Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Оператори між множинами в топологічних просторах

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

____

(підпис)
"____"__________________ 2020 р.

Виконала студентка
3-го року навчання спеціальності
113 "Прикладна математика"
Антошина Катерина Олегівна
(ПІБ)

Київ – 2020

Тема: Оператори між множинами в топологічних просторах.
Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.10.2019	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	15.10.2019	
3.	Розробка плану та структури роботи.	3.11.2019	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень топології.	30.11.2019	
5.	Опис основних властивостей топологічних операторів і множин співпадіння для пар операторів.	20.12.2019	
6.	Дослідження застосування композиції операторів на різних типах топологічних множин.	25.02.2020	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	10.03.2020	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	5.05.2020	
9.	Захист курсової роботи.	18-29.05.2020	

Зміст

1 Вступ

Починаючи з фундаментальної роботи [11] Куратовського 1922 року, тема дослідження властивостей операторів між множинами в топологічних просторах займає важливе місце в сучасній загальній топології. Багато властивостей множин в топологічних просторах (такі, як узагальнені відкритість та замкненість, всюди щільність, ніде не щільність тощо) і самих просторів (зв'язність, сепарабельність, нерозкладність та інші) формулюються в термінах відношень між відповідними операторами. Використовуючи дуалізм операторів замикання та внутрішності, із аксіом Куратовського для оператора замикання можна отримати схожу абстрактну характеризацію й для оператора внутрішності в топологічних просторах. Аналогічним чином отримуються й характеризації стандартних операторів зовнішності та межі.

В даній роботі вивчаються властивості наступних шести операторів між множинами в топологічних просторах: замикання Cl, внутрішність Int, зовнішність Ext, межа ∂ та два оператори $+$ і $*$, які досліджувались в роботі Елеза та Папаза [7].

У якості основної задачі розглядається задача опису множин, на яких задана пара операторів F, G комутує (тобто множин A, для яких виконана рівність $F(G(A)) = G(F(A)))$ для всіх можливих пар операторів F, G з множини $\{\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Ext}, \partial, +, *\}$.

Повний опис множин комутування для пари операторів $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ був отриманий у 1961 році в роботі Левіна [12]. А саме, в [12] було доведено, що дана пара операторів комутує лише на множинах, які можна представити у вигляді симетричної різниці відкрито-замкненої множини (множини, яка є одночасно відкритою і замкненою) із ніде не щільною множиною (множина, внутрішність замикання якої порожня). Подібним чином були описані й множини A, на яких комутують оператори Int, ∂ (див. роботу Стейлі [17]). Кожна така множина представляється у вигляді (диз'юнктного) об'єднання відкрито-замкненої множини із ніде не щільною множиною. Слід зауважити, що дана задача є окремим випадком задачі опису множин, на яких задана пара операторів F, G співпадає (тобто множин A з $F(A) = G(A)$). Ця більш широка задача була повністю розв'язана в роботі Чепмена [4] для пар операторів F, G із моноїда $\mathcal{F}_1$, породженого операторами $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$.

Позначимо через $\mathcal{F}_2$ моноїд, породжений операторами Cl та доповненням множин. Класичний результат Куратовського [11] стверджує, що $|\mathcal{F}_2| \leq 14$ для всіх топологічних просторів. Зокрема, $|\mathcal{F}_1| \leq 7$. Проте, для моноїда $\mathcal{F}_3$, породженого операторами Cl, доповнення множин та об'єднання множин, взагалі кажучи, $|\mathcal{F}_3| = \infty$ (див. [2]). Більше того, можна побудувати топологічний простір, який містить скінченну множину A таку, що послідовно застосовуючи оператори Cl, доповнення та об'єднання до A, ми отримаємо нескінченну кількість різних множин [3]. Також, із відповідних означень слідує, що $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int} \in \mathcal{F}_1$, $\mathrm{Ext} \in \mathcal{F}_2$ та $\partial, +, * \in \mathcal{F}_3$.

У другій секції цієї роботи наведені основні означення загальної топології, приклади стандартних топологічних просторів та типи множин, які використовуються в наступних розділах. Третя секція містить основні властивості операторів між множинами. Зокрема, описано множини, які під дією вищезгаданих шести операторів переходять в порожню множину або у весь простір X. Також описано нерухомі точки операторів та множини співпадіння для довільних пар операторів. У четвертій секції розглянуто композиції операторів. А саме, повністю розв'язана задача опису множин комутування для всіх пар операторів. За допомогою цих результатів отримано нові характеризації nd-просторів (nodec spaces), екстремально незв'язних просторів, сильно нерозкладних просторів та досконало незв'язних просторів. У п'ятій секції наведено висновки та можливі плани на майбутню роботу.

2 Основні означення

Означення 2.1. Нехай X довільна непорожня множина і $\tau \subset 2^X$ така родина підмножин множини X, що виконуються наступні умови (аксіоми топології):

- порожня множина і множина X належать τ;
- об'єднання будь-якої сукупності множин з τ міститься в τ;
- перетин кожних двох множин з τ належить τ.

Така родина τ називається **топологією** на X, а множина X **носієм топології**. При цьому, пара (X, τ) називається **топологічним простором**.

Приклад 2.2. На довільній непорожній множині X топологія називається **дискретною**, якщо $\tau = 2^X$.

Приклад 2.3. Топологія називається **антидискретною** або **тривіальною**, якщо $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Приклад 2.4. Кожен метричний простір (X, d) природнім чином породжує топологію на X: множина $A \subset X$ називається відкритою, якщо для кожної її точки $x \in A$ існує число $r > 0$ таке, що $B_r(x) \subset A$ (тут $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ позначає кулю радіуса r із центром в x). Зокрема, топологія на $\mathbb{R}$, породжена метрикою $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, називається **евклідовою** топологією.

Приклад 2.5. Нехай множина X складається з двох елементів: $X = \{a, b\}$. Родина $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ є топологією на X. Топологічний простір (X, τ) називається **простором Серпінського** або **зв'язним двоточковим простором**.

Надалі будемо розглядати топологічні простори тільки із непорожнім носієм.

Означення 2.6. Множина A топологічного простору (X, τ) називається **відкритою** в X (відкритою відносно топології τ або τ-відкритою), якщо $A \in \tau$. Якщо відомо, про яку топологію йдеться, то множина A називається

просто відкритою.
Множина A топологічного простору (X, τ) називається **замкненою** в X (замкненою відносно топології τ або τ-замкненою), якщо її доповнення $X\backslash A$ відкрите в τ. Якщо відомо, про яку топологію йдеться, то множина A називається просто замкненою.

Твердження 2.7. *Якщо в топологічному просторі X множина A відкрита, а множина B замкнена, то різниця $A\backslash B$ відкрита, а $B\backslash A$ замкнена.*

Доведення. Слідує із рівності $A\backslash B = A \cap (X\backslash B)$. □

В цій роботі топологічний простір будемо позначати просто через X (якщо вказано, яка топологія мається на увазі).

Означення 2.8. Топологічний простір називається **зв'язним**, якщо він не може бути представлений у вигляді диз'юнктного об'єднання двох непорожніх відкритих множин.

Означення 2.9. Оператор **замикання** (closure) $\operatorname{Cl} A$ є перетином усіх замкнених множин із простору X, які містять у собі A. Замикання задає найменшу замкнену множину, яка містить A: $A \subset \operatorname{Cl} A$.
Оператор **внутрішності** (interior) $\operatorname{Int} A$ є об'єднанням усіх відкритих підмножин A в топології, визначеній на X. Внутрішність задає найбільшу відкриту множину, яка міститься в A: $\operatorname{Int} A \subset A$.
Оператор **зовнішності** (exterior) $\operatorname{Ext} A$ це сукупність усіх відкритих множин, які не перетинають A. Зовнішність задає найбільшу відкриту множину, яка міститься в $X\backslash A$: $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(X\backslash A)$, $\operatorname{Ext} A = X\backslash \operatorname{Cl} A$.
Оператор **межі** ∂ визначається так: $\partial A = \operatorname{Cl} A\backslash \operatorname{Int} A$.
Оператор $+$ визначається так [7]: $A^+ = \operatorname{Cl} A\backslash A$.
Оператор $*$ визначається так [7]: $A^* = A\backslash \operatorname{Int} A$.

Означення 2.10. Множина A топологічного простору X називається:

- **відкрито-замкненою**, якщо $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A$;
- **всюди щільною**, якщо $\operatorname{Cl} A = X$;
- **ніде не щільною**, якщо $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset$;

- **напіввідкритою** [13], якщо $A \subset \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}\,A)$;
- **напівзамкненою**, якщо $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,A) \subset A$;
- **передвідкритою** [14], якщо $A \subset \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,A)$;
- **передзамкненою**, якщо $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}\,A) \subset A$;
- **квазі-відкритою** [5], якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\,A)$.

Твердження 2.11. *Вищезгадані множини мають такі властивості:*

- *Означення напіввідкритої множини еквівалентно тому, що* $\mathrm{Cl}\,A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\,A)$*;*
- *Означення напівзамкненої множини еквівалентно тому, що* $\mathrm{Int}\,A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A)$*;*
- *Множина, яка є водночас напіввідкритою та передвідкритою, є квазі-відкритою;*
- *Множина, яка є водночас напіввідкритою та напівзамкненою, є квазі-відкритою;*
- *Множина, яка є водночас напівзамкненою та передзамкненою, є квазі-відкритою;*
- *Множина, яка є водночас напівзамкненою та передвідкритою, є відкрито-замкненою;*
- *Відкрита або замкнена множина є квазі-відкритою.*

Лема 2.12. [4] *Нехай B замкнена множина, а C множина із порожньою внутрішністю. Тоді* $\mathrm{Int}(B \cup C) = \mathrm{Int}\,B$.

Скажемо, що пара операторів F та G **комутують** на множині $A \subset X$ (або, що A є *множиною комутування* для F та G), якщо $F(G(A)) = G(F(A))$. В роботі [12] 1961 року Левін повністю охарактеризував множини комутування для операторів Cl та Int.

Теорема 2.13. [12] *Оператори* Cl *та* Int *комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли A можна зобразити у вигляді симетричної різниці відкрито-замкненої множини із ніде не щільною множиною.*

Схожий критерій для множин комутування операторів Int та ∂ був отриманий в 1968 році у роботі Стейлі [17].

Теорема 2.14. [17] *Оператори* Int *та ∂ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли A можна зобразити у вигляді об'єднання відкрито-замкненої множини із ніде не щільною множиною.*

Основною метою цієї роботи є опис множин комутування для всіх інших пар операторів $F, G \in \{\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Ext}, \partial, +, *\}$.

3 Основні властивості операторів

Спочатку ми покажемо, що оператори замикання та внутрішності виражаються один через одного за допомогою теоретико-множинного доповнення.

Твердження 3.1. *Для множини A в топологічному просторі мають місце наступні рівності:* $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$, $\operatorname{Int} A = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Доведення. Маємо,

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{A \subset F, \\ F \text{ замкнена}}} F = X \setminus \bigcup_{\substack{A \subset F, \\ F \text{ замкнена}}} (X \setminus F) = X \setminus \bigcup_{\substack{U \subset X \setminus A, \\ U \text{ відкрита}}} U = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Аналогічно, отримаємо рівність

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{\substack{U \subset A, \\ U \text{ відкрита}}} U = X \setminus \bigcap_{\substack{U \subset A, \\ U \text{ відкрита}}} (X \setminus U) = X \setminus \bigcap_{\substack{X \setminus A \subset F, \\ F \text{ замкнена}}} F = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A).$$

□

Наслідок 3.2. *Множина A в топологічному просторі є:*

1. *напіввідкритою тоді й тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ напівзамкнене;*

2. *передвідкритою тоді й тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ передзамкнене;*

3. *квазі-відкритою тоді й тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ квазі-відкрите.*

Доведення. Якщо A напіввідкрита, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(X \setminus A)) = \operatorname{Int}(X \setminus \operatorname{Int} X \setminus (X \setminus A)) = \operatorname{Int}(X \setminus \operatorname{Int} A) = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus (X \setminus \operatorname{Int} A)) = X \setminus \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \subset X \setminus A$. Тобто, $X \setminus A$ напівзамкнена. Аналогічно, для передвідкритої множини A виконано

$$\operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(X \setminus A)) = \operatorname{Cl}(X \setminus \operatorname{Cl} A) = X \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \subset X \setminus A.$$

Тобто, A передзамкнена. Нарешті, якщо A квазі-відкрита, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(X \setminus A)) = X \setminus \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$ та $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(X \setminus A)) = X \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)$. Оскільки $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(X \setminus A)) \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(X \setminus A))$ і доповнення $X \setminus A$ теж квазі-відкрите. □

Наступна лема є простим технічним результатом, який надалі буде використовуватись в роботі.

Лема 3.3. *Якщо* $A \cap B = \emptyset$, *то* $\operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Int} B = \emptyset$.

Доведення. Оскільки $A \cap B = \emptyset$, то $A \subset X \backslash B \subset X \backslash \operatorname{Int} B$. Але, $X \backslash \operatorname{Int} B$ є замкненою множиною, тому $\operatorname{Cl} A \subset X \backslash \operatorname{Int} B$. Іншими словами, $\operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Int} B = \emptyset$. □

Тепер ми наведемо відомі "зовнішні" характеризації для кожного із шести операторів $\operatorname{Cl}, \operatorname{Int}, \operatorname{Ext}, \partial, +, *$. Першою такою характеризацією є набір аксіом Куратовського [11] для оператора Cl.

Теорема 3.4. [11] *Нехай* X *деяка множина, а* $F : 2^X \to 2^X$ *відображення. Тоді існує топологія* $\tau \subset 2^X$ *така, що в ній* $F = \operatorname{Cl}$ *тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $F(\emptyset) = \emptyset$;
2. $A \subset F(A)$ *для всіх* $A \subset X$;
3. $F(F(A)) = F(A)$ *для всіх* $A \subset X$;
4. $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$ *для всіх* $A, B \subset X$.

Цікаво зауважити, що чотири аксіоми Куратовського можуть бути замінені одною: $A \cup F(A) \cup F(F(A)) = F(A \cup B) \backslash F(\emptyset)$. Використовуючи Теорему 3.4 та Твердження 3.1, отримуємо наступну характеризацію для оператора Int.

Твердження 3.5. *Нехай* X *деяка множина, а* $F : 2^X \to 2^X$ *відображення. Тоді існує топологія* $\tau \subset 2^X$ *така, що в ній* $F = \operatorname{Int}$ *тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $F(X) = X$;
2. $F(A) \subset A$ *для всіх* $A \subset X$;
3. $F(F(A)) = F(A)$ *для всіх* $A \subset X$;
4. $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ *для всіх* $A, B \subset X$.

“Зовнішню” характеризацію для оператора Ext можна знайти в роботі [9].

Теорема 3.6. [9] *Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \mathrm{Ext}$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$F(\emptyset) = X$;*
2. *$A \cap F(A) = \emptyset$ для всіх $A \subset X$;*
3. *$F(X \backslash F(A)) = F(A)$ для всіх $A \subset X$;*
4. *$F(A \cup B) = F(A) \cap F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.*

Аналогічно, система аксіом для оператора ∂ теж була отримана в роботі [9].

Теорема 3.7. [9] *Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \partial$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$F(\emptyset) = \emptyset$;*
2. *$F(A) = F(X \backslash A)$ для всіх $A \subset X$;*
3. *$F(A) \subset B \cup F(B)$ для всіх $A \subset B \subset X$;*
4. *$F(F(A)) \subset A$ для всіх $A \subset X$;*
5. *$F(A \cup B) \subset F(A) \cup F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.*

Характеризації операторів $+, *$ були отримані в статті [7].

Теорема 3.8. [7] *Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = +$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *$F(\emptyset) = \emptyset$;*
2. *$A \cap F(A) = \emptyset$ для всіх $A \subset X$;*

3. $F(A \cup B) = (F(A) \backslash B) \cup (F(B) \backslash A)$ *для всіх* $A, B \subset X$*;*

4. $F(F(A)) \subset A$ *для всіх* $A \subset X$*.*

Теорема 3.9. [7] *Нехай* X *деяка множина, а* $F : 2^X \to 2^X$ *відображення. Тоді існує топологія* $\tau \subset 2^X$ *така, що в ній* $F = *$ *тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $F(X) = \emptyset$*;*

2. $F(A) \subset A$ *для всіх* $A \subset X$*;*

3. $F(A \cap B) = (F(A) \cap B) \cup (A \cap F(B))$ *для всіх* $A, B \subset X$*;*

4. $F(F(A)) \subset F(A)$ *для всіх* $A \subset X$*.*

Наступні результати містять характеризації множин A, для яких виконується одна з операторних рівностей: $F(A) = \emptyset$, $F(A) = X$, $F(A) = A$, $F(A) = G(A)$ для операторів F, G.

Твердження 3.10. *Для множини* A *в топологічному просторі справедливі наступні твердження:*

1. $\operatorname{Cl} A = \emptyset$ *тоді й тільки тоді, коли* $A = \emptyset$*;*

2. $\operatorname{Ext} A = \emptyset$ *тоді й тільки тоді, коли* A *всюди щільна;*

3. $\partial A = \emptyset$ *тоді й тільки тоді, коли* A *відкрито-замкнена;*

4. $A^+ = \emptyset$ *тоді й тільки тоді, коли* A *замкнена;*

5. $A^* = \emptyset$ *тоді й тільки тоді, коли* A *відкрита.*

Доведення. 1. $\Rightarrow$: Оскільки $A \subset \operatorname{Cl} A$, то якщо $\operatorname{Cl} A = \emptyset$, то й $A = \emptyset$. $\Leftarrow$: Відомо, що $A \subset \operatorname{Cl} A$. Припустимо, що $A \neq \emptyset$. Тоді $\operatorname{Cl} A$ містить у собі всі елементи, які містить і A, отже, не є порожньою. Із цього слідує, що $\operatorname{Cl} A = \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли $A = \emptyset$.

2. $\operatorname{Ext} A = X \backslash \operatorname{Cl} A = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Cl} A = X$, що означає, що A всюди щільна.

3. $\partial A = \operatorname{Cl} A \backslash \operatorname{Int} A = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Int} A \Leftrightarrow A$ відкрито-замкнена.

4. $A^+ = \mathrm{Cl}\, A \backslash A = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A \subset A \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = A \Leftrightarrow A$ замкнена.

5. $A^* = A \backslash \mathrm{Int}\, A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \mathrm{Int}\, A \Leftrightarrow \mathrm{Int}\, A = A \Leftrightarrow A$ відкрита.

□

Твердження 3.11. *Для множини A в топологічному просторі справедливі наступні твердження:*

1. $\mathrm{Int}\, A = X$ *тоді й тільки тоді, коли* $A = X$*;*

2. $\mathrm{Ext}\, A = X$ *тоді й тільки тоді, коли* $A = \emptyset$*;*

3. $\partial A = X$ *тоді й тільки тоді, коли* A *та* $X \backslash A$ *всюди щільні множини;*

4. $A^+ \neq X$*;*

5. $A^* \neq X$*.*

Доведення. 1. За означенням $A \subset X$, $\mathrm{Int}\, A \subset A \Leftrightarrow X \subset A$, отже $A = X$.

2. $\mathrm{Ext}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}\, A$, $X \backslash \mathrm{Cl}\, A = X$, отже $A = \emptyset$.

3. $\Leftarrow$: $X \backslash A$ всюди щільна, отже $\mathrm{Cl}\,(X \backslash A) = X$
   A всюди щільна, отже $\mathrm{Cl}\, A = X$
   $\mathrm{Cl}\,(X \backslash A) = \mathrm{Cl}\, A = X$
   $\mathrm{Cl}\,(X \backslash A) = X \backslash \mathrm{Int}\, A = X \Rightarrow \mathrm{Int}\, A = \emptyset$
   $\mathrm{Cl}\, A = X \Rightarrow \mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A = X = \partial A$.
   $\Rightarrow$: $\partial A = X$, отже $\mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A = X$. Оскільки $\mathrm{Int}\, A \subset X$, то $\mathrm{Int}\, A = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}\, A = X$,що значить, що X всюди щільна. $\partial A = \partial(X \backslash A)$, тому аналогічно $X \backslash A$ всюди щільна.

4. $A^+ = \mathrm{Cl}\, A \backslash A$, A не належить A^+ , але A є підмножиною $X \Rightarrow A^+ \neq X$

5. $A^* = A \backslash \mathrm{Int}\, A$, $\mathrm{Int}\, A$ не належить A^*, але $\mathrm{Int}\, A \subset A \subset X \Rightarrow A^* \neq X$.

□

Твердження 3.12. *Для множини A в топологічному просторі справедливі наступні твердження:*

1. $\mathrm{Int}\, A = A$ *тоді й тільки тоді, коли* A *відкрита;*

2. $\operatorname{Cl} A = A$ *тоді й тільки тоді, коли A замкнена;*

3. $\operatorname{Ext} A \neq A$*;*

4. $\partial A = A$ *тоді й тільки тоді, коли A замкнена та* $\operatorname{Int} A = \emptyset$*;*

5. $A^{+} = A$ *тоді й тільки тоді, коли* $A = \emptyset$*;*

6. $A^{*} = A$ *тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Int} A = \emptyset$*.*

Доведення. 1. Випливає з означення оператора Int.

2. Випливає з означення оператора Cl.

3. За означенням, $\operatorname{Ext} A = X \setminus \operatorname{Cl} A$. Але $A \subset \operatorname{Cl} A$ та $X \neq \emptyset$. Отже, $\operatorname{Ext} A \neq A$;

4. $\Rightarrow$: За означенням, $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$ є замкненою множиною, тому при $\partial A = A$, множина A також є замкненою, тобто $\operatorname{Cl} A = A$. Якщо $\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A = A = \operatorname{Cl} A$, то $\operatorname{Int} A = \emptyset$;
$\Leftarrow$: A замкнена, отже $\operatorname{Cl} A = A$. У нас $\operatorname{Int} A = \emptyset$, отже $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$, тобто $A = \partial A$;

5. $\Rightarrow$: Оскільки $A \cap A^{+} = \emptyset$, то рівність цих множин досягається лише в випадку $A = \emptyset$;
$\Leftarrow$: Коли $A = \emptyset$, то яким би оператором на нього не подіяти (крім Ext), у результаті буде $\emptyset$;

6. $\Rightarrow$: $A^{*} = A \setminus \operatorname{Int} A$, отже, якщо $A^{*} = A$, то $\operatorname{Int} A = \emptyset$;
$\Leftarrow$: Якщо $\operatorname{Int} A = \emptyset$, то $A \setminus \operatorname{Int} A = A$, тобто $A^{*} = A$.

□

Твердження 3.13. *Для множини D наступні умови еквівалентні:*

1. D є межею відкритої множини;

2. D є межею замкненої множини;

3. D є межею квазі-відкритої множини;

4. D є замкненою та ніде не щільною.

Доведення. Оскільки межа має властивість $\partial A = \partial(X \backslash A)$, а доповнення відкритої множини є замкненим, то еквівалентність перших двох умов є очевидною. Також, в силу Твердження 2.11, імплікації $1 \Rightarrow 3$ та $2 \Rightarrow 3$ не потребують додаткових пояснень.

Доведемо справедливість імплікації $3 \Rightarrow 4$. Припустимо, що A квазі-відкрита. Тоді $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(\partial A)) = \operatorname{Int}(\partial A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A \cap (X \backslash \operatorname{Int} A)) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \cap \operatorname{Int}(X \backslash \operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Int}(X \backslash \operatorname{Int} A) = \emptyset$ в силу Леми 3.3. Отже, ∂A є ніде не щільною.

Нарешті, нехай D замкнена та ніде не щільна множина. Покладемо $A = X \backslash D$. Тоді $\partial A = \partial(X \backslash A) = \partial D = \operatorname{Cl} D \backslash \operatorname{Int} D = D$. Це доводить імплікацію $4 \Rightarrow 1$. □

Зауважимо, що характеризація меж довільних множин в топологічному просторі отримана в роботі [16].

Тепер ми опишемо множини співпадіння для заданої пари операторів F, G (тобто, множини A із $F(A) = G(A)$).

Теорема 3.14. *Для множини A в топологічному просторі справедливі наступні твердження:*

1. $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A$ *тоді й тільки тоді, коли A відкрито-замкнена;*
2. $\operatorname{Cl} A \neq \operatorname{Ext} A$*;*
3. $\operatorname{Cl} A = \partial A$ *тоді й тільки тоді, коли A має порожню внутрішність;*
4. $\operatorname{Cl} A = A^+$ *тоді й тільки тоді, коли $A = \emptyset$;*
5. $\operatorname{Cl} A = A^*$ *тоді й тільки тоді, коли A замкнена та ніде не щільна;*
6. $\operatorname{Int} A \neq \operatorname{Ext} A$*;*
7. *наступні рівності еквівалентні:* $\operatorname{Int} A = \partial A$, $\operatorname{Int} A = A^+$, $\operatorname{Int} A = A^*$, $A = \emptyset$*;*
8. *наступні рівності еквівалентні:* $\operatorname{Ext} A = \partial A$, $\operatorname{Ext} A = A^+$, $\operatorname{Ext} A = A^*$, $A = X$*;*
9. $\partial A = A^+$ *тоді й тільки тоді, коли A відкрита;*

10. *$\partial A = A^*$ тоді й тільки тоді, коли A замкнена;*

11. *$A^+ = A^*$ тоді й тільки тоді, коли A відкрито-замкнена;*

Доведення. 1. Слідує з означення відкрито-замкненої множини;

2. Оскільки $\operatorname{Ext} A = X \setminus \operatorname{Cl} A$, то $\operatorname{Ext} A \cap \operatorname{Cl} A = \emptyset$;

3. $\Rightarrow$: Із рівності $\operatorname{Cl} A = \partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$ прямо слідує, що $\operatorname{Int} A = \emptyset$;
   $\Leftarrow$: Якщо $\operatorname{Int} A = \emptyset$, то $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \emptyset = \operatorname{Cl} A$;

4. $\Rightarrow$: Із рівності $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl} A \setminus A$ бачимо, що $A = \emptyset$;
   $\Leftarrow$: Якщо $A = \emptyset$, то $\operatorname{Cl} A \setminus A = \operatorname{Cl} A$;

5. $\Rightarrow$: Якщо $\operatorname{Cl} A = A \setminus \operatorname{Int} A$, то $A \setminus \operatorname{Int} A$ є замкненою множиною, отже A замкнена, отже $A^* = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$, а це значить, що $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset$;
   $\Leftarrow$: Із того, що $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset$ і $\operatorname{Cl} A = A$ прямо випливає, що $\operatorname{Int} A = \emptyset$, а отже $A^* = A = \operatorname{Cl} A$;

6. Слід зауважити, що $X \setminus \operatorname{Cl} A \subset X \setminus \operatorname{Int} A$, а $X \setminus \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} A = \emptyset$;

7. Із рівності $\operatorname{Int} A = \partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$, як і з $\operatorname{Int} A = A^+$, $\operatorname{Int} A = A^*$, випливає, що $\operatorname{Int} A = \emptyset$, а отже і $\partial A = \emptyset$, і $\operatorname{Cl} A = \emptyset$, і $A = \emptyset$;
   Якщо ж $A = \emptyset$, то зрозуміло, що $\operatorname{Int} A = \partial A = A^+ = A^* = \emptyset$;

8. Твердження отримується шляхом застосування властивості 7 для множини $X \setminus A$;

9. Оскільки $\partial A = A^+ \sqcup A^*$, то рівність $\partial A = A^+$ означає, що $A^* = \emptyset$, що виконується тоді й тільки тоді, коли A відкрита;

10. Аналогічно до попереднього пункту, $\partial A = A^+ \sqcup A^* = A^* \Rightarrow A^+ = \emptyset \Leftrightarrow$ A замкнена;

11. Оскільки $A^* \cap A^+ = \emptyset$, то рівність $A^+ = A^*$ виконується тоді й тільки тоді, коли A є водночас відкритою і замкненою множиною.

$\square$

4 Композиції операторів

4.1 Пари Cl, G для $G \in \{\mathrm{Ext}, \partial, +, *\}$

Твердження 4.1. *Оператори* Cl *та* Ext *комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли її замикання $\mathrm{Cl}\,A$ відкрите.*

Доведення. Маємо $\mathrm{Cl}(\mathrm{Ext}\,A) = \mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}\,A) = X \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A)$ та $\mathrm{Ext}(\mathrm{Cl}\,A) = X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\,A) = X \setminus \mathrm{Cl}\,A$. Отже, Cl та Ext комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Cl}\,A$. Остання рівність і означає, що замикання $\mathrm{Cl}\,A$ є відкритою множиною. □

Наприклад, оператори Cl та Ext завжди комутують на всюди щільних множинах.

Наслідок 4.2. *Припустимо, що оператори* Cl *та* Ext *комутують на множині A:*

1. *тоді A передвідкрита;*

2. *якщо A напівзамкнена, то A відкрито-замкнена.*

Доведення. Якщо Cl та Ext комутують на A, то за Твердженням 4.1, $\mathrm{Cl}\,A$ відкрита. Це означає, що $A \subset \mathrm{Cl}\,A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A)$. Отже, сама множина A передвідкрита. Якщо додатково, A є напівзамкненою, то $\mathrm{Cl}\,A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A) \subset A$. Звідси, A замкнена. Однак, ми вже довели, що A передвідкрита, що означає $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Int}\,A$. Таким чином, A відкрита множина. □

Наслідок 4.3. *У зв'язному топологічному просторі оператори* Cl *та* Ext *комутують на непорожній множині A тоді й тільки тоді, коли A всюди щільна.*

Доведення. Слідує з Твердження 4.1 та того факту, що простір є зв'язним тоді й тільки тоді, коли він не містить нетривіальних відкрито-замкнених множин. □

Твердження 4.4. *Припустимо, що оператори* Cl *та* Ext *комутують на множині A, тоді:*

1. *оператори* Cl *та* Ext *комутують на таких множинах: $\mathrm{Cl}\,A, \mathrm{Ext}\,A$;*

2. якщо вони комутують на множині B, то вони комутують і на $A \cup B$.

Доведення. 1. Для $\operatorname{Cl} A$ це випливає з рівності $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$. Оскільки за умовою $\operatorname{Cl} A$ є відкрито-замкненою, то $\operatorname{Ext} A$ також є відкрито-замкненою, а отже Cl та Ext комутують на ній;

2. Із означення бачимо, що $\operatorname{Ext}(\operatorname{Cl}(A \cup B)) = \operatorname{Ext}(A \cup B)$. Нам достатньо буде показати, що ця множина є замкненою. Для цього розпишемо:

$$\operatorname{Ext}(A \cup B) = X \setminus (\operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B) = (X \setminus \operatorname{Cl} A) \cap (X \setminus \operatorname{Cl} B) = \operatorname{Ext} A \cap \operatorname{Ext} B$$

Оскільки відомо, що в даному випадку зовнішності множин A і B є замкненими, і перетин двох замкнених множин є замкненою множиною, то твердження доведене.

$\square$

Твердження 4.5. *Оператори* Cl *та* ∂ *комутують на множині* A *тоді й тільки тоді, коли* A *є напівзамкненою множиною.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\operatorname{Cl}(\partial A) = \partial A$ оскільки границя ∂A замкнена для кожної множини A. Також маємо

$$\partial(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A).$$

Отже, оператори Cl та ∂ комутують на A тоді й тільки тоді, коли

$$\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A = \partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A).$$

Остання рівність еквівалентна рівності $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)$, яка в свою чергу виконується тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \subset A$. $\square$

Наслідок 4.6. *Якщо множина* A *замкнена або ніде не щільна, то оператори* Cl *та* ∂ *комутують на* A.

Доведення. Якщо A замкнена, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Int} A \subset A$. Схожим чином, якщо A ніде не щільна, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset \subset A$. Отже, в обох випадках A напівзамкнена. За Твердженням 4.5, Cl та ∂ комутують на A. $\square$

Наслідок 4.7. *Якщо оператори* Cl *та* ∂ *комутують на множині* A*, то її границя* ∂A *ніде не щільна.*

Доведення. У світлі Твердження 4.5, нам треба лише показати, що границя напівзамкненої множини є ніде не щільною. Дійсно, припустимо $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \subset A$. Тоді $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(\partial A)) = \operatorname{Int}(\partial A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A \cap (X \setminus \operatorname{Int} A)) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus \operatorname{Int} A) \subset A \cap \operatorname{Int}(X \setminus \operatorname{Int} A) = \emptyset$. □

Зауважимо, що імлікацію із Наслідку 4.6 не можна розвернути, оскільки множина $A = [0, 1)$ в $\mathbb{R}$ з евклідовою топологією є напівзамкненою, але не замкненою та не ніде не щільною. Схожим чином, границя ∂A множини $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}$ є ніде не щільною. Однак, A не є напівзамкненою. Це означає, що імлікацію із Наслідку 4.7 теж не можна розвернути.

Твердження 4.8. *Припустимо, що оператори* Cl *та* ∂ *комутують на множині* A*, тоді:*

1. *оператори* Cl *та* ∂ *комутують на таких множинах:*

$$\operatorname{Cl} A, \partial A, A^*, A^+;$$

2. *якщо вони комутують на множині* B*, то вони комутують і на перетині* $A \cap B$*.*

Доведення.

1. Із Твердження 4.5 випливає, що Cl та ∂ комутують на замкнених множинах, отже для $\operatorname{Cl} A$ та ∂A твердження очевидне. Із Наслідку 4.7 випливає, що A^+ і A^* є ніде не щільними множинами, а з Наслідку 4.6 випливає, що Cl та ∂ комутують на них;

2. Розглянемо внутрішність перетину множин A і B:

$$\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \cap \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} B) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B)$$

   В силу того, що $\operatorname{Cl}(A \cap B) \subset \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$ і $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A \cap B))$, ми стверджуємо, що $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A \cap B)) = \operatorname{Int}(A \cap B)$, а отже Cl та ∂ комутують на перетині $A \cap B$.

□

Наступний результат взятий з роботи Левіна [12], тому наводимо його без доведення.

Твердження 4.9. [12] *Припустимо, що оператори* Cl *та* Int *комутують на множині A, тоді:*

1. *оператори* Cl *та* Int *комутують на таких множинах:*

$$\operatorname{Int} A, \operatorname{Cl} A, \partial A, A^*;$$

2. *якщо вони комутують на множині A_1, то вони комутують і на $A \cap A_1$.*

Теорема 4.10. *Для множини A наступні умови еквівалентні:*

1. *оператори* Cl *та* $+$ *комутують на A;*

2. *оператори ∂ та $+$ комутують на A;*

3. *A замкнена.*

Доведення. $1 \Rightarrow 3$: Оскільки $(\operatorname{Cl} A)^+ = \operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) \setminus \operatorname{Cl} A = \emptyset$, то рівність $\operatorname{Cl}(A^+) = (\operatorname{Cl} A)^+$ означає $\operatorname{Cl}(A^+) = \emptyset$. Остання рівність виконується тоді й тільки тоді, коли $A^+ = \emptyset$, тобто коли A замкнена (див. Твердження 3.10). Отже, із першого твердження слідує третє.

$2 \Rightarrow 3$: Далі, оскільки $(\partial A)^+ = \operatorname{Cl}(\partial A) \setminus \partial A = \partial A \setminus \partial A = \emptyset$, рівність $\partial(A^+) = (\partial A)^+$ означає $\partial(A^+) = \emptyset$. Із Твердження 3.10 випливає, що A^+ відкрито-замкнена множина. Таким чином, $A^+ = \operatorname{Int}(A^+) = \emptyset$ (див. Лему 4.14). Отже, A замкнена. Тобто із другого твердження слідує третє.

$3 \Rightarrow 1, 2$: Нарешті, припустимо, A замкнена множина. Тоді $(\operatorname{Cl} A)^+ = A^+ = \emptyset = \operatorname{Cl}(A^+)$ та $(\partial A)^+ = \emptyset = \partial(A^+)$. Це означає, що із третього твердження слідують перші два. $\square$

Зауваження 4.11. Із рівності $\operatorname{Cl} A = (\operatorname{Cl} A)^* \sqcup \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)$ природньо слідує, що оператори Cl та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl}(A^*) \sqcup \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)$.

Як і в Наслідку 4.6, для пари операторів $\operatorname{Cl}, *$ має місце наступний результат.

Твердження 4.12. *Якщо A замкнена або ніде не щільна, то оператори* Cl *та* $*$ *комутують на A.*

Доведення. Якщо A замкнена, то $(\mathrm{Cl}\, A)^* = \partial A$, а $\mathrm{Cl}\,(A^*) = \mathrm{Cl}\,(A \setminus \mathrm{Int}\, A)$, і отже, в силу замкненості A, $\mathrm{Cl}\,(A^*) = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\, A = (\mathrm{Cl}\, A)^*$. Якщо ж A ніде не щільна, то і вона, і її замикання мають порожні внутрішності. Із цього слідують наступні рівності, які завершують доведення:
$(\mathrm{Cl}\, A)^* = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$
$\mathrm{Cl}\,(A^*) = \mathrm{Cl}\,(A \setminus \mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Cl}\, A.$ □

Легко бачити, що оператори Cl та $*$ в $\mathbb{R}$ комутують на множині $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, яка не є ані замкненою ані ніде не щільною. Отже, імплікацію із Твердження 4.12 не можна розвернути.

Твердження 4.13. *Якщо оператори* Int *та* ∂ *комутують на множині A, то оператори* Cl *та* $*$ *теж комутують на A.*

Доведення. Із Теореми 2.14 слідує, що якщо оператори Int та ∂ комутують на множині A, то $A = B \cup C$ для деякої відкрито-замкненої множини B та ніде не щільної множини C. $\mathrm{Int}\,(\partial A) = \partial(\mathrm{Int}\, A)$, іншими словами $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}\, A) \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Int}\, A)$, остання рівність по суті дорівнює $(\mathrm{Int}\, A)^+ = B^+ = \emptyset$, отже $\mathrm{Int}\,(\partial A) = \emptyset, \partial A$ ніде не щільна.
$\mathrm{Cl}\,(A^*) = \mathrm{Cl}\,(A \setminus \mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Cl}\,(A \setminus B) = \mathrm{Cl}\, C$
$(\mathrm{Cl}\, A)^* = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\, B \cup \mathrm{Cl}\, C) = \mathrm{Cl}\, A \setminus B = \mathrm{Cl}\, C.$ □

Лема 4.14. *Для кожної множини A в топологічному просторі множини A^+ та A^* мають порожні внутрішності.*

Доведення.

- Припустимо, що $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\, A \setminus A) = U \neq \emptyset$. Розглянемо множину $\mathrm{Cl}\, A \setminus U$: вона, очевидно, є замкненою. Замкнена множина, яка містить A, і є меншою за $\mathrm{Cl}\, A$, такого бути не може, бо за означенням, $\mathrm{Cl}\, A$ є найменшою замкненою множиною, яка містить A. Отже, $\mathrm{Int}\,(A^+) = \emptyset$;

- Припустимо, що $\mathrm{Int}\,(A \setminus \mathrm{Int}\, A) = B \neq \emptyset$. Множина $B \subset A$ відкрита за означенням. Тоді $B \subset \mathrm{Int}\, A$. Але ми позначили B як $\mathrm{Int}\,(A \setminus \mathrm{Int}\, A)$. Протиріччя. Отже, $\mathrm{Int}\,(A^*) = \emptyset$.

□

Зокрема, множина A^+ є ніде не щільною для відкритих множин A, а A^* є ніде не щільною для замкнених множин A (див. Твердження 2.7).

Твердження 4.15. *Припустимо, що оператори* Cl *та* $*$ *комутують на множині* A*, тоді:*

1. A^* *ніде не щільна;*

2. *якщо* A *відкрита, то її замикання* $\mathrm{Cl}\,A$ *також відкрите;*

3. *якщо* A *всюди щільна, то* A *відкрита;*

4. *якщо* A *має порожню внутрішність, то* A *ніде не щільна.*

Доведення.

1. $(\mathrm{Cl}\,A)^* = \mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,A) = \partial(\mathrm{Cl}\,A)$
   $\partial(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Cl}\,(A^*)$ є замкненою та ніде не щільною множиною, оскільки є межею замкненої множини. Тепер, оскільки $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,(A^*)) = \emptyset$, то A^* є ніде не щільною за означенням;

2. A відкрита, отже $A = \mathrm{Int}\,A \Rightarrow A \setminus \mathrm{Int}\,A = \emptyset$, тому $\mathrm{Cl}\,(A^*) = \emptyset$. Cl та $*$ комутують на множині A, тому $(\mathrm{Cl}\,A)^*$ має дорівнювати $\emptyset$, а це виконується, коли $\mathrm{Cl}\,A$ відкрита;

3. A всюди щільна, отже $\mathrm{Cl}\,A = X$. Оскільки X є відкритою множиною, то $(\mathrm{Cl}\,A)^* = \emptyset$. $\mathrm{Cl}\,(A^*) = (\mathrm{Cl}\,A)^*$, значить $\mathrm{Cl}\,(A^*) = \emptyset$, що означає, що $A^* = \emptyset$, тобто A відкрита;

4. $\mathrm{Int}\,A = \emptyset$, із чого випливає, що $A^* = A$, отже $\mathrm{Cl}\,(A^*) = \mathrm{Cl}\,A$. Розглянемо $(\mathrm{Cl}\,A)^* = \mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Cl}\,A$, із чого слідує $\mathrm{Int}\,(\mathrm{Cl}\,A) = \emptyset$, що означає, що A ніде не щільна.

$\square$

Топологічний простір називається **екстремально незв'язним** (англ. extremally disconnected), якщо замикання кожної його відкритої множини є відкритим. Таким чином, із Твердження 4.15 слідує, що в екстремально незв'язному топологічному просторі оператори Cl та $*$ завжди комутують на відкритих множинах.

Зауважимо, що відрізок $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$ не є множиною комутування для пари $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$. Однак, бачимо, що він є множиною комутування для пари $\mathrm{Cl}, *$.

Тепер розглянемо носій $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ разом із заданою на ньому топологією

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{a, b, c, f\}, \{a, d, e, f\}\}.$$

Тоді множина $B = \{a, b, c\}$ є відкрито-замкненою, а множина $C = \{c, d\}$ є ніде не щільною. За Теоремою 2.13, оператори Cl та Int комутують на симетричній різниці $A = B \triangle C = \{a, b, d\}$. В той же час, ми маємо $\mathrm{Cl}(A^*) = \mathrm{Cl}(\{b, d\}) = \{b, c, d, e\}$ та $(\mathrm{Cl}\, A)^* = (\{a, b, c, d, e\})^* = \{d, e\}$. Отже, властивості бути множиною комутування для пари $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ або для пари $\mathrm{Cl}, *$ є непорівнюваними.

Теорема 4.16. *Нехай B є відкрито-замкненою множиною, а множина C є ніде не щільною. Оператори* Cl *та* $*$ *комутують на симетричній різниці $B \triangle C$ тоді й тільки тоді, коли перетин $B \cap C$ замкнений.*

Доведення. Маємо,

$$\begin{aligned}(B \triangle C)^* &= (B \triangle C) \setminus \mathrm{Int}((B \cup C) \setminus (B \cap C)) = (B \triangle C) \setminus (\mathrm{Int}(B \cup C) \setminus \mathrm{Cl}(B \cap C)) \\ &= (B \triangle C) \setminus (B \setminus \mathrm{Cl}(B \cap C)) = ((B \triangle C) \setminus B) \cup ((B \triangle C) \cap \mathrm{Cl}(B \cap C)) \\ &= (C \setminus B) \cup ((B \setminus C) \cap \mathrm{Cl}(B \cap C)) = (C \setminus B) \cup (\mathrm{Cl}(B \cap C) \setminus (B \cap C)) \\ &= (C \setminus B) \cup (B \cap C)^+.\end{aligned}$$

Отже, $\mathrm{Cl}((B \triangle C)^*) = \mathrm{Cl}(C \setminus B) \cup \mathrm{Cl}((B \cap C)^+)$. Крім цього,
$\mathrm{Cl}(C \setminus B) \cap \mathrm{Cl}((B \cap C)^+) = \emptyset$, оскільки B відкрито-замкнена. Таким чином,

$$\mathrm{Cl}((B \triangle C)^*) = \mathrm{Cl}(C \setminus B) \sqcup \mathrm{Cl}((B \cap C)^+).$$

Далі, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B \triangle C)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B \setminus C) \cup \mathrm{Cl}(C \setminus B)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B \setminus C))$, бо множина $\mathrm{Cl}(B \setminus C)$ замкнена, а множина $\mathrm{Cl}(C \setminus B)$ має порожню внутрішність (див. Лему 2.12). Тому

$$\begin{aligned}(\mathrm{Cl}(B \triangle C))^* &= \mathrm{Cl}(B \triangle C) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B \triangle C)) \\ &= (\mathrm{Cl}(B \setminus C) \cup \mathrm{Cl}(C \setminus B)) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B \setminus C)) \\ &= (\mathrm{Cl}(B \setminus C))^* \cup \mathrm{Cl}(C \setminus B) = \mathrm{Cl}(C \setminus B),\end{aligned}$$

в силу рівності $\mathrm{Cl}(B \setminus C) = B$ (дійсно, різниця $B \setminus \mathrm{Cl}(B \setminus C)$ є порожньою множиною, оскільки вона відкрита підмножина ніде не щільної множини $B \cap C$).

Таким чином, симетрична різниця $B \triangle C$ є множиною комутування для пари операторів $\mathrm{Cl}, *$ тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Cl}((B \cap C)^+) = \emptyset$, що еквівалентно замкненості перетину $B \cap C$. $\square$

Топологічний простір називається **nd-простором** [6] (англ. nodec space), якщо кожна його ніде не щільна множина є замкненою. Маємо наступну характеризацію nd-просторів в термінах множин комутування наших операторів.

Наслідок 4.17. *Топологічний простір є nd-простором тоді й тільки тоді, коли кожна множина комутування для пари* $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ *є також і множиною комутування для пари* $\mathrm{Cl}, *$.

Доведення. Необхідність даної умови прямо слідує із означення nd-простору та Теореми 4.16. Щоб довести її достатність, зауважимо, що для кожної ніде не щільної множини A, її доповнення $X \setminus A = X \triangle A$ є множиною комутування для пари операторів $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ (див. Теорему 2.13). Тому $X \setminus A$ є множиною комутування для пари $\mathrm{Cl}, *$, що за Теоремою 4.16 означає замкненість самої множини $A = X \cap A$. $\square$

Топологічний простір називається **розкладним** [10] (англ. resolvable), якщо його можна представити як диз'юнктне об'єднання двох всюди щільних множин. Інакше, простір є **нерозкладним** (англ. irresolvable). Далі, простір **сильно нерозкладний** [8] (англ. strongly irresolvable), якщо кожен його відкритий підпростір нерозкладний. В роботі [15] було показано, що топологічний простір є сильно нерозкладним тоді й тільки тоді, коли кожна його множина із порожньою внутрішністю є ніде не щільною (еквівалентно, кожна всюди щільна множина має всюди щільну внутрішність).

Твердження 4.18. *Нехай X топологічний простір. Тоді:*

1. *оператори* $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ *комутують на кожній відкритій множині тоді й тільки тоді, коли X екстремально незв'язний;*

2. *оператори* $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ *комутують на кожній ніде не щільній множині тоді й тільки тоді, коли X сильно нерозкладний.*

Доведення. Щоб довести перше твердження, зауважимо, що для довільної відкритої множини $A \subset X$ рівність $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A))$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Int} A$, що еквівалентно умові відкритості замикання $\operatorname{Cl} A$.

Аналогічно, для будь-якої множини $A \subset X$ із порожньою внутрішністю маємо $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$ тоді й тільки тоді, коли A ніде не щільна. Це доводить друге твердження. $\square$

Наслідок 4.19. *Оператори* Cl *та* Int *комутують на кожній множині в* X *тоді й тільки тоді, коли* X *є екстремально незв'язним та сильно нерозкладним.*

Доведення. Необхідність даної умови слідує із Твердження 4.18. Тепер ми покажемо достатність цієї умови. Знову, із Твердження 4.18 випливає, що Cl та Int комутують на відкритих множинах та множинах із порожньою внутрішністю. Отже, для довільної множини A, відкрита множина $\operatorname{Int} A$ та множина із порожньою внутрішністю A^* є множинами комутування для пари $\operatorname{Cl}, \operatorname{Int}$. Це означає, що їхнє (диз'юнктне) об'єднання $A = \operatorname{Int} A \sqcup A^*$ також є множиною комутування для пари $\operatorname{Cl}, \operatorname{Int}$ (оскільки цей клас множин замкнений відносно операції об'єднання множин, див. [12]). $\square$

Також слід зауважити, що властивості простору бути екстремально незв'язним або сильно нерозкладним є непорівнюваними. Дійсно, $\mathbb{R}$ із коскінченною топологією є **гіперзв'язним** (кожна непорожня відкрита множина є всюди щільною), а отже й екстремально незв'язним простором. При цьому, множина $\mathbb{Q}$, очевидно, має порожню внутрішність, але не є ніде не щільною. Аналогічно, розглянемо носій $X = \{a, b, c\}$ разом із заданою на ньому топологією $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Тоді простір X є сильно нерозкладним, оскільки одноточкова множина $\{c\}$ є єдиною множиною з порожньою внутрішністю, яка також є і ніде не щільною (бо вона замкнена). Однак, X не є екстремально незв'язним, оскільки відкрита множина $\{a\}$ має замикання $\operatorname{Cl}(\{a\}) = \{a, c\}$, яке не є відкритим.

Топологічний простір називається **субмаксимальним** (англ. submaximal), якщо кожна його всюди щільна множина є відкритою (еквівалентно, кожна множина із порожньою внутрішністю є замкненою). Маємо наступну характеризацію субмаксимальних просторів в термінах операторів $+, *$.

Твердження 4.20. *Топологічний простір є субмаксимальним тоді й тільки тоді, коли множина A^+ (еквівалентно, множина A^*) замкнена для всіх A.*

Доведення. $\Rightarrow$: Оскільки A^+ та A^* мають порожні внутрішності, то, в силу субмаксимальності простору, вони є замкненими.
$\Leftarrow$: Нехай A всюди щільна множина. Тоді $A^+ = X \setminus A$ замкнена, отже A відкрита. Еквівалентне твердження: якщо $\operatorname{Int} A = \emptyset$, то $A^* = A$ є замкненою. $\square$

Топологічний простір називається **досконало незв'язним** [6] (англ. perfectly disconnected), якщо він є T_0-простором (для кожної пари його різних точок існує окіл одної з них, який не містить іншу) та кожна пара його неперетинних множин не має спільних граничних точок. В роботі [1] була отримана наступна характеризація досконало незв'язних просторів.

Теорема 4.21. [1] *Простір є досконало незв'язним тоді й тільки тоді, коли він екстремально незв'язний та субмаксимальний.*

Використовуючи цей результат, ми наведемо іншу характеризацію досконало незв'язних просторів в термінах множин комутування для пари операторів $\mathrm{Cl}, *$.

Твердження 4.22. *Оператори Cl та $*$ комутують на кожній множині в X тоді й тільки тоді, коли X досконало незв'язний.*

Доведення. У світлі Теореми 4.21, необхідність даної умови випливає із другого та третього тверджень із Твердження 4.15.

Тепер ми покажемо достатність даної умови. Із означень безпосередньо випливає, що простір є субмаксимальним тоді й тільки тоді, коли він сильно нерозкладний nd-простір. Тому якщо X досконало незв'язний, то за Теоремою 4.21, оператори Cl та Int комутують на кожній його множині (див. Наслідок 4.19). Проте, X також і nd-простір. Звідси, застосовуючи Наслідок 4.17, отримаємо, що оператори Cl та $*$ теж комутують на кожній множині в X. $\square$

4.2 Пари Int, G для $G \in \{\mathrm{Ext}, \partial, +, *\}$

Твердження 4.23. *Для множини A наступні умови еквівалентні:*

1. *оператори* Int *та* Ext *комутують на A;*

2. *оператори* Cl *та ∂ комутують на $X \backslash A$;*

3. *A напіввідкрита.*

Доведення. Еквівалентність другої і третьої умови прямо слідує із Твердження 4.5. Тому достатньо довести еквівалентність першої та третьої умови. Спочатку зауважимо, що $\mathrm{Int}(\mathrm{Ext}\, A) = \mathrm{Ext}\, A$ в силу відкритості зовнішності $\mathrm{Ext}\, A$ для кожної множини A. Також, $\mathrm{Ext}(\mathrm{Int}\, A) = X \backslash \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$. Отже, Int та Ext комутують на A тоді й тільки тоді, коли $X \backslash \mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Ext}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$. Остання рівність еквівалентна рівності $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$, яка в свою чергу має місце тоді й тільки тоді, коли $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$. □

Наслідок 4.24. *Якщо A відкрита або $\mathrm{Int}\, A$ всюди щільна, то оператори* Int *та* Ext *комутують на A.*

Доведення. Якщо A відкрита, то, звісно, A напіввідкрита. Якщо $\mathrm{Int}\, A$ всюди щільна, то $A \subset X = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$, що знову означає напіввідкритість A. За Твердженням 4.23, оператори Int та Ext комутують на A. □

Наслідок 4.25. *Припустимо, що оператори* Int *та* Ext *комутують на множині A:*

1. *якщо A передзамкнена, то A замкнена;*

2. *якщо A всюди щільна, то її внутрішність $\mathrm{Int}\, A$ теж всюди щільна.*

Доведення. Оскільки Int та Ext комутують на A, то за Твердженням 4.23, A напіввідкрита множина, тобто $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$. Якщо A передзамкнена, то $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A) \subset A$. Отже, $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$ є замкненою множиною. Аналогічно, для всюди щільної множини A маємо $X = \mathrm{Cl}\, A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$, звідки й слідує всюди щільність внутрішності $\mathrm{Int}\, A$. □

Зауважимо, що Теорема 2.13 означає, що у зв'язному топологічному просторі X оператори Cl та Int комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли сама множина A або її доповнення $X\backslash A$ є ніде не щільною множиною. Також відомо, що клас множин комутування для операторів Cl та Int замкнений відносно операцій об'єднання множин, різниці множин та операції взяття межі множини (знову, див. [12]). Аналогічні наслідки можна отримати також і з Теореми 2.14.

Наслідок 4.26. *У зв'язному топологічному просторі X оператори* Int *та ∂ комутують на множині $A \neq X$ тоді й тільки тоді, коли A ніде не щільна.*

Наслідок 4.27. *Якщо A відкрито-замкнена або ніде не щільна, то оператори* Int *та ∂ комутують на A.*

Наслідок 4.28. *Якщо оператори* Int *та ∂ комутують на множинах A_1 та A_2, то* Int *та ∂ також комутують і на множинах $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$.*

Доведення. Якщо Int та ∂ комутують на множинах A_1, A_2, то за Теоремою 2.14 існує пара відкрито-замкнених множин B_1, B_2 та пара ніде не щільних множин C_1, C_2 із $A_i = B_i \cup C_i$ для $i = 1, 2$. Маємо, $A_1 \cup A_2 = (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2) = B \cup C$, де $B = B_1 \cup B_2$ відкрито-замкнена, а $C = C_1 \cup C_2$ ніде не щільна. Отже, Int та ∂ комутують на об'єднанні $A_1 \cup A_2$. Схожим чином,

$$A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap B_2) \cup ((C_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2)) = B' \cup C',$$

де $B' = B_1 \cap B_2$ відкрито-замкнена, а $C' = (C_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2)$ ніде не щільна (в силу $C' \subset C_1 \cup C_2$). Таким чином, Int та ∂ комутують і на перетині $A_1 \cap A_2$. □

Наслідок 4.29. *Припустимо, що оператори* Int *та ∂ комутують на множині A:*

1. *тоді A напівзамкнена та передзамкнена;*

2. *тоді* Int *та ∂ також комутують на множинах* $\mathrm{Cl}\, A, \mathrm{Int}\, A, \partial A, A^*$;

3. *якщо A напіввідкрита або передвідкрита, то A відкрито-замкнена;*

4. якщо A має порожню внутрішність, то A ніде не щільна.

Доведення. 1. Int та ∂ комутують на A, отже, із Теореми 2.14 випливає, що $A = B \cup C$, де B відкрито-замкнена, а C ніде не щільна множина. $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} C) = \emptyset$, $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} B) = B \subset A \Rightarrow \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \subset A$, що означає, що A напівзамкнена. Оскільки $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = B$, то $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Cl} B = B \subset A$, що еквівалентно тому, що A передзамкнена. Тим самим можна сказати, що A квазі-відкрита;

2. Розглянемо композиції операторів, взявши до уваги, що $\operatorname{Int}(\partial A) = \partial(\operatorname{Int} A)$:

   - $\operatorname{Cl} A$: Раніше доведено, що внутрішність границі замкненої множини є порожньою: $\operatorname{Int}(\partial(\operatorname{Cl} A)) = \operatorname{Int}((\operatorname{Cl} A)^*) = \emptyset$.
     Оскільки A є напівзамкненою, то

     $$\partial(\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)) = \partial(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}(\partial A) = \emptyset;$$

   - $\operatorname{Int} A$: Легко бачити, що в силу комутування Int та ∂ на A виконуються наступні рівності:
     $\operatorname{Int}(\partial(\operatorname{Int} A)) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(\partial A)) = \operatorname{Int}(\partial A)$,
     $\partial(\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A)) = \partial(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}(\partial A)$;

   - A^*: $A^* = \partial A \cap A$, із попереднього наслідку випливає, що Int та ∂ комутують на такій множині;

3. Розглянемо випадок, коли A напіввідкрита ($A \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$). Оскільки $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \subset A$, то $A = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$. Із пункта 1 цього доведення випливає, що $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = B \Rightarrow A = B$, а B відкрито-замкнена.
   Розглянемо випадок, коли A передвідкрита ($A \subset \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A)$). Аналогічно бачимо, що $A = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = B$, а B відкрито-замкнена;

4. Знову скористаємось тим, що $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = B$. Тоді якщо $B = \emptyset$, то $A = C$, а C ніде не щільна множина.

□

Твердження 4.30. *Для множини A наступні умови еквівалентні:*

1. оператори Int *та* $+$ *комутують на A;*

2. *оператори* Cl *та* Ext *комутують на* $X \backslash A$;

3. *внутрішність* $\operatorname{Int} A$ *замкнена.*

Доведення. Еквівалентність другої та третьої умови слідує із Твердження 4.1 та рівності $\operatorname{Int} A = X \backslash \operatorname{Cl}(X \backslash A)$ для всіх множин A. Тому достатньо довести еквівалентність першої та третьої умови. З Леми 4.14 випливає, що $\operatorname{Int}(A^+) = \emptyset$ для всіх множин A. Тому рівність $\operatorname{Int}(A^+) = (\operatorname{Int} A)^+$ еквівалентна $(\operatorname{Int} A)^+ = \emptyset$. За Твердженням 3.10, остання рівність має місце тоді й тільки тоді, коли внутрішність $\operatorname{Int} A$ замкнена. □

Наслідок 4.31. *Якщо оператори* Int *та* ∂ *комутують на множині* A, *то й оператори* Int *та* $+$ *також комутують на* A.

Доведення. Теорема 2.14 стверджує, що якщо Int та ∂ комутують на A, то $A = B \cup C$ для деякої відкрито-замкненої множини B та ніде не щільної множини C. Зокрема, внутрішність $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = B$ є замкненою множиною. Отже, за Твердженням 4.30, Int та $+$ теж комутують на A. □

Зауважимо, що імплікацію із Наслідку 4.31 не можна розвернути (для цього розглянемо множину $A = \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$).

Відмітимо, що рівності $\operatorname{Int}(A^*) = (\operatorname{Int} A)^* = \emptyset$ мають місце для всіх множин A (див. Лему 4.14).

Твердження 4.32. *Припустимо, що оператори* Int *та* $+$ *комутують на множині* A, *тоді:*

1. *оператори* Int *та* $+$ *комутують на таких множинах:*

$$\operatorname{Int} A, \operatorname{Ext} A, A^+, A^*;$$

2. *якщо вони комутують на множині* B, *то вони комутують і на перетині* $A \cap B$.

Доведення. 1. Оскільки $\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$, то $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A))$, очевидно, що оператори Int та $+$ комутують на $\operatorname{Int} A$.
$\operatorname{Ext}(\operatorname{Int} A) = X \backslash \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = X \backslash \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(\operatorname{Ext} A)$, за Твердженням 4.30, оператори Int та $+$ комутують на $\operatorname{Ext} A$.
Для A^+, A^* нагадаємо, що $\operatorname{Int}(A^+) = \operatorname{Int}(A^*) = \emptyset$;

2. Розпишемо

$$\begin{aligned}(\operatorname{Int}(A \cap B))^+ &= \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B) \backslash (\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B)\\ &= \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B) \backslash (\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} B)).\end{aligned}$$

Оскільки $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B) \subset (\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} B))$, то $(\operatorname{Int}(A \cap B))^+ = \emptyset$. І за Лемою 4.14, $\operatorname{Int}(A \cap B)^+ = \emptyset$.

□

4.3 Пари $F, G \in \{\operatorname{Ext}, \partial, +, *\}$

Теорема 4.33. *Для множини A наступні твердження еквівалентні:*

1. *оператори* Ext *та* ∂ *комутують на* A*;*
2. *оператори* Ext *та* $+$ *комутують на* A*;*
3. *оператори* Ext *та* $*$ *комутують на* A*;*
4. *A та її доповнення $X \backslash A$ є всюди щільними множинами.*

Доведення. $4 \Rightarrow 1$: Маємо, $\operatorname{Cl} A = X, \operatorname{Cl}(X \backslash A) = X$. Із Твердження 3.11 відомо, що якщо A та її доповнення $X \backslash A$ є всюди щільними множинами, то $\partial A = X$. $\operatorname{Ext} A = X \backslash \operatorname{Cl} A = \emptyset$, і аналогічно $\partial(\operatorname{Ext} A) = \emptyset$.
А в свою чергу $\operatorname{Ext}(\partial A) = \operatorname{Ext} X = \emptyset$. Отже, із 4 слідує 1;

$4 \Rightarrow 2$: Маємо, $\operatorname{Cl} A = X, \operatorname{Cl}(X \backslash A) = X$. $\operatorname{Ext} A = X \backslash \operatorname{Cl} A = \emptyset$, і аналогічно $(\operatorname{Ext} A)^+ = \emptyset$, тому залишається показати, що $\operatorname{Ext}(A^+) = \emptyset$. $\operatorname{Ext}(A^+) = \operatorname{Int}(X \backslash A^+) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A \backslash (\operatorname{Cl} A \backslash A)) = \operatorname{Int} A$. Скористаємось тим, що $\operatorname{Cl}(X \backslash A) = X$. Ліва частина рівняння не містить у собі $\operatorname{Int} A$, а права - містить, що означає, що $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Отже, із 4 слідує 2;

$4 \Rightarrow 3$: Маємо, $\operatorname{Cl} A = X, \operatorname{Cl}(X \backslash A) = X$. $\operatorname{Ext} A$ є відкритою, отже $(\operatorname{Ext} A)^* = \emptyset$, тому залишається показати, що $\operatorname{Ext}(A^*) = \emptyset$. Оскільки $\partial A = X$, то $\operatorname{Int} A = \emptyset$, а отже $\operatorname{Ext}(A^*) = \operatorname{Int}(X \backslash (A^*)) = \operatorname{Int}(X \backslash A \cup \operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}(X \backslash A)$, а це за Лемою 4.14 дорівнює $\emptyset$. Отже, із 4 слідує 3;

$1 \Rightarrow 4$: Маємо, $\mathrm{Ext}(\partial A) = X\setminus \mathrm{Cl}(\partial A) = X\setminus\partial A = X\setminus(\mathrm{Cl}\, A\setminus \mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Ext}\, A\cup\mathrm{Int}\, A$ та $\partial(\mathrm{Ext}\, A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Ext}\, A)\setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Ext}\, A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Ext}\, A)\setminus \mathrm{Ext}\, A$. Тому якщо Ext та ∂ комутують на A, то $\mathrm{Ext}\, A = \emptyset$, що означає всюди щільність A. Також в цьому випадку, $\mathrm{Int}\, A = \emptyset$. Остання рівність означає, що доповнення $X\setminus A$ також є всюди щільним. Отже, із 1 слідує 4. □

Наслідок 4.34. *Оператори* Ext *та* ∂ *(еквівалентно,* $\mathrm{Ext}, +$ *або* $\mathrm{Ext}, *$*) комутують на кожній множині* $A \neq \emptyset, X$ *тоді й тільки тоді, коли простір* X *є антидискретним.*

Твердження 4.35. *Припустимо, що оператори* Ext *та* ∂ *(еквівалентно,* $\mathrm{Ext}, +$ *або* $\mathrm{Ext}, *$*) комутують на множині* A*. Тоді:*

1. *оператори* Ext *та* ∂ *комутують на таких множинах:* A^+, A^*

2. *для будь-якого оператора* $F \in \{\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Ext}, \partial\}$ *справедливо*

$$\partial(\mathrm{Ext}(F(A))) = X\setminus(\mathrm{Ext}(\partial(F(A))));$$

3. *якщо оператори* Ext *та* ∂ *комутують на множині* B*, то*

$$\partial(\mathrm{Ext}(A\cup B)) = X\setminus(\mathrm{Ext}(\partial(A\cup B))).$$

Доведення.

1. За Теоремою 4.33, $A^+ = \mathrm{Cl}\, A\setminus A = X\setminus A$, і отже Ext та ∂ комутують на A^+. Аналогічно, в силу $\mathrm{Cl}(X\setminus A) = X$, маємо $\mathrm{Int}\, A = \emptyset$. Звідси $A^* = A$, й тому Ext та ∂ також комутують і на A^*.

2. Переберемо по черзі всі оператори F:

   - $F = \mathrm{Cl}$: Бачимо, що $\partial(\mathrm{Ext}(\mathrm{Cl}\, A)) = \partial(\mathrm{Ext}\, A) = \mathrm{Ext}(\partial A) = \emptyset$
     І в силу всюди щільності множини A, отримаємо $\mathrm{Ext}(\partial(\mathrm{Cl}\, A)) = \mathrm{Ext}(\partial X) = X$;

   - $F = \mathrm{Int}$: Розписавши Ext за означенням, маємо $\partial(\mathrm{Ext}(\mathrm{Int}\, A)) = \partial(X\setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)) = \partial(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)\setminus \mathrm{Int}\, A = (\mathrm{Int}\, A)^+$,
     а у випадку оберненої композиції:

$$\mathrm{Ext}(\partial(\mathrm{Int}\, A)) = X\setminus(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)\setminus(\mathrm{Int}\, A)) = X\setminus(\mathrm{Int}\, A)^+;$$

- $F = \mathrm{Ext}$: У даному випадку все досить просто розписується: $\partial(\mathrm{Ext}(X\setminus \mathrm{Cl}\, A)) = \partial(\mathrm{Ext}(\emptyset)) = \partial X = \emptyset$,
$\mathrm{Ext}(\partial(X\setminus \mathrm{Cl}\, A)) = \mathrm{Ext}(\emptyset) = X$;
- $F = \partial$: Візьмемо до уваги, що $\partial A = X$ за Твердженням 3.11: $\partial(\mathrm{Ext}(\partial A)) = \partial(\mathrm{Ext}\, X) = \emptyset$
$\mathrm{Ext}(\partial(\partial A)) = \mathrm{Ext}(\partial X) = \mathrm{Ext}(\emptyset) = X$;
$\mathrm{Ext}(\partial(\mathrm{Int}\, A)) = X\setminus(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)\setminus \mathrm{Int}\, A) = X\setminus(\mathrm{Int}\, A)^+$.

3. Розпишемо кожний вираз і переконаємося, що
$\partial(\mathrm{Ext}(A\cup B)) = \partial(X\setminus \mathrm{Cl}(A\cup B)) = \partial(A\cup B) = \mathrm{Cl}(A\cup B)\setminus \mathrm{Int}(A\cup B) = X\setminus \mathrm{Int}(A\cup B)$;
$\mathrm{Ext}(\partial(A\cup B)) = \mathrm{Ext}(X\setminus \mathrm{Int}(A\cup B)) = \mathrm{Int}(A\cup B)$.

□

Зауважимо, що Теорема 4.33 означає, що існування множини, на якій хоча б одна пара операторів Ext, ∂; $\mathrm{Ext}, +$ або $\mathrm{Ext}, *$ комутує, тягне за собою розкладність всього простору X.

Твердження 4.36. *Оператори ∂ та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли її границя $\partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$ ніде не щільна.*

Доведення. $\Rightarrow$: Припустимо, що ∂ та $*$ комутують на A. Тоді з рівності $\mathrm{Cl}(A^*) = \partial(A^*) = (\partial A)^* = \partial A\setminus \mathrm{Int}(\partial A)$ випливає $\mathrm{Cl}(A^*) \cap \mathrm{Int}(\partial A) = \emptyset$. Маємо,

$$\mathrm{Int}(\partial A) \subset \partial A\setminus \mathrm{Cl}(A^*) = \mathrm{Cl}\, A\setminus(\mathrm{Int}\, A \cup \mathrm{Cl}(A^*)) \subset \mathrm{Cl}\, A\setminus A = A^+.$$

Використовуючи Лему 4.14, можемо зробити висновок, що $\mathrm{Int}(\partial A) = \emptyset$. Іншими словами, межа $\partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$ ніде не щільна.

$\Leftarrow$: Легко бачити, що

$$\partial(A^*) = \mathrm{Cl}(A^*)\setminus \mathrm{Int}(A^*) = \mathrm{Cl}(A^*) = \mathrm{Cl}(A^*)\setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A^*)) = (\mathrm{Cl}(A^*))^* = (\partial A)^*.$$

□

Розглянемо напіввідкритий інтервал $A = [0, 1)$ в $\mathbb{R}$. Бачимо, що його границя $\partial A = \{0, 1\}$ ніде не щільна. Проте,

$$\partial(A^*) = \partial(\{0\}) = \{0\} \neq (\partial A)^* = (\{0, 1\})^* = \{0, 1\}.$$

Наслідок 4.37. *Якщо A замкнена або ніде не щільна, то оператори ∂ та $*$ комутують на A.*

Доведення. Якщо A замкнена, то $A^* = A \setminus \operatorname{Int} A$ теж замкнена. Також, із Твердження 3.13 випливає, що межа ∂A ніде не щільна. Логічно, що в цьому випадку $\operatorname{Cl}(A^*) = A^* = \partial A$. Далі, якщо A ніде не щільна, то $\partial A = \operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl}(A^*)$ теж ніде не щільна. За Твердженням 4.36, в обох випадках оператори ∂ та $*$ комутують на A. $\square$

Розглянемо носій $X = \{a, b, c\}$ із заданою на ньому топологією

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Тоді множина $A = \{a, b\}$ не є ані замкненою, ані ніде не щільною. Проте $\partial(A^*) = \partial(\{b\}) = \{b, c\} = (\partial A)^*$. Це означає, що імплікацію із Наслідку 4.37 не можна розвернути.

Наслідок 4.38. *Припустимо, що оператори ∂ та $*$ комутують на множині A:*

1. *тоді A квазі-відкрита;*
2. *тоді A можна представити як диз'юнктне об'єднання відкритої множини із ніде не щільною множиною;*
3. *якщо A відкрита, то A відкрито-замкнена;*
4. *якщо A має порожню внутрішність, то A ніде не щільна.*

Доведення. Якщо ∂ та $*$ комутують на A, то за Твердженням 4.36, множина $\partial A = \operatorname{Cl}(A^*)$ є ніде не щільною. Зокрема, поклавши $B = \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$, $C = \operatorname{Cl}(A^*)$ та застосувавши Лему 2.12, отримаємо

$$\begin{aligned}\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) &= \operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A \sqcup A^*)) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) \cup \operatorname{Cl}(A^*)) \\ &= \operatorname{Int}(B \cup C) = \operatorname{Int} B = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)) \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A).\end{aligned}$$

Далі, множина $A^* \subset \partial A$ є ніде не щільною. Отже, $A = \operatorname{Int} A \sqcup A^*$ є диз'юнктним об'єднанням відкритої множини із ніде не щільною множиною. Якщо, додатково, A відкрита множина, то $\partial A = \operatorname{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

Це означає, що A відкрито-замкнена. Нарешті, якщо A має порожню внутрішність, то $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl}(A^*)$ ніде не щільна. Тобто, сама множина A теж ніде не щільна. $\square$

Наслідок 4.39. *Якщо оператори ∂ та $*$ комутують на множині A, то ∂ та $*$ також комутують і на множинах $\operatorname{Cl} A, \partial A, A^+, A^*$.*

Доведення. Слідує із Наслідку 4.37, бо $\operatorname{Cl} A$ замкнена, а ∂, A^+, A^* ніде не щільні множини. $\square$

В роботі [13] було показано, що кожна напіввідкрита множина може бути зображена як (диз'юнктне) об'єднання відкритої множини із ніде не щільною множиною (див. третє твердження Наслідку 4.38). Проте, властивості бути напіввідкритою множиною або бути множиною комутування для операторів ∂ та $*$ є непорівнюваними (просто розглянемо довільну непорожню множину із порожньою внутрішністю та відкриту множину, яка не є замкненою). Також слід зауважити, що, незважаючи на друге та четверте твердження Наслідку 4.38, властивості бути множиною комутування для пари $\operatorname{Cl}, *$ або для пари $\partial, *$, теж непорівнювані. Дійсно, $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ в $\mathbb{R}$ є множиною комутування для пари $\operatorname{Cl}, *$ в силу $\operatorname{Cl}(A^*) = \operatorname{Cl}(\emptyset) = \emptyset = (\mathbb{R})^* = (\operatorname{Cl} A)^*$. Проте, $\partial(A^*) = \emptyset \neq \{0\} = (\partial A)^*$. З іншого боку, розглянемо носій $X = \{a, b, c, d, e\}$ із заданою на ньому топологією

$$\tau = \{\emptyset, X, \{e\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Тоді для множини $A = \{a, c, d\}$ матимемо $\partial(A^*) = \partial(\{a\}) = \{a, b\} = (\{a, b\})^* = (\partial A)^*$. Отже, A є множиною комутування для пари $\partial, *$. Однак, $\operatorname{Cl}(A^*) = \partial(A^*) = \{a, b\} \neq \{a\} = (\{a, b, c, d\})^* = (\operatorname{Cl} A)^*$.

Наслідок 4.40. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

1. *оператори $\operatorname{Cl}, \partial$ комутують на кожній множині;*
2. *оператори $\operatorname{Int}, \operatorname{Ext}$ комутують на кожній множині;*
3. *оператори $\operatorname{Int}, \partial$ комутують на кожній множині;*
4. *оператори $\partial, *$ комутують на кожній множині;*

5. X дискретний.

Доведення. Випливає із характеризацій множин комутування для відповідних пар операторів. $\square$

Твердження 4.41. *Оператори $+$ та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли $\partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $(A^+)^* = A^+$, оскільки A^+ має порожню внутрішність для всіх A (див. Лему 4.14). Також, $(A^*)^+ = \mathrm{Cl}(A^*)\backslash A^* = \mathrm{Cl}(A^*)\backslash(A\backslash \operatorname{Int} A) = (\mathrm{Cl}(A^*)\backslash A)\cup(\mathrm{Cl}(A^*)\cap \operatorname{Int} A) = \mathrm{Cl}(A^*)\backslash A$ в силу $\mathrm{Cl}(A^*)\cap \operatorname{Int} A = \emptyset$ (див. Лему 3.3). Отже, оператори $+$ та $*$ комутують на A тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Cl}\, A\backslash A = A^* = \mathrm{Cl}(A^*)\backslash A$. Остання рівність еквівалентна рівності $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}(A^*) \cup A$, яка в свою чергу має місце тоді й тільки тоді, коли $\partial A = \mathrm{Cl}\, A\backslash \operatorname{Int} A \subset (\mathrm{Cl}(A^*) \cup A)\backslash \operatorname{Int} A \subset \mathrm{Cl}(A^*)$. Щоб завершити доведення, зауважимо, що включення $\mathrm{Cl}(A^*) \subset \partial A$ виконується для всіх множин A, оскільки границя ∂A є замкненою множиною, яка містить $A^* = A\backslash \operatorname{Int} A$. $\square$

Наслідок 4.42. *Якщо оператори ∂ та $*$ комутують на A, то оператори $+$ та $*$ теж комутують на A.*

Доведення. Прямо слідує із Твердження 4.36 та Твердження 4.41. $\square$

Наслідок 4.43. *Якщо A передзамкнена множина (зокрема, якщо A або її внутрішність $\operatorname{Int} A$ замкнена), то оператори $+$ та $*$ комутують на A.*

Доведення. Якщо A передзамкнена, то $\mathrm{Cl}(\operatorname{Int} A) \subset A$. Маємо,

$$\begin{aligned}\partial A = \mathrm{Cl}\, A\backslash \operatorname{Int} A = \mathrm{Cl}(A^* \cup \operatorname{Int} A)\backslash \operatorname{Int} A = (\mathrm{Cl}(A^*) \cup \mathrm{Cl}(\operatorname{Int} A))\backslash \operatorname{Int} A \\ \subset (\mathrm{Cl}(A^*) \cup A)\backslash \operatorname{Int} A \subset \mathrm{Cl}(A^*).\end{aligned}$$

За Твердженням 4.41, $+$ та $*$ комутують на A. $\square$

Розглянемо носій $X = \{a, b, c\}$ разом із заданою на ньому топологією

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}.$$

Тоді множина $A = \{a, c\}$ не передзамкнена в силу $\mathrm{Cl}(\operatorname{Int} A) = \mathrm{Cl}(\{a\}) = X$. Однак, $(A^*)^+ = (\{c\})^+ = \emptyset = (A^+)^*$. Отже, імплікацію із Наслідку 4.43 не можна розвернути.

Наслідок 4.44. *Якщо оператори* Int *та* $+$ *комутують на множині* A, *то оператори* $+$ *та* $*$ *комутують на множинах* $A, \operatorname{Int} A$.

Доведення. Слідує із Твердження 4.30 та Наслідку 4.43. $\square$

Наслідок 4.45. *Припустимо, що* A *відкрита множина така, що оператори* $+$ *та* $*$ *комутують на* A. *Тоді* A *відкрито-замкнена.*

Доведення. $\operatorname{Int} A = A, (A^+)^* = (A^*)^+$, за Твердженням 4.41, $\partial A = \operatorname{Cl}(A^*)$. $\operatorname{Cl}(A \setminus \operatorname{Int} A) = \operatorname{Cl}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \partial A = \emptyset$, що й означає, що A відкрито-замкнена. $\square$

Топологічний простір X називається **квазі-дискретним** (або **простором розбиття**), якщо його топологія має базу, яка є розбиттям X. Очевидно, що простір є квазі-дискретним тоді й тільки тоді, коли кожна його відкрита множина є замкненою (еквівалентно, кожна замкнена множина є відкритою).

Наслідок 4.46. *Для топологічного простору* X *наступні умови еквівалентні:*

1. *оператори* $\operatorname{Cl}, \operatorname{Ext}$ *комутують на кожній множині;*
2. *оператори* $\operatorname{Int}, \partial$ *комутують на кожній відкритій (еквівалентно, напіввідкритій) множині;*
3. *оператори* $\operatorname{Int}, +$ *комутують на кожній множині;*
4. *оператори* $+, *$ *комутують на кожній відкритій множині;*
5. X *квазі-дискретний.*

Доведення. Із Твердження 4.1 прямо слідує, що з першої умови випливає п'ята. Також, поєднавши Лему 2.12 із Теоремою 2.13, можна зробити висновок, що із другої умови також випливає п'ята. Далі, із Твердження 4.30 слідує, що з третьої умови випливає п'ята. Нарешті, якщо оператори $+, *$ комутують на відкритій множині A, то $\partial A = \operatorname{Cl}(A^*) = \operatorname{Cl}(\emptyset) = \emptyset$. Тобто, множина A відкрито-замкнена (див. Твердження 4.41). Отже, із четвертої умови також випливає п'ята.

Тепер припустимо, що простір X є квазі-дискретним. Тоді для будь-якої множини $A \subset X$ її замикання $\mathrm{Cl}\, A$ є відритим. Таким чином, оператори $\mathrm{Cl}, \mathrm{Ext}$ комутують на A (знову, див. Твердження 4.1). Тепер зафіксуємо довільну напіввідкриту множину $A \subset X$. Маємо, $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}\, A$. Отже, A відкрита а тому й відкрито-замкнена множина. За Теоремою 2.13, оператори Int, ∂ комутують на A. Також, оскільки внутрішність $\mathrm{Int}\, A$ довільної множини $A \subset X$ замкнена, то оператори $\mathrm{Int}, +$ теж комутують на A (див. Твердження 4.30). Нарешті, для кожної відкритої множини $A \subset X$ виконано $\partial A = \emptyset = \mathrm{Cl}(A^*)$, звідки слідує, що оператори $+, *$ комутують на A. Таким чином, із п'ятої умови випливають перші чотири. □

4.4 Задача $F(G(A)) = A$ для $F, G \in \{\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Ext}, \partial, +, *\}$

Твердження 4.47. *У непорожньому топологічному просторі X для множини A наступні умови еквівалентні:*

1. $\mathrm{Int}(A^*) = A$;
2. $(\mathrm{Int}\, A)^* = A$;
3. $\mathrm{Int}(A^+) = A$;
4. $\mathrm{Int}(\partial A) = A$;
5. $\mathrm{Cl}(A^+) = A$;
6. $(\mathrm{Cl}\, A)^+ = A$;
7. $(A^+)^* = A$;
8. $(\mathrm{Ext}\, A)^* = A$;
9. $(\partial A)^+ = A$;
10. $\partial(A^+) = A$;
11. $(\mathrm{Int}\, A)^+ = A$;
12. $\partial(\mathrm{Int}\, A) = A$;

13. $A = \emptyset$.

Доведення. $1, 2, 3, 6, 8, 9 \Rightarrow 13$: Оскільки завжди

$$\operatorname{Int}(A^*) = (\operatorname{Int} A)^* = \operatorname{Int}(A^+) = (\operatorname{Cl} A)^+ = (\operatorname{Ext} A)^* = (\partial A)^+ = \emptyset,$$

то твердження тривіальне;
$4 \Rightarrow 13$: $\operatorname{Int}(\partial A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \setminus \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = A$
Очевидно, що $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A)$ та $\operatorname{Int} A \subset A$, але оскільки за умовою справедливо $A \cap \operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = \emptyset$, то $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Зауважимо, що $A = \operatorname{Int}(\partial A) \Rightarrow A$ відкрита, тобто $A = \operatorname{Int} A = \emptyset$;
$5 \Rightarrow 13$: легко переконатися, що $\operatorname{Cl} A \setminus A$ є підмножиною $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A \setminus A)$, але A не є підмножиною $\operatorname{Cl} A \setminus A$, а отже не може бути непорожньою підмножиною $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A \setminus A)$, отже, $A = \emptyset$;
$7 \Rightarrow 13$: нагадаємо, що $(A^+)^* = A^+$, а отже: $A^+ = A \Leftrightarrow A = \emptyset$;
$10 \Rightarrow 13$: оскільки $\partial(A^+) = \operatorname{Cl}(A^+)$, то доведення аналогічне випадку $5 \Rightarrow 13$;
$11, 12 \Rightarrow 13$: оскільки $\operatorname{Int} A$ відкрита, то $(\operatorname{Int} A)^+ = \partial(\operatorname{Int} A)$. За Твердженням 3.13 A є замкненою та ніде не щільною множиною. Підставивши в вираз $(\operatorname{Int} A)^+ = A$ таку множину, одержимо $A = \emptyset$;

$\forall N \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, 13 \Rightarrow N$: твердження тривіальні й не потребують додаткових пояснень. □

Твердження 4.48. *У непорожньому топологічному просторі X для множини A наступні умови еквівалентні:*

1. $\operatorname{Cl}(A^*) = A$;

2. $(\operatorname{Cl} A)^* = A$;

3. $\operatorname{Cl}(\partial A) = A$;

4. $\partial(A^*) = A$;

5. A замкнена та ніде не щільна.

Доведення. $1 \Rightarrow 5$: легко переконатися, що із рівності $\operatorname{Cl}(A \setminus \operatorname{Int} A) = A$ випливає $\operatorname{Int} A = \emptyset$ та той факт, що A є замкненою множиною;
$2 \Rightarrow 5$: зауваживши, що $(\operatorname{Cl} A)^* = \partial(\operatorname{Cl} A)$ і застосувавши Твердження 3.13,

бачимо, що A є замкненою та ніде не щільною множиною;
$3 \Rightarrow 5$: оскільки межа є замкненою, то умова набуває такого вигляду: $\partial A = A$. За Твердженням 3.12 A є замкненою та ніде не щільною;
$4 \Rightarrow 5$: очевидно, що $\partial(A^*) = \mathrm{Cl}(A^*)$, а випадок $\mathrm{Cl}(A^*) = A$ уже описаний;
$5 \Rightarrow 1, 4$: якщо підставити в вираз $\mathrm{Cl}(A \setminus \mathrm{Int}\, A)$ замкнену, ніде не щільну множину, то одержимо $\mathrm{Cl}(A \setminus \mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Cl}\, A = A$;
$5 \Rightarrow 2$: легко бачити, що для замкненої ніде не щільної множини $A(\mathrm{Cl}\, A) = A^* = A \setminus \mathrm{Int}\, A = A$;
$5 \Rightarrow 3$: за Твердженням 3.12, $A = \partial A = \mathrm{Cl}(\partial A)$. □

Твердження 4.49. *У непорожньому топологічному просторі X для множини A наступні рівності неможливі:*

1. $\mathrm{Int}(\mathrm{Ext}\, A) = A$;

2. $\mathrm{Ext}(\mathrm{Int}\, A) = A$;

3. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Ext}\, A) = A$;

4. $\mathrm{Ext}(\mathrm{Cl}\, A) = A$.

Доведення. 1. $\mathrm{Int}(\mathrm{Ext}\, A) = \mathrm{Ext}\, A$. За Твердженням 3.12 $\mathrm{Ext}\, A \neq A$;

2. Із $X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A) = A$ випливає, що $\mathrm{Int}\, A = \emptyset, A = X$, а за умовою X не є порожнім;

3. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Ext}\, A) \supset \mathrm{Ext}\, A \not\supset A$;

4. Оскільки $\mathrm{Ext}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Ext}\, A$, то знову має місце Твердження 3.12.

□

Твердження 4.50. *У непорожньому топологічному просторі X для множини A виконуетьса:*

1. $\mathrm{Ext}(A^+) = A$ *тоді й лише тоді, коли A відкрита та всюди щільна;*

2. $\mathrm{Ext}(A^*) = A$ *тоді й лише тоді, коли $A = X$;*

Доведення. 1. $\Rightarrow$: Оскільки зовнішність відкрита за означенням, то A теж відкрита, а отже $A^+ = \partial A$ є замкненою множиною. Із умови випливає, що $A = X \backslash A^+ = X \backslash \partial A$, а значить $X = A \cup \partial A = \operatorname{Cl} A$, що означає, що A всюди щільна.

$\Leftarrow$: В силу щільності та відкритості A,

$$\operatorname{Ext}(A^+) = \operatorname{Ext}(X \backslash A) = \operatorname{Int}(X \backslash (X \backslash A)) = \operatorname{Int} A = A$$

2. $\Rightarrow$: Множина A відкрита, а отже $A^* = \emptyset$. Взявши $A = \operatorname{Ext}(A^*)$, бачимо, що $A = X$.

$\Leftarrow$: Якщо $A = X$, то $A^* = \emptyset$, а отже $\operatorname{Ext}(A^*) = X = A$.

□

Наступні рівності досліджувалися в роботі Чепмена [4], тому наводимо їх без доведення.

Твердження 4.51. [4] *У непорожньому топологічному просторі X для множини A виконується:*

1. $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = A$ *тоді й лише тоді, коли A є відкритою та $A = B \backslash C$, де B - деяка замкнена множина, а C має порожню внутрішність в підпросторі $X \backslash A$;*

2. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} A) = A$ *тоді й лише тоді, коли A є замкненою та $A = B \cup C$, де B - деяка відкрита множина, а C має порожню внутрішність в підпросторі A.*

5 Висновки

У даній курсовій роботі розглянуто властивості наступних шести операторів $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \mathrm{Ext}, \partial, *, +$ між множинами в топологічному просторі.

У другому розділі наведено основні означення та результати, які використовуються надалі в роботі.

Третій розділ присвячений опису основних властивостей цих шести операторів, а також доведенню кількох технічних результатів. Зокрема, у третьому розділі описано множини A, які задовольняють одну з наступних операторних рівностей: $F(A) = \emptyset, F(A) = X, F(A) = A, F(A) = G(A)$.

Основна увага в роботі приділена задачі опису множин комутування для усіх можливих пар операторів. В четвертому розділі роботи ця задача повністю вирішена. За допомогою доведених результатів, отримано нові характеризації екстремально незв'язних, досконало незв'язних, сильно нерозкладних та nd-просторів.

В майбутньому планується дослідити задачу опису множин комутування для ширшої кількості пар операторів (наприклад, для операторів похідної множини та ізольованих точок множини), а також розглянути інші типи операторних рівнянь в топологічних просторах не тільки для пар, але й для трійок (рівняння типу $F(G(A)) = H(A)$) та четвірок операторів (рівняння типу $F(G(A)) = H(K(A))$).

Література

[1] G. Bezhanishvili, L. Esakia and D. Gabelaia, Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces, *Stud. Logica* **81(3)** (2005), 325–355.

[2] M. Bowron and S. Rabinowitz, Problem 10577: closure, complement and arbitrary union, *Amer. Math. Monthly* **104(2)** (1997), 169.

[3] M. Bowron, Problem 11059: closure, complement and union, *Amer. Math. Monthly* **111(1)** (2004), 64–65.

[4] T. A. Chapman, A further note on closure and interior operators, *Amer. Math. Monthly* **69(6)** (1962), 524–529.

[5] A. Csaszar, γ-quasi-open sets, *Stud. Sci. Math. Hung.* **38(1-4)** (2001), 171-176.

[6] E.K. van Douwen, Applications of maximal topologies, *Topology Appl.* **51** (1993), 125–139.

[7] N. Elez and O. Papaz, The new operators in topological space, *Math. Morav.* **17-2** (2013), 63–68.

[8] J. Foran and P. Liebnitz, A characterization of almost resolvable spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **40(1)** (1991), 136–141.

[9] H. Gabai, The exterior operator and boundary operators, *Amer. Math. Monthly*, **71**, (1964), 1029—1031.

[10] E. Hewitt, A problem of set-theoretic topology, *Duke Math. J.* **10** (1943), 309–333.

[11] C. Kuratowski, Sur l'operation A de l'Analysis Situs, *Fund. Math.* **3** (1922), 182–199.

[12] N. Levine, On the commutivity of the closure and interior operators in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **68(5)** (1961), 474–477.

[13] N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **70(1)** (1963), 36–41.

[14] A.S. Mashhour, M.E. Abd El-Monsef and S.N. ElDeeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt* **53** (1982), 47–53.

[15] D. Rose, K. Sizemore and B. Thurston, Strongly irresolvable spaces, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2006** (2006), 1–12.

[16] B.M. Scott and Z. Robinson, The boundary topology of a space, *Amer. Math. Monthly* **89(5)** (1982), 307–309.

[17] D.H. Staley, On the commutativity of the boundary and interior operators in a topological space, *Ohio J. Sci.* **68(2)** (1968), 84.