilde{S}^n(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)$ — поповненого n -симетричного добутку $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, як топологічного векторного простору та епіморфізму $\widetilde{S}^n(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2) \rightarrow \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$, який є проективною границею гомоморфізмів $\widetilde{S}^n(\mathcal{M}_{X_i}/\mathcal{M}_{X_i}^2) \rightarrow \mathcal{M}_{X_i}^n/\mathcal{M}_{X_i}^{n+1}$. Якщо для будь-якого n вказані гомоморфізми є ізоморфізмами, то відповідна «точка» (в даному випадку це одиниця) називається простою.

Теорема 16 ([24]). *Якщо $f : X \rightarrow Y$ — замкнене занурення Ind-многовидів, причому точка $x \in X$ є простою, а Y є незвідним, і гомоморфізм $df_x : Tan_x(X) \rightarrow Tan_{f(x)}(Y)$ є ізоморфізмом, то f є ізоморфізмом.*

Прямим наслідком теорем 2, 3 є:

Теорема 17 ([24]). *Нехай G є зв'язною алгебраїчною групою, а H — її замкнена підгрупа і $f : H \rightarrow G$ відповідне занурення. Якщо $df_e : Tan_e(H) \rightarrow Tan_e(G)$ є ізоморфізмом, то f — ізоморфізм.*

Застосуванням цієї теореми до GA_n , у [24], було показано, що GA_n як Ind-група породжується групою лінійних перетворень та групою трикутних

перетворень. З використанням цієї теореми в роботі [25] було показано, що всі регулярні автоморфізми GA_n є ручними.

Тобто замикання будь-якої підгрупи GA_n , що містить вказані підгрупи, збігається з GA_n . Очевидними прикладами замкнених підгруп GA_n є афінна група AGL_n , групи U_n, B_n унітрикутних (4) та трикутних (6) перетворень відповідно. Регулярні автоморфізми груп U_n, B_n та їх узагальнень (як нескінченновимірних алгебраїчних груп) були описані в роботах [26], [27], [28].

Виділимо деякі інші замкнені підгрупи GA_n . Умова якобіану означає, що дія перетворень (1) на елемент об'єму $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ зводиться до множення його на константу:

$$F : dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \mapsto j(F) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

де $j(F)$ — якобіан. Підгрупа $SA_n < GA_n$ перетворень, які зберігають елемент об'єму, складається з перетворень (1), які задовольняють умові $Det J(F) = 1$. Ця умова визначає SA_n як замкнену підгрупу. В тій же роботі І.Р. Шафаревича [24] (Теорема 5) доведено, що SA_n є простою як алгебраїчна група, тобто не містить замкнених нормальних дільників. Що стосується опису нормальних дільників цієї групи як абстрактної групи, то ця задача виявилася дуже складною. Відомо тільки, що SA_2 не є простою.

Розглянемо стабілізатор $GA_n^{(0)}$ початку координат $0 = (0, \dots, 0)$ в GA_n , який складається з елементів (1), для яких $f_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Ця підгрупа природним чином занурюється в групу, елементами якої є набори формальних степеневих рядів без вільних членів виду (1). Для таких наборів визначена операція суперпозиції й існує ряд формул для їх формального обернення. Наведемо формулу Абх'янкара (Abhyankar див. [1])

$$[F^{-1}]_i = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} \frac{D^p}{p!} (x_i \cdot j(F) \cdot (x - F)^p). \quad (36)$$

Нагадаємо, що тут $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n, p! = p_1! p_2! \dots p_n!$,

$$(x - F)^p = \prod_{i=1}^n (x_i - f_i)^{p_i},$$

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} -$$

диференціальний оператор. Якщо $F \in GA_n$, то $j(F) \equiv const \neq 0$, а оскільки має місце факторизація $GA_n = A_n^+ \cdot GA_n^{(0)}$, то наведену формулу можна використовувати для обчислення обернених

елементів у групі GA_n . Елементи з $GA_n^{(0)}$ будуть мати такий вигляд у формі (2):

$$\sum_l H^{(l)}(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_l h_i^{(l)}(x_1, \dots, x_n) \right) \vec{e}_i,$$

де $H^{(l)}(x) = (h^{(1)}(x), h^{(2)}(x), \dots, h^{(n)}(x))$ — однорідні вектор-форми степеня $l, l \geq 1$.

Лема 4. Нехай $M \subseteq \bar{\mathbb{N}}^+$ піднапівгрупа за додаванням і елементи $q_1, q_2 \in GA_n^{(0)}$ мають такий вигляд:

$$q_i = \sum_{m \in M} H_i^{(m+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2,$$

тоді таку ж форму

$$\sum_{m \in M} H_3^{(m+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

будуть мати їх добуток $q_1 \cdot q_2$ і обернені елементи q_1^{-1}, q_2^{-1} .

Доведення. Дійсно, для добутку елементів будемо мати $q_1 \cdot q_2 =$

$$= \sum_{m \in M} H_1^{(m+1)} \left(\sum_{m \in M} H_2^{(m+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right).$$

Нехай $h = \sum_{u: |u|=m^*+1} c_u x_1^{u_1} \cdot x_2^{u_2} \cdot \dots \cdot x_n^{u_n}$ є ненульова координата вектор-форми $H_1^{(m+1)}$ для деякого $m^* \in M$. Тоді ця координата добутку $q_1 \cdot q_2$ буде сумою доданків вигляду:

$$c_u \cdot \prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M} g_i^{(m+1)} \right)^{u_i},$$

де $g_i^{(m+1)}$ — однорідні форми степеня

$$m+1: H_2^{(m+1)} = (g_1^{(m+1)}, g_2^{(m+1)}, \dots, g_n^{(m+1)}).$$

У свою чергу наведений вираз є лінійною комбінацією виразів:

$$\prod_{i=1}^n \left(g_i^{(m_i+1)} \right)^{u_i}, \quad m_1, m_2, \dots, m_n \in M,$$

кожен з яких є однорідною формою степеня $\sum_{i=1}^n (m_i+1)u_i = \sum_{i=1}^n m_i u_i + m^* + 1$. Оскільки $\sum_{i=1}^n m_i u_i + m^* \in M$, то це доводить твердження. Для q_1^{-1} можна скористатися формулою Абхіанкара (36). Вираз у дужках у правій частині цієї формули, до якого застосовується диференціальний оператор, є лінійною комбінацією однорідних форм виду

$$x_i \cdot h_1^{(m_1+1) \cdot p_1} \cdot h_2^{(m_2+1) \cdot p_2} \cdot \dots \cdot h_n^{(m_n+1) \cdot p_n}, \quad m_i \in M,$$

які мають степінь однорідності $1 + \sum_{i=1}^n (m_i+1)p_i$. Оскільки диференціювання однорідної форми дає або однорідну форму, степінь якої менший на одиницю, або тотожний нуль, то після застосування оператора $D^{u(p)}$ отримаємо або форму степеня:

$$1 + \sum_{i=1}^n (m_i+1)p_i - \sum_i p_i = 1 + \sum_{i=1}^n m_i p_i,$$

або тотожний нуль. Оскільки $\sum_{i=1}^n m_i p_i \in M$, то лема доведена.

Неважко отримати розклад у напівпрямий добуток

$$GA_n^{(0)} = GL_n \ltimes GA_n^{(1)}, \quad (37)$$

де елементи нормального дільника $GA_n^{(1)}$ мають вигляд:

$$g = x + \sum_{l>1} H^{(l)}(x_1, \dots, x_n). \quad (38)$$

При цьому дія лінійної групи на $GA_n^{(1)}$ задається таким чином:

$$g^A = x + \sum_{l>1} A^{-1} \cdot H^{(l)}(A \cdot x^*), \quad (39)$$

де $A \in GL_n$, « $\cdot$ » — множення матриці на вектор, x^* — вектор-стовпчик змінних.

Нехай $q = x + H^{(k+1)} + \dots \in GA_n^{(1)}$, $H^{(k+1)} = (h_1^{(k+1)}, h_2^{(k+1)}, \dots, h_n^{(k+1)})$ — ненульова вектор-форма степеня $k+1$ і $\dots$ означають доданки вищого степеня. Тоді відповідна якобієва матриця буде мати вигляд:

$$E + \left(\frac{\partial h_i^{(k+1)}}{\partial x_j} + \dots \right).$$

Якобіан цього перетворення має вигляд:

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i^{(k+1)}}{\partial x_i} + \dots,$$

і з умови якобіану (3) отримуємо:

$$\text{Div} \left(H^{(k+1)} \right) \equiv 0 \quad (40)$$

для довільного $q = x + H^{(k+1)} + \dots \in GA_n^{(1)}$.

Таким чином, для афінної групи Кремони має-мо такий розклад

$$GA_n = A_n^+ \cdot \left(GL_n \ltimes GA_n^{(1)} \right) \quad (41)$$

Для добутку елементів $q_1 = x + H^{(k+1)} + \dots$, $q_2 = x + G^{(l+1)} + \dots \in GA_n^{(1)}$ будемо мати:

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{cases} x + H^{(k+1)} + \dots & \text{при } k < l, \\ x + G^{(l+1)} + \dots & \text{при } k > l, \\ x + H^{(k+1)} + uG^{(k+1)} + \dots & \text{при } k = l \end{cases} \quad (42)$$

Зокрема, якщо M піднапівгрупа, що складається з нуля та чисел, що перевищують деяке наперед обране k , то елементи виду $x + \sum_{l: l > k} H^{(l)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ утворюють підгрупу, яку надалі будемо позначати як $GA_n^{(k)}$. Крім того, неважко перекоонатися, що підгрупи $GA_n^{(k)}$ є замкненими нормальними дільниками в $GA_n^{(0)}$, отже, маємо нескінченний спадний ланцюг нормальних дільників

$$GA_n^{(0)} \supset GA_n^{(1)} \supset GA_n^{(2)} \supset \dots \supset GA_n^{(k)} \supset GA_n^{(k+1)} \supset \dots$$

групи $GA_n^{(0)}$, причому

$$\forall k \quad \bigcap_{l: l > k} GA_n^{(l)} = (e),$$

а фактор-групи

$$GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)} \cong GL_n \times (GA_n^{(1)} / GA_n^{(k)})$$

є скінченновимірними алгебраїчними групами. Зокрема,

$$GA_n^{(k)} / GA_n^{(k+1)} \approx \underbrace{K^+ \oplus K^+ \oplus \dots \oplus K^+}_{\binom{k+n}{n-1}}, \quad (43)$$

а фактор-групи $GA_n^{(1)} / GA_n^{(k)}$, є уніпотентними. Через ϕ_k будемо позначати природні гомоморфізми

$$\phi_k : GA_n^{(0)} \rightarrow GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)}.$$

У цьому сенсі групу $GA_n^{(0)}$ можна вважати проскінченновимірною.

Теорема 16 дає можливість застосувати класичний Лієвський метод: звести задачу в групах до відповідної задачі в алгебрі Лі ga_n, sa_n . З використанням описаної кореневої структури, в роботі [19] отримана:

Теорема 18. Нехай L — проміжна алгебра Лі така, що $sl_n \subset L \subseteq ga_n$, тоді L одна з алгебр: $asl_n, agl_n, gl_n \ltimes L(M), sl_n \ltimes L(M)$, для деякої піднапівгрупи $M \subseteq \mathbb{N}^+$.

Тут $L(M)$ породжується m -однорідними компонентами, $m \in M$.

Наслідок 3. Однорідні компоненти ga_n^k , $k = 1, 2, \dots$ є незвідними sl_n -модулями.

Наслідок 4. Ідеалами $L(M) \subseteq L(\mathbb{N})$ вичерпуються всі підалгебри інваріантні відносно приєднаної дії елементів алгебри sl_n .

Наслідок 5. Решітка підалгебр $L : gl_n \subset L \subseteq ga_n$ ізоморфна решітці піднапівгруп напівгрупи $\mathbb{N}^+$.

Наслідок 6. agl_n, asl_n максимальні підалгебри в ga_n , та, sa_n , відповідно.

Для встановлення відповідності між описаними в попередньому розділі підалгебрами Лі та замкненими підгрупами GA_n , згідно теореми 17 треба мати опис відповідних незвідних підгруп.

Лема 5. Замкнена підгрупа $G < GA_n^{(1)}$, яка є інваріантною відносно дії спряженням групи гомотетій є незвідною.

Доведення. Доведення незвідності групи $GA_n^{(1)}$, наведене в [24], дослівно переноситься на групи G , інваріантні відносно дії спряженням гомотетій

$$\lambda = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in Z(GL_n).$$

Дійсно, довільний елемент з $GA_n^{(1)}$ має форму:

$$g = x + \sum_{r: r > m} H^{(r)}(x_1, \dots, x_n),$$

де $H^{(r)}(x_1, \dots, x_n)$ — однорідні форми степеня r , причому $\forall \lambda \quad g^\lambda \in G$. Оскільки

$$\begin{aligned} g^\lambda &= x + \frac{1}{\lambda} \sum_{r: r > m} H^{(r)}(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \\ &= x + \sum_{r: r > m} \lambda^{r-1} H^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

то ми маємо неперервну криву, що з'єднує елемент g , $\lambda = 1$ та $Id = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $\lambda = 0$. Цим доведена зв'язність, а беручи до уваги теорему 14, і незвідність G .

Наслідок 7. Нормальні дільники $GA_n^{(k)} \trianglelefteq GA_n^{(1)}$ є замкненими незвідними підгрупами.

Для опису замкнених надгруп SL_n скористаємося локально нільпотентними диференціюваннями алгебри поліномів $\xi(ut)$. Оскільки

$$\det J(\langle 0, 0, \dots, 0, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} \rangle) \equiv 0,$$

то маємо елементарний автоморфізм

$$\exp(\xi(m)) = x + tx_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} \vec{e}_n,$$

який належить підгрупі $GA_n^{(m-1)}$, $m = \sum_i m_i$. Ця підгрупа містить однопараметричну підгрупу:

$$\sigma^{(m)}(t) = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + tx_1^{(m)} \rangle,$$

$t \in \mathbb{F}$. За допомогою цих підгруп та гомоморфізмів

$$\phi_k : GA_n^0 \rightarrow GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)}$$

у скінченновимірні алгебраїчні групи ми визначимо підгрупи $GA_n^{(1)}$, алгебри Лі яких є типу $L(M)$. Для довільної піднапівгрупи $M \subset \mathbb{N}^+$ і довільного k розглянемо групи

$$\hat{G}_k(M) = \langle \phi_k(\sigma^{(m)}(t))^A | A \in SL_n, m \in M \rangle,$$

які породжуються однопараметричними підгрупами, спряженими між собою за допомогою елементів з SL_n . Покладемо

$$G(M) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \phi_k^{-1}(\hat{G}_k(M)).$$

Лема 6.

- 1) Групи $G(M)$, $M \subset \mathbb{N}$ є замкненими незвідними підгрупами $GA_n^{(1)}$;
- 2) Всі неодиночкі елементи груп $G(M)$ мають вигляд $x + H^m + \dots$, де H^m — ненульова однорідна вектор-форма степеня $m \in M$, а $+$ означає доданки, які не містять мономіїв степеня, що не перевищує m ;
- 3) $Lie(G(M)) = L(M)$, зокрема групами типу $G(M)$ вичерпуються всі замкнені незвідні підгрупи $GA_n^{(1)}$, інваріантні відносно дії спряження групи SL_n ;
- 4) Для довільної вектор-форми H^m , $m \in M$, такої що $Div(H^m) \equiv 0$, існує елемент $g \in G(M)$: $g = x + H^m + \dots$;
- 5) Якщо замкнена підгрупа $G < GA_n^{(1)}$ така що $G \neq G(M)$, то існують елемент $g \in G \setminus G(M)$ і число $k_0 \notin M$ такі, що $g = x + H^{k_0} + \dots$.

Доведення. Для скінченновимірних алгебраїчних груп добре відома (див. [29] стор. 112) теорема, в якій доводиться, що група, породжена довільною сукупністю незвідних алгебраїчних підгруп, є незвідною алгебраїчною підгрупою. Оскільки всі групи $\phi_k(\sigma^{(m)}(t))^A$ є однопараметричними і ізоморфні K^+ , то із цієї теореми випливає замкненість і незвідність $\hat{G}_k(M)$, як підгрупи скінченновимірної групи $GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)}$. Тоді групи $G(M)$ є перетинами прообразів замкнених підгруп і отже є замкненими.

Очевидно, що для довільного $A \in SL_n$, однопараметрична група $(\sigma^{(m)}(t))^A$ є інваріантною відносно дії спряження групи гомотетій, звідки випливає, що і групи $G(M)$ є такими і їх незвідність випливає з леми 5.

Перейдемо до п. 2). Для довільного $g \in G(M)$, $g \neq e$, існує $k : \phi_k(g) \neq (e)$. За означенням груп $G(M)$ елемент $\phi_k(g) \in GA_n^{(1)} / GA_n^{(k)}$ є композицією елементів $\phi_k(\sigma^{(m)}(t))^A$, $A \in SL_n$, $m \in M$, $m < k + 1$. Очевидно, що елементи $\sigma^{(m)}(t)^A$ і $(\sigma^{(m)}(t))^A$ мають форму $x + H^m + \dots$, і за лемою (4) таку ж форму будуть мати і елементи $\phi_k(g)$ і g .

У п. 3) будемо мати:

$$(\forall m \in M, A \in GL_n \exp(\xi(m))^A \in G(M)) \Rightarrow \\ \Rightarrow L(M) \subseteq Lie(G(M)).$$

Оскільки $G(M)$ є незвідною, то за теоремою 17 її однозначно має відповідати алгебра Лі. Оскільки всі проміжні підалгебри описані в теоремі 18, то має існувати піднапівгрупа $M_1 : Lie(G(M)) = L(M_1)$, $M \subseteq M_1$. Нехай $m_1 \in M_1 \setminus M$, тоді $\exp(\xi(1_{m_1})) = \sigma^{(m_1)}(t) \in G(M)$. Але оскільки $\sigma^{(m_1)}(t) = x + x_1^{m_1} \vec{e}_n$, $m_1 \notin M$, а це суперечить п. 2). Отже, $M = M_1$ і $Lie(G(M)) = L(M)$. Враховуючи взаємно-однозначну відповідність між незвідними замкненими групами та їх алгебрами Лі, з наслідку 4 отримуємо п. 3).

Для доведення п. 4) зауважимо, що вектор форми $H^{(m)}$, з умовою $Div(H^{(m)}) \equiv 0$ можна ототожнювати з елементами алгебри Лі $ga_n^{(m-1)}$:

$$H^m \leftrightarrow \sum_{i=1}^n [H^m]_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

За наслідком 3, $ga_n^{(m-1)}$, як векторний простір, породжується елементами виду $\xi(um)^A$, $um = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, 0)$, $|um| = m$, $A \in SL_n$. Отже,

$$\sum_{i=1}^n [H^m]_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\alpha} \xi(um_{\alpha})^{A_{\alpha}},$$

де $\forall \alpha \quad |um_{\alpha}| = m$. Тоді, за формулою (39) будемо мати

$$\prod_{\alpha} \left(\sigma^{(um_{\alpha})} \right)^{A_{\alpha}} = \\ = x + \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (A_{\alpha} \cdot x^*)^{um} \end{pmatrix} + \\ + \dots = x + H^{(m)} + \dots \in G(M),$$

тут $A_{\alpha} x^*$ — добуток матриці на вектор-стовпчик змінних. Цим твердженням п. 4) доведено.

Перейдемо тепер до доведення останнього пункту леми. З означення груп $G(M)$ випливає, що якщо $\forall k \quad \phi_k(G) = \hat{G}_k(M)$ для деякої підгрупи

$G < GA_n^{(1)}$, то $\bar{G} = G(M)$. Таким чином, якщо замкнена підгрупа $G < GA_n^{(1)}$ відмінна від $G(M)$, то має існувати $k_0 : \forall k > k_0 \quad \phi_k(G) \neq \hat{G}_k(M)$. Серед усіх можливих значень k_0 оберемо найменше значення. Тоді для відповідного цьому k_0 елемента $g \in G \setminus G(M) : \phi_{k_0}(g) \notin \hat{G}_{k_0}(M)$, існує елемент $g_0 \in G(M)$:

$$g = x + \sum_{j=m}^{k_0-1} H^{(j)} + R^{(k_0)} \mod GA_n^{(k_0)}$$

$$g_0 = x + \sum_{j=m}^{k_0-1} H^{(j)} + H^{(k_0)} \mod GA_n^{(k_0)},$$

де $H^{(j)}, R^{(k_0)}$ однорідні вектор-форми, що мають степені j, k_0 відповідно, причому $R^{(k_0)} \neq H^{(k_0)}$. Нехай

$$g_0^{-1} = x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \mod GA_n^{(k_0)},$$

тоді

$$x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=m}^{k_0-1} H^{(j)} \left(x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \right) +$$

$$+ H^{(k_0)} \left(x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \right) \in GA_n^{(k_0)}.$$

Використовуючи це, отримаємо

$$g \cdot g_0^{-1} \equiv$$

$$\equiv \left(x + \sum_{j=m}^{k_0-1} H^{(j)} + H^{(k_0)} + (R^{(k_0)} - H^{(k_0)}) \right) \circ$$

$$\circ \left(x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \right) \equiv x +$$

$$+ R^{(k_0)} \left(x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \right) -$$

$$- H^{(k_0)} \left(x - H^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{k_0} G^{(j)} \right) \equiv$$

$$\equiv x + R^{(k_0)} - H^{(k_0)} \mod GA_n^{(k_0)}.$$

За умовою (40) маємо $\text{Div}(R^{(k_0)} - H^{(k_0)}) = 0$. Припустимо, що $k_0 \in M$, тоді згідно п. 2), існує

елемент $q \in G(M)$:

$$q \equiv x + (R^{(k_0)} - H^{(k_0)}) \mod GA_n^{(k_0)},$$

звідки $g \cdot g_0^{-1} \equiv q \mod GA_n^{(k_0)}$ і

$$g \equiv q \cdot g_0 \mod GA_n^{(k_0)}.$$

Оскільки $q \cdot g_0 \in G(M)$, то це суперечить умові $\phi_{k_0}(g) \notin \hat{G}_{k_0}(M)$, за якою обирався елемент g . Отже, $k_0 \notin M$ і елемент $g \cdot g_0^{-1}$ є шуканим.

Теорема 19. Будь-яка замкнена підгрупа $G : GL_n < G < GA_n$ є або AGL_n , або $GL_n \ltimes G(M)$ для деякої піднапівгрупи $M < \mathbb{N}^+$.

Доведення. Як многовид, група G занурюється в декартів добуток своїх замкнених проєкцій на AGL_n та $GA_n^{(1)}$. Оскільки G містить GL_n , то її проєкція на AGL_n або збігається з нею, або є GL_n . Обидві підгрупи AGL_n, GL_n є незвідними, як головні відкриті множини відповідних афінних просторів. Проекція G на $GA_n^{(1)}$ є замкнутою підгрупою, інваріантною відносно дії спряженням GL_n , а отже і групи гомотетій. За лемою 5 вона є незвідною, а отже за лемою 6 п.3), $G = G(M)$ для деякої піднапівгрупи $M \subset \mathbb{N}^+$. Таким чином, G є незвідною і результат впливає з теореми 17 та наслідків 4,5.

Наслідок 8. Решітка замкнених підгруп $G : GL_n < G \leq GA_n^{(0)}$ ізоморфна решітці піднапівгрупи $\mathbb{N}^+$.

Наслідок 9. AGL_n є максимальною замкнутою підгрупою GA_n .

Перейдемо до опису замкнених підгруп, що містять SL_n .

Теорема 20. Нехай G — замкнена підгрупа: $SL_n \leq G < GA_n$. Має місце одне з двох:

- 1) група G містить трансляцію з A_n^+ і є однією з груп $G = AGL_n, SA_n, A\Omega L_n$, де $\Omega L_n < GL_n$ — підгрупа матриць, визначник яких належить скінченній підгрупі $\Omega < K^*$, $A\Omega L_n = \Omega L_n \ltimes A_n^+ < AGL_n$;
- 2) група G не містить трансляцій, тоді існує піднапівгрупа з нулем $M \subset \mathbb{N}^+$: або $G = GL_n \ltimes G(M)$, або $G = \Omega L_n \ltimes G(M)$ для деякої скінченної підгрупи $\Omega < K^*$.

Доведення. Як нескінченновимірний алгебраїчний многовид групу G можна занурити в декартів добуток $GL_n \times A_n^+ \times GA_n^1$. Нехай $G_0 \trianglelefteq G$ зв'язна (і незвідна) компонента одиниці. Її проєкції на співмножники декартового добутку також мають бути незвідними. Отже, проєкція G_0 на перший співмножник може дорівнювати GL_n або SL_n . Оскільки $SL_n \subset G_0$, то проєкція на другий співмножник можуть бути тільки $\{0\}$ або A_n . Проєкції на третій співмножник згідно п.3) леми 6 можуть бути тільки групи типу $G(M)$. Опис можливих незвідних компонент G_0 ми отримуємо з опису відповідних алгебр Лі: $AGL_n, SA_n, ASL_n, GL_n \ltimes G(M), SL_n \ltimes G(M)$. Нехай $g \in G \setminus G_0$. Покажемо, що якщо g має нетривіальну проєкцію на A_n^+ , то $A_n^+ < G$. Дійсно, для $g = g_0 \cdot c, g_0 \in GA_n^{(0)}, c \in A_n^+, S \in SL_n < G_0$ маємо $S^g = (S^{g_0})^c \in G_0$. Якщо елементам g, g^{-1} відповідають вектор-поліноми $F(x), G(x)$, то перетворенню S^{g_0} буде відповідати вектор-поліном

$$G(S \cdot F(x)),$$

а перетворенню S^g вектор-поліном

$$G(S \cdot F(x + uc)) - uc,$$

де $c = x + uc \in A_n^+$. Тоді проєкція елемента S^g на A_n^+ дорівнює $G(S \cdot F(uc)) - uc$. Якщо $F(uc) = 0$, то проєкція дорівнює $x - uc$. Для $F(uc) \neq 0$ завжди можна обрати матрицю S таким чином, щоб $S \cdot F(uc) \neq F(uc)$, тоді

$$G(S \cdot F(uc)) \neq G(F(uc)) = uc.$$

Отже, проєкція елемента $S^g \in G_0$ на A_n^+ є нетривіальною, а оскільки SL_n діє транзитивно на ненульових векторах, то $A_n^+ < G_0$. Підгрупами ASL_n, AGL_n, SA_n вичерпуються всі замкнені незвідні підгрупи, що містять групу трансляцій, тобто в цьому випадку для G_0 маємо три можливості.

Покажемо, що проєкції G та G_0 на $GA_n^{(1)}$ збігаються. Припустимо, що це не так, тоді, оскільки проєкція G_0 на $GA_n^{(1)}$ збігається з деякою підгрупою $G(M)$, за лемою 6, п. 5), існує елемент:

$$q = A \cdot g \in G \setminus G_0 : A \in GL_n, g \in GA_n^{(1)} \setminus G(M),$$

$$g = x + H^k + \dots, k \notin M.$$

Оскільки $SL_n \subset G_0$, то $\forall S \in SL_n$

$$q \cdot S \cdot q^{-1} = S \cdot q^S \cdot q^{-1} \in G_0.$$

Звідки,

$$\forall S \in SL_n \quad q^S q^{-1} = A^S \cdot A^{-1} \cdot g^S \cdot g^{-1} \in GL_n \ltimes G(M),$$

а оскільки $A^S \cdot A^{-1} \in SL_n$, то

$$\forall S \in SL_n, \quad g^S \cdot g^{-1} \in G(M).$$

Як випливає з наслідку 3, приєднана дія sl_n на однорідних компонентах $ga_n^{(k)}$ є невивірженою, тобто:

$$\cap_{s \in sl_n} \text{Ker}(ad s) = \{0\}.$$

Скориставшись властивостями оператора $\exp$ для скінченновимірних алгебраїчних груп, отримуємо, що для довільного $\bar{g} \in GA_n^{(k)} / GA_n^{(k+1)}$ існує $S \in SL_n : \bar{g}^S \cdot \bar{g}^{-1} \neq (e)$. Зокрема існує $S \in SL_n$:

$$\phi_k(g)^S \cdot \phi_k(g)^{-1} \neq (e).$$

Для такого S отримуємо

$$g^S \cdot g^{-1} = x + uR^{(k)} + \dots \in G(M), k \notin M,$$

що суперечить п.1) леми 6. Отже, проєкція G на $GA_n^{(1)}$ збігається з $G(M)$.

Підсумовуючи все попереднє, приходимо до висновку, що проєкції груп G та G_0 на A_n^+ та $GA_n^{(1)}$ збігаються. Крім того, якщо G містить трансляції, то її проєкцією на $GA_n^{(1)}$ може бути лише або одинична підгрупа або сама $GA_n^{(1)}$. Що стосується проєкцій G на GL_n , то це можуть бути лише підгрупи типу ΩL_n або вся GL_n , якими вичерпуються усі замкнені підгрупи GL_n , що містять SL_n . Це завершує доведення теореми.

Наслідок 10. ASL_n є максимальною замкнутою підгрупою SA_n .

Нерозв'язані проблеми.

Наведемо ряд давніх проблем комутативної алгебри, алгебраїчної геометрії та теорії інваріантів безпосередньо пов'язаних з афінною групою Кремони. Першою серед них є, безумовно, гіпотеза якобіана.

- 1) **Проблема якобіана:** якщо F набір з n поліномів f_i від n змінних має якобіан, що є константою, відмінною від нуля, то чи випливає з цього існування оберненого поліноміального перетворення $G: F(G) = G(F) = Id$? Це можна подати таким чином:

$$j(F) = \text{const} \neq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} F \in GA_n.$$

- 2) Після розв'язання гіпотези Нагати, можна поставити запитання: чи існують дикі автоморфізми в просторах розмірностей більших за 3?

- 3) Чи всі бірегулярні перетворення афінного простору є стабільно ручними?

- 4) Чи є афінна група максимальною підгрупою в групі ручних перетворень афінного простору розмірності більше двох?
- 5) Характеризація локально нільпотентних поліноміальних диференціювань та побудова алгоритму перевірки локальної нільпотентності даного поліноміального диференціювання.
- 6) Чи породжується афінна група Кремони своєю афінною підгрупою та експонентами локально нільпотентних поліноміальних диференціювань?
- 7) Скінченна породжуваність алгебри інваріантів. Якщо G — алгебраїчна група і X є G -многовидом, то визначена дія групи G на алгебрі функцій $\mathcal{O}(X)$. Питання про те, чи є алгебра інваріантів $\mathcal{O}(X)^G$ скінченно-породженою часто називають 14-ю проблемою Д. Гілберта. Насправді, в оригіналі її формулювання було іншим: нехай L є підполе раціональних функцій $\mathbb{C}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що містить $\mathbb{C}$; чи є $L \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ скінченно-породженою $\mathbb{C}$ — алгеброю? Позитивне вирішення цієї проблеми мало б наслідком скінченну породжуваність алгебри $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)^G$. Але у 1958 році М.Нагата побудував контрприклад до обох проблем. Приклади [14], що згадувалися раніше, $\mathbb{F}^+$ — дії з нескінченно породженою алгеброю інваріантів були побудовані пізніше.
У той же час, для широкого класу алгебраїчних груп — редуктивних груп, проблема скінченно породжуваності має позитивне

вирішення, тобто якщо задана дія лінійно-редуктивної алгебраїчної групи G на афінному многовиді X , то алгебра інваріантів $\mathcal{O}(X)^G$ є скінченно породженою (див. [30]). Вивчення дій алгебраїчних груп на афінному просторі $\mathbb{C}^n$ призводить до певних класів автоморфізмів алгебри $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, а знання будови групи $GA_n(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ дає можливість вивчати дії вказаних груп. Наступні проблеми пов'язані саме з проблемами класифікації таких дій.

- 8) Гіпотеза лінеаризації. Чи будь-яка алгебраїчна дія довільної редуктивної алгебраїчної групи еквівалентна лінійній? Інше формулювання цієї проблеми — чи будь-яка редуктивна алгебраїчна підгрупа GA_n спряжена з підгрупою групи $GL_n < GA_n$? В 1989 році Г. Шварц (G. Schwarz, [31]) побудував приклади нелінеаризованих дій груп O_2, SL_2, SO_3 .
- 9) Проблема випрямлення афінного простору. Чи будь-який замкнений підмноговид A_n , що ізоморфний афінному простору A_k , може бути переведений за допомогою елемента групи GA_n у стандартний координатний підпростір, точок з координатами: $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$?
- 10) Проблема Зарисського (скорочення). Для довільного многовиду Y , чи означає ізоморфізм $Y \times \mathbb{C}_m \cong \mathbb{C}_n$ для деяких n, m наявність ізоморфізму $Y \cong \mathbb{C}_{n-m}$?

1. Bass H. Connel E. Wright The Jacobian conjecture : Reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — № 7. — P. 287–330.
2. W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw. Archief voor Wiskunde, 3. — № 1. — 1953. — P. 33–41.
3. I. Shestakov, U. Umirbaev. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // Journal of the American Mathematical Society. — 2004. — V. 17. — PART 1. — P. 197–228
4. Essen A. Peretz R. Polynomial automorphisms and invariants // Journal of Algebra. — 2003. — V. 269. — P. 317–328.
5. Smith M. Stably tame automorphisms // J.Pure and Appl. Algebra. — 1989. — V. 58. — P.209–212.
6. A. Kraft, Algebraic automorphisms of affine space, in: H. Kraft, T. Petrie, G. Schwars (Eds.), Topological Methods in Algebraic Transformation Groups, Birkhauser, Basel, 1989. — P. 1271–1311.
7. Попов В. Л. Группы автоморфизмов алгебр многочленов / В.Л. Попов // Вопросы алгебры. — Гомель : изд-во Гомельского ун-та. — 1989. — вып. 4. — С. 4–15.
8. Drensky V. Gutierrez J., Yu J. Gröbner bases and the Nagata automorphism // J. Pure and Appl. Algebra. — 1999. — V. 135. — P. 135–153.
9. Bodnarchuk Yu. Some kinds of maximality properties of the affine group // Український математичний конгрес — 2001. Третя міжнародна алгебраїчна конференція в Україні. Праці : Алгебраїчні структури та їх застосування. Ін-т математики. — К., 2002. — С. 173–189.
10. Боднарчук Ю. Твірні властивості трикутних та бітрикутних біраціональних автоморфізмів афінного простору / Ю. В. Боднарчук // Доп. НАН України. — № 11. — 2002. — С. 7–22.
11. Bodnarchuk Yu. On generators of the tame invertible polynomial maps group, Algebra and Computation — 2005— V. 15, N 5,6. — P. 851–867.
12. Moh T. A public key system with signature and muster key functions // Communication in algebra, —1999.— V.27. — N 5. — P.2207–2222.
13. Moh T. A cryptanalysis of tame transformation method // <http://usdsi.com/lec.ps>.
14. Tanimoto R., On Freudenburg's counterexamples to fourteenth problem of Hilbert, Transformation groups,— 2006 — V. 11 — N 2. — P. 269–294.
15. Кац В. Г. Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста / В. Г. Кац // Известия АН СССР Сер. Мат. — 1968.— № 32.

16. Daigle D., Freudenburg G., Locally nilpotent derivations over a UFD and an application to rank two locally nilpotent derivations of $k[X_1, \dots, X_n]$, *Journal of Algebra*, — 1998 —N 204 — P. 353–371.
17. A. van den Essen, *Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin. — V. 190. — 2000.
18. Bodnarchuk Yu. Some extreme properties of the affine group as an automorphism group of the affine space // *Contribution to General Algebra*. — 2001. — № 13. — P. 15–29.
19. Боднарчук Ю. Про структуру замкнених підгруп афінної групи Кремони, що містять SL_n / Ю. В. Боднарчук // *Наукові записки Університету “Києво-Могилянська Академія”*. Фіз.-мат. науки. — 2001. — Т. 19 — С. 9–12.
20. Popov V., Problems for problem session, in “Affine Algebraic Geometry” conference Proceedings, Contemporary. Math. ser. of Amer. Math. Soc., 369, AMS (2005) 12–16, arXiv math/0504517.
21. Bodnarchuk Yu. Root locally nilpotent derivations of polynomial algebras // in Abstracts of 6-th International Algebraic Conference in Ukraine, Kamyanets-Podilsky — 2007. — P. 39–40.
22. Bodnarchuk Yu. Locally nilpotent polynomial derivations which are a sum of several root ones // in Abstracts of International Conference “Transformation Groups” dedicated to the 70-th anniversary of E. B. Vinberg, Moscow — 2007. — P. 22–23.
23. Shafarevich I. On some infinite dimensional groups // *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*. — 1966. — V. 25. — S. 5. — P. 208–212.
24. Шафаревич И. Р. О некоторых бесконечномерных группах II / И. Р. Шафаревич // *Изв. Акад. Наук, Сер. матем.* — 1981. — Т. 1 — № 2. — С. 214–226.
25. Bodnarchuk Yu. Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner // *Journal of Pure and Applied Algebra*. — V. 157. — 2001. — P. 115–119.
26. Bodnarchuk Yu. On automorphisms of block-triangular polynomial translation group // *Journal of Pure and Applied Algebra*. — V. 137. — 1999. — P. 103–123.
27. Боднарчук Ю. Група автоморфізмів нормалізатора силовської р-підгрупи симетричної групи / Ю. В. Боднарчук, Я. В. Лавренюк // *Доп. НАН України*. — 1999. — № 7. — С. 7–12.
28. Боднарчук Ю. Автоморфізми груп типу Жонк’єра над скінченними полями / Ю. В. Боднарчук, Я. В. Лавренюк // *Вісник Київськ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки*. — 2003. — Вип. 4. — С. 1–6.
29. Винберг Э.Б. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. / Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик — М. : “Наука” — 1988 — 343 с.
30. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. / Х. Крафт . — М. : Мир, 1987. — 312 с.
31. Schwarz G. Exotic algebraic group actions // *C. R. Acad. Sci. Paris* — 1989. — V. 309. — P. 89–94.

Bodnarchuk Yu. V.

FAIRYLAND OF POLINOMIAL TRANSFORMATIONS

The survey of the problems connected with invertible polynomial maps is proposed.

Key words : *affine Cremona group, polynomial transformation, tame and wild transformations, locally nilpotent derivations, infinite dimensional algebraic groups, infinite dimensional algebras Lie..*