

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики



**ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ КРИВОЇ ТА ПОВЕРХНІ
«ПОСМІШКИ ВОЛАТИЛЬНОСТІ»
ПРИ ОЦІНЮВАННІ ОПЦІОНІВ**

Курсова робота
за спеціальністю 113 “Прикладна математика” 6.040301

Керівник курсової роботи
к.ф.-м.н., доц. Щестюк Н.Ю.

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала студент

Міщишин А.О.

“ ____ ” _____ 2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри інформатики,
д.тех.н., доц.
_____ А. М. Глибовець
(підпис)
„____” _____ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

студенту Міщишин Анастасія Олександрівні факультету Інформатики курсу 4
ТЕМА Побудова та аналіз кривої та поверхні «посмішки» волатильності при
оцінюванні опціонів

Зміст курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Вступ

1. Основні дифузійні моделі оцінювання

1.1 Поняття опціону, його структура та види

1.2 Перші дифузійні моделі оцінювання опціонів

1.3 Поняття «посмішки» волатильності

2. Модель Блека – Шоулза

2.1 Математична постановка моделі Блека – Шоулза

2.2 Використання моделі Блека – Шоулза

2.3 Недоліки моделі Блека – Шоулза

3. «Посмішки» волатильності при оцінюванні акцій Tesla

3.1 Загальний аналіз та розрахунок волатильності

3.2 Розрахунок ціни за формулою Блека – Шоулза

3.3 Розрахунок прихованої волатильності

3.4 Побудова та аналіз кривої та поверхні волатильності

Висновки

Список літератури

Дата видачі „____” _____ 2020 р. Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Тема: Побудова та аналіз кривої та поверхні «посмішки» волатильності при оцінюванні опціонів.

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на дипломну роботу.	16.11.2019	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи.	17.11.2019	
3.	Виконати аналіз методів розрахунку прихованої волатильності	02.12.2019	
3.	Розробка алгоритму підрахунку справедливої ціни за формулою Блека - Шоулза	20.12.2019	
4.	Підрахунок за розробленим алгоритмом	17.01.2020	
5.	Застосування розробленого алгоритму до даних акцій компанії Тесла	16.02.2020	
6.	Виконання порівняльного аналізу результатів, отриманих за допомогою розробленого алгоритму, та існуючих результатів.	25.03.2020	
7.	Написання пояснювальної роботи.	01.04.2020	
8.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	05.04.2020	
8.	Аналіз отриманих результатів з керівником, написання доповіді та обговорення.	06.04.2020	
10.	Корегування роботи за результатами попереднього обговорення.	10.04.2020	
11.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	17.04.2020	

Студент _____

Керівник _____

“ ”

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	5
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1: Основні дифузійні моделі оцінювання опціонів.....	9
1.1 Поняття опціону, його структура та види.....	9
1.2 Перші дифузійні моделі оцінювання опціонів.....	12
1.3 Поняття «посмішки» волатильності	13
РОЗДІЛ 2: Модель Блека – Шоулза.....	17
2.1 Математична постановка моделі Блека – Шоулза.....	17
2.2 Використання моделі Блека – Шоулза.....	19
2.3 Недоліки моделі Блека – Шоулза.....	21
РОЗДІЛ 3: «Посмішки» волатильності при оцінюванні акцій Tesla.....	22
3.1 Загальний аналіз та розрахунок волатильності.....	22
3.2 Розрахунок ціни за формулою Блека – Шоулза.....	32
3.3 Розрахунок прихованої волатильності.....	39
3.4 Побудова та аналіз кривої та поверхні волатильності	41
ВИСНОВКИ	49
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	51

АНОТАЦІЯ

Курсова робота присвячена дослідженню такого поняття як «посмішка» волатильності при оцінюванні опціонів, її аналізу та побудові, а також вивченню функціонування сучасних фондових ринків, аналізу моделей оцінювання опціонів та їх застосування. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. У вступі пояснюється причина потреби аналізу та побудови «посмішки» волатильності, актуальність теми. У першому розділі розглядаються основні поняття та перші дифузійні моделі оцінювання опціонів. Другий розділ присвячений моделі Блека – Шоулза. Третій розділ присвячений аналізу опціонів компанії «Tesla», знаходженню історичної та прихованої волатильності, розрахунку справедливої ціни за моделлю Блека – Шоулза в середовищі Google Colab на мові програмування Python, побудові та аналізу кривої та поверхні волатильності. У списку використаної літератури вказані джерела, що використовувалися для дослідження даної теми.

Ключові слова: волатильність, дифузійні моделі, модель Блека – Шоулза, європейський опціон, «пут», «колл».

ВСТУП

Перша опціонна біржа була заснована у 1973 році у Чикаго та за перші п'ять років інвестори досягли такого успіху, що укладали опціонні угоди на купівлю – продаж більше 10 мільйонів акцій щодня.

Торгівля є рушійною силою економіки, а з розвитком технологій та товарного виробництва все частіше використовуються кредитні кошти, які виплачуються в розстрочку, цінні папери та деривативи. Окрім термінових угод на купівлю чи продаж звичайних акцій існують опціонні контракти на облігації, товари, фондові індекси, іноземну валюту тощо.

За таких умов для ефективної торгівлі стає необхідним аналіз цін та інших показників цінних паперів, тому використання методів та моделей оцінки опціонів відіграє одну з найважливіших ролей в системному аналізі інвестиційної діяльності підприємства. Цілком успішно можна проводити операції з опціонами, користуючись тим ж знаннями та вміннями, що і на ринку базових активів, але діапазон використання опціонів значно ширше.

Блек, Шоулз та Мертон першими знайшли можливість інтерпретувати акцію як опціон для окремої фірми. Після закінчення терміну кредитування, якщо вартість фірми стане меншою від номінальної вартості боргу, акціонери мають право, але не зобов'язані, погасити кредит. Після чого з'явилася можливість використовувати такий метод для оцінювання акцій, якщо ніхто не торгується.

Модель Блека – Шоулза змінила загальний підхід до оцінювання опціонів, оскільки дала можливість уникати суб'єктивно – інтуїтивних оцінок при визначенні ціни і сформулювати теоретичну базу.

У цій роботі розглядаються модель Блека – Шоулза для розрахунку справедливої ціни опціону та поняття «посмішки» волатильності, її роль при оцінюванні опціонів.

Актуальність теми базується на тому, що торгівля опціонами набирає обертів, тому оцінювання опціонів має значний вплив на розвиток окремих світових підприємств та відповідно на економіку у світі.

Метою та завданням дослідження є аналіз і удосконалення моделі Блека-Шоулза з урахуванням реальної дійсності.

Постановка завдання:

1. Розглянути основні дифузійні моделі, а також формулу Блека – Шоулза;
2. Виявити недоліки дифузійної моделі Блека – Шоулза;
3. Дати визначення «смайл – ефекту»;
4. На основі реального статистичного матеріалу обчислити волатильність, справедливую ціну опціону за формулою Блека – Шоулза, приховану волатильність;
5. Показати графічно та проінтерпретувати криву прихованої волатильності, тобто «смайл – ефект»;
6. Побудувати та проінтерпретувати поверхню прихованої волатильності;
7. Порівняти результати дослідження з результатами, одержаними за допомогою «опціонних калькуляторів».

Методи дослідження: модель Блека – Шоулза.

Практичне значення отриманих результатів: отримані результати можуть допомогти підприємцям визначати приховану волатильність, справедливую ціну опціону, проаналізувати криву та поверхню прихованої волатильності, щоб якнайвигідніше скористатися опціонами.

Робота складається з трьох розділів. У першому розділі сформульовані поняття опціону та «посмішки» волатильності, розглянуті основні дифузійні моделі. У другому розділі детально розглянута модель Блека – Шоулза, її переваги та недоліки. Третій розділ присвячено прикладу аналізу опціонів компанії «Tesla», розрахунку справедливої ціни за формулою Блека – Шоулза, та побудові «посмішки» волатильності на основі статистичних даних, що взяті з сайту NASDAQ, що є американським позабіржевим ринком, що спеціалізується на акціях високотехнологічних компаній.

РОЗДІЛ 1 Основні дифузійні моделі оцінювання опціонів

1.1 Поняття опціону, його структура та види

Опціоном називають контракт між двома особами, відповідно до якого, перша особа дає другій особа право в межах визначеного періоду часу купити або продати актив за визначеною ціною [2, ст. 42]. Особа, що отримала опціон, називається покупцем опціону, а особа, яка продала опціон, називається продавцем опціону [2, ст. 42].

Найбільш поширений опціонний контракт – це опціон на акції.

Коли власник опціону користується правом купити акції, тобто актив, що є предметом опціону (англ. *underlying asset*), він виконує опціон (англ. *exercising an option*) [4, ст. 56].

Ціна угоди називається ціною виконання або ж «страйк» (англ. *exercise price, striking price*) [4, ст. 56].

Також розрізняють такі поняття як, опціон «в грошах» та опціон «поза грошей» – у першому випадку ціна акції більше за ціну виконання, а другому випадку ціна акції менше ціни виконання [2, ст. 42].

Останній день, коли можна купити акції – це дата закінчення терміну контракту (англ. *maturity date*) [4, ст. 56].

Власник опціону має право купити акції (активи), а продавець зобов'язаний продати їх на вимогу власника. Покупець опціону має право на відмову від угоди. За надану можливість вибору покупець опціону сплачує продавцю премію.

З точки зору термінів виконання опціони поділяються на: американський опціон, який може бути виконаний у будь-який день до

закінчення терміну контракту або у останній день, та європейський опціон, який здійснюється тільки в день закінчення контракту [2, ст. 51]..

Існують два види опціонів: опціон на покупку – «колл» (англ. call) – що надає право власникові купити цінні папери за встановленою у контракті ціною або відмовитися від такої купівлі та опціон на продаж – «пут» (англ. put) – що надає право продати цінні папери або відмовитися від їх продажу [4, ст. 59].

Інвестору вигідно купувати опціон «колл», якщо очікує зростання курсу цінних паперів або купує опціон «пут», якщо розраховує на спадання курсу, оскільки збільшення страйкової ціни, як і його поточної ринкової ціни активу, ведуть до зростання цін на «колл» опціони та падіння цін на «пут» опціони [1]. А зі збільшення коливань цін на ринку збільшується ціна на опціони обох видів, оскільки чим більше коливання цін, тим невизначеніша майбутня ринкова ситуація, тобто більше ризиковість продажу опціонів [5, ст. 111 - 114].

На ринку цінних паперів особа, що купує цінні папери, при укладанні угод відкриває довгу позицію, а особа, що продає папери – коротку [5, ст. 97]. Покупець опціону займає довгу позицію, продавець – коротку.

В операціях з опціонами можливі чотири позиції: довга за опціоном «колл», довга за опціоном «пут», коротка за опціоном «колл», коротка за опціоном «пут» [5, ст. 97]. Зростання короткострокових процентних безризикових ставок на ринку призводить до зростання цін на «колл» опціони та зниження цін на «пут» опціони, а наявність грошових виплат протягом періоду дії опціону призводить до зростання цін на «пут» опціони і падіння цін на «колл» опціони [1].

Опціони з більшим терміном дії мають ціну вищу, ніж короткострокові опціони, оскільки тоді існують ризики, що пов'язані з часом [5, ст. 115].

Між «колл» та «пут» опціонами на один актив та з однаковим терміном виконання існує зв'язок, що називається паритетом однакових «пут» та «колл» опціонів: якщо від вартості «пут» опціону відняти вартість «колл» опціону, отримаємо загальну суму вартості поточної ціни страйк та поточної вартості дивідендів без поточної вартості відповідних активів [5, ст. 121].

Таке співвідношення справедливе для європейських опціонів і лише приблизно виконується для американських опціонів [14]. Невиконання такого співвідношення означає існування можливості арбітражу.

1.2 Основні дифузійні моделі оцінювання опціонів

Існує значна кількість моделей оцінювання вартості опціонів на акції, найвідоміші з них це біноміальна модель оцінювання опціонів або її ще називають модель Кокса – Росса – Рубінштейна, модель Блека – Шоулза та метод Монте – Карло.

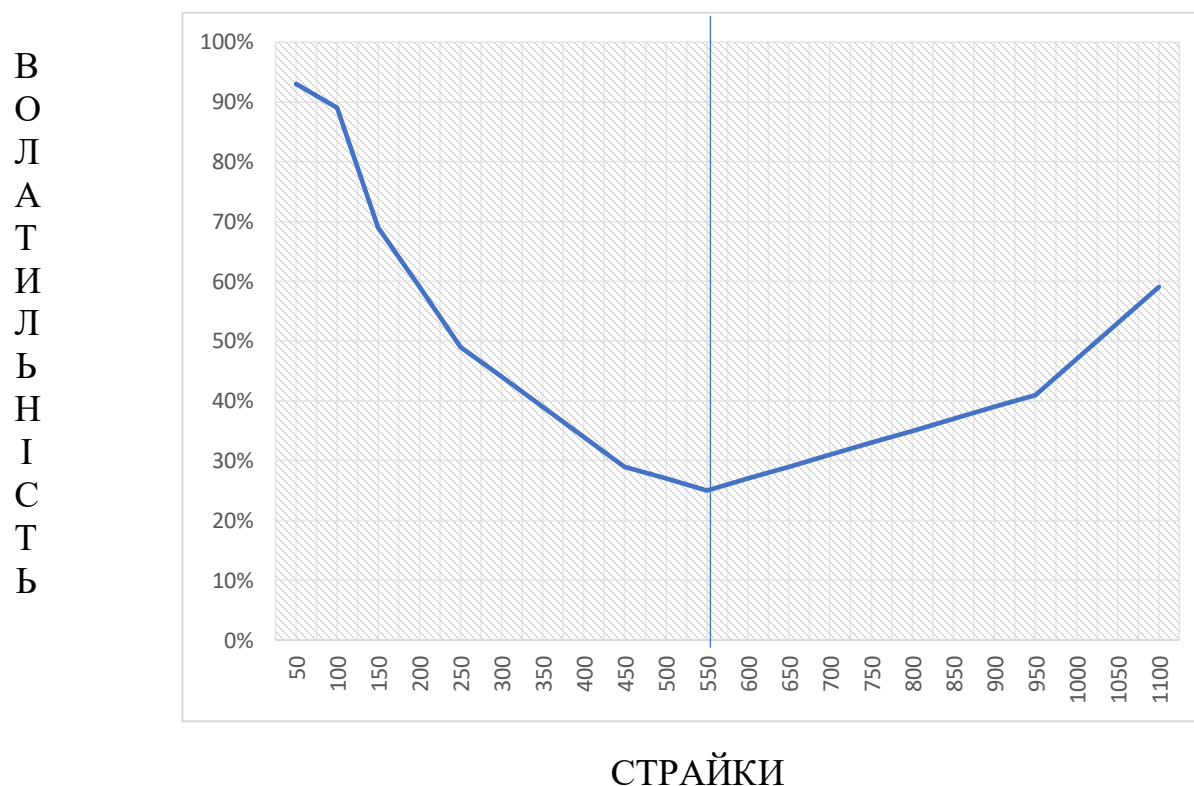
Біноміальна модель була створена для дискретного одноперіодного випадку, у якому рух ціни активу відповідає стаціонарному біноміальному стохастичному процесу, тобто на кінець періоду вона може бути більшою, або меншою за початкову [3, ст. 37]. Біноміальна модель та її модифікації використовуються для розрахунку ціни європейський, американських, азійських опціонів. [3, ст. 45].

Модель Блека – Шоулза дає змогу одержати справедливую величину премії, що сплачується за опціон [3, ст. 65]. При її розрахунках використовуються час, що залишився до дати виконання опціону, ціна базового активу та ціна страйк, рівень процентних ставок, волатильність ціни базового активу, дивіденди [13, ст. 327]. Завдяки цій моделі можна розрахувати ціну для європейського опціону та дати обмежену оцінку американському опціону.

Метод Монте – Карло є чисельним методом оцінки опціонів, на відміну від формули Блека – Шоулза, що є аналітичним методом. Основна його ідея в тому, що оцінюється математичне сподівання виплат, яку згенерує опціон для його власника, шляхом багаторазового генерування можливих шляхів руху ціни акцій. Однозначною перевагою методу Монте – Карло відносно інших способів оцінювання є те, що він може застосовуватися для ціноутворення будь – яких видів опціонів, але через свою універсальність значим недоліком стає необхідність розробляти моделі для кожного виду опціонів [3, ст. 98].

1.3 Поняття «посмішки» волатильності

Коли говорять про «посмішку» волатильності мають на увазі графічне зображення очікуваного рівня мінливості або ж волатильності за опціонами з однаковими базовими активами та різними страйками. Зазвичай очікувана волатильність при оцінюванні опціонів має неоднорідний розподіл – найнижча волатильність споглядається, коли страйк найбільш наближений до актуальної ціни на ринку [17]. Чим страйк більше або менше від актуальної ринкової ціни, тим більше волатильність. Таке явище називають «посмішкою» волатильності, оскільки графік нагадує посмішку, як показано на наступному прикладі, акції City Bank з актуальним страйком 550 [18]:



На графіку також можна побачити таку закономірність, що якщо ціна на базовий актив падає, то волатильність від відповідних активів росте швидше, ніж якщо ціна на актив зростає. Через це такий графік ще називають «кривою посмішкою» волатильності. Зазвичай таку форму «посмішки» мають фондові активи, тобто акціях, індекси на акції, облігації тощо. Її форма відповідає закономірності, що склалася історично, що якщо фондові активи ростуть, то набагато повільніше, ніж падають в кризові моменти [18].

Іншими словами, зазвичай ціна росте плавно, оскільки ріст – це відображення довгих позитивних ринкових тенденцій [18]. Але, якщо трапляється якась криза, то ціна падає досить стрімко. Тому опціони на фондові активи враховують цю особливість при побудові «посмішки» [18].

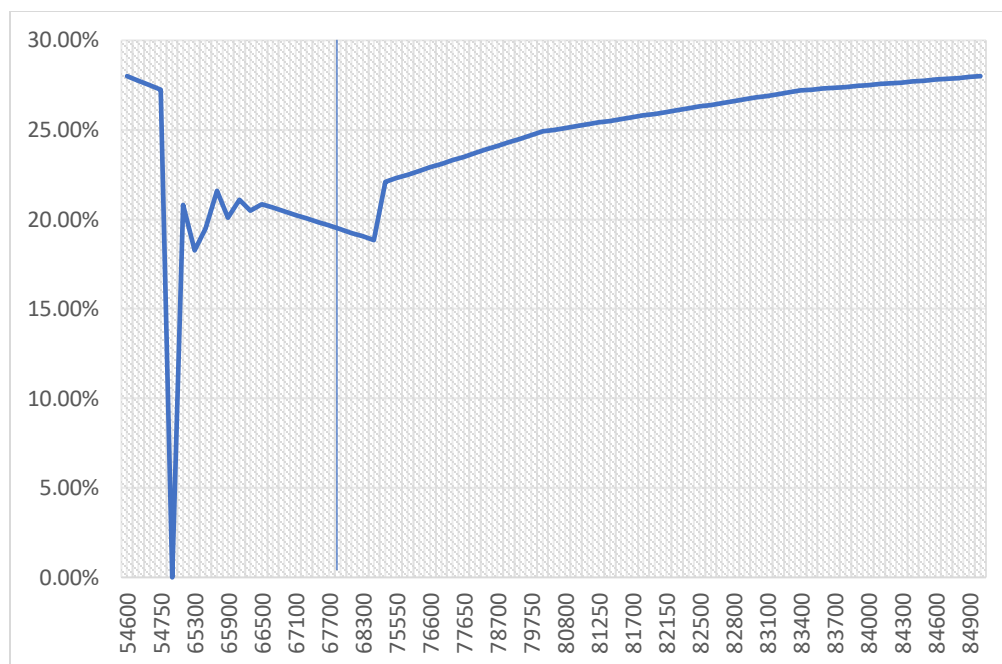
При інших таких самих умовах «пут» опціони з нижніми страйками будуть вартувати більше, ніж «колл» опціони з верхніми страйками, тому і волатильність у них має бути більше [18]. Звідси можна зробити висновок, що продавці «пут» опціонів заробляють на преміях більше, ніж продавці «колл» опціонів, тому що ризики різкого падіння завжди більше, ніж ризики різкого росту.

У кожного базового активу буде своя «посмішка» волатильності. Це пов'язано зі специфікою самого інструмента, а саме з особливостями змін його ціни в історичному аспекті.

Якщо аналізуючи фондові активи, ми могли зробити вищенаписані висновки, то щодо валютних активів графік волатильності буде виглядати інакше.

На графіку нижче буде продемонстрована «посмішка» волатильності для опціонів з базовим активом Futures на пару євро – рублі [18]:

В О Л А Т И Л Ь Н І С Т Ь



У даному випадку «посмішка» ломана, при чому діапазон її коливань дуже вузький і знаходиться в межах від 19% до 28%. Такий графік дає можливість зробити висновок, що очікування трейдерів відносно майбутньої ціни євро – рубль як вверх так і вниз будуть приблизно однаковими, тобто якщо ззовні не буде ніяких кризових умов, то трейдери не очікують різкого падіння, так само, якщо ситуація буде благополучною, то не очікують різкого підйому.

Якщо ми будемо говорити про товарні інструменти, наприклад, опціони на золото або нафту, то «посмішка» волатильності буде більше нахилена в сторону росту, тобто трейдери очікують росту більше, ніж падіння [18].

Тобто ми можемо зробити висновок, що «посмішка» волатильності – це лінія, що зображує очікувану волатильність для опціонів з різними страйками по одному базовому активу. У теоріях ця лінія має бути прямою, адже за формулою Блека – Шоулза, за якою рахується теоретична ціна опціонів, волатильність однакова для усіх страйків. Але на практиці бачимо зовсім інше, що волатильність по віддаленим страйкам сильно зміщена, хоча біржа

розраховує «посмішку» відносно актуальних цін на опціони, тобто емпіричний розподіл прибутковості активів демонструє ексцеси та перекоси.

Моделювання «посмішки» волатильності є активною областю досліджень в сфері кількісних фінансів, а також більш сучасніших моделей ціноутворення, таких як волатильність стохастичної моделі.

Часова структура волатильності описує процес, як прихована волатильність відрізняється від інших волатильностей в залежності від термінів [18].

Поверхня волатильності — це 3-D ділянка, де показані ділянки «посмішки» волатильності та часової структури волатильності в загальній тривимірній поверхні для усіх варіантів для даного базового активу [18].

РОЗДІЛ 2: Модель Блека – Шоулза

2.1 Математична постановка моделі Блека – Шоулза

Модель Блека – Шоулза або ж модель Блека – Шоулза – Мертона представляє собою математичну модель, що використовується для визначення теоретичної ціни на європейські опціони та передбачає, що ціна на базовий актив неявним чином встановлюється самим ринком [8, ст. 254 – 255]. Формула Блека – Шоулза спричинила бум в сфері торгівлі опціонами в 1973 році і досі використовується, хоча і з виправленнями та уточненнями учасників ринку.

Модель Блека – Шоулза передбачає, що ринок складається щонайменше з одного ризикованого, як правило, акціонерного, та одного безризикового активу, який зазвичай називають ринком грошей або облігацій [8, ст. 255].

Тепер сформулюємо припущення щодо активів: для безризикових вкладень існує постійна відсоткова ставка, а ризикова ставка припускає, що її зміщення та коливання є постійними і їх можна оцінити [9, ст. 637]. Акції не виплачують дивіденди, а податки не мають значення [9, ст. 637]. Ціна на акції є випадковою величиною і ціна на певний період T має логарифмічно нормальний розподіл [9, ст. 639].

Сформулюємо припущення на ринку: не існує торгового арбітражу, тобто немає можливості отримати безризиковий прибуток, можна позичити будь – яку суму, навіть дробову, з безризиковою ставкою, можна продати та купити будь – яку суму, а усі вищенаписані операції не потребують ніяких зборів та витрат [9, ст. 642].

Модель припускає, що майбутня ціна активу має логарифмічно нормальний розподілу ймовірності або іншими словами натуральний логарифм цієї величини має нормальний розподіл [9, ст. 653]. Волантильність

або середньоквадратичне відхилення дохідності активу обчислюється з історичних даних. Чим більшою є мінливість або ж іншими словами волатильність акції, тим більше ймовірність, що на момент закінчення дії опціону ціна буде сильно відрізнятись від поточної ціни. Щоб зменшити ризик, продавець повинен отримати більше за опціон на таку акцію, а покупець більше заплатити за можливість використання такого опціону.

Розрахована справедлива ринкова вартість опціону може як збігатися, так і розбігатися з поточною ціною.

Отже, ціна європейського «колл» опціону підраховується за формулою [9, ст. 665]:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

а ціна «пут» опціону за формулою [9, ст. 669]:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \text{ у яких}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Опишемо означення, що використовувалися в формулі:

$S(t)$ – ціна базового активу в момент часу t ;

$C(S, t)$ – ціна європейського «колл» опціону;

$P(S, t)$ – ціна європейського «пут» опціону;

K – ціна виконання опціону або інша назва – страйк;

$N(x)$ – ймовірність того, що відхилення буде менше в умовах стандартного нормального розподілу;

r – безризикова відсоткова ставка;

σ – волатильність прибутковості базисної акції;

$T - t$ – час в роках до закінчення терміну опціону (період опціону);

2.2 Використання моделі Блека – Шоулза

Модель Блека – Шоулза оцінює справедливую вартість опціону. Аналізуючи історію активу і розрахувавши ймовірність майбутньої ціни опціону, можна обчислити можливе майбутнє значення ціни базисного активу, після чого обчислюється поточне справедливе значення його ціни.

В основі формули Блека – Шоулза лежить припущення, що існує таке економічне середовище, у якому арбітражери можуть спрогнозувати майбутні доходи за опціоном покупця за допомогою «хеджованого портфеля», що складається з акцій і облігацій. Блек, Шоулз і Мертон розраховували, якою ж має бути ціна опціону покупця, щоб неможливо було отримати гарантований прибуток від арбітражних угод [10, ст. 134].

Перш за все модель Блека – Шоулза застосовується для наступних цілей: для пошуку недооцінених опціонів, щоб їх продати або для пошуку переоцінених, щоб їх купити, для хеджування портфеля з метою зниження ризику, якщо волатильність низька та для оцінки ринкових передумов майбутньої волатильності акції [13, ст. 350].

Трейдери використовують модель Блека – Шоулза для порівняння актуальних цін на опціони з розрахунковими. Якщо розрахункові числа відрізняється від поточних, то вигідніше вдаються до арбітражу на їх різниці у тому випадку, якщо різниця більша за саму вартість укладання угоди. Блек і Шоулз не розглядали можливості арбітражу у своїй моделі.

Також ця модель застосовується з метою знаходження і створення обмежень для арбітражу на ринку. Тоді, можна сказати, що модель діє на практиці.

Іншим поширеним способом застосування моделі є обчислення позиції хеджування для портфеля акцій [12, ст. 1058 – 1059]. Оскільки флуктуації,

тобто коливання, цін на опціони відбуваються відповідно до ціни акцій, то можливо продати опціони, щоб збалансувати можливі втрати.

Модель Блека – Шоулза допомагає визначити, яку кількість опціонів потрібно продати, щоб досягнути бажаної волатильності портфеля.

Моделі застосовують для виявлення ринкових передумов волатильності [12, ст. 1059]. Якщо опціони оцінені на ринку правильно, то формула дає можливість визначити верхню та нижню межу майбутньої ціни активів. Якщо ці значення несуттєво відрізняються, то з більшою ймовірністю ціни будуть близькі до розрахункового значення майбутньої ціни [5, ст. 189]. Тоді можна сказати, що чим вище премія за «колл» опціон, тим більше розрізнятимуться очікування ринкової ціни.

Модель Блека – Шоулза застосовується при прийнятті інвестиційних рішень, але і не гарантує отримання прибутку на опціонних торгах.

2.3 Недоліки моделі Блека – Шоулза

Опціонні премії досить швидко зростають і для отримання остаточного значення волатильності акції потрібно провести деякі операції. Якщо розглядати динаміку наведеної волатильності акції по дням, особливо для опціонів, що торгуються не особливо активно, то виявляється, що їх мінливість набагато більша, ніж хотілося б. Ефект збалансування може досягнутися, якщо використовувати приблизне середнє значення наведеної волатильності за останні 20 або 30 днів.

В якості альтернативи можна було б використовувати більш швидкий розрахунок наведеної волатильності, що не потребує збереження великих даних за попередні дні [17]. Наприклад, кінцеву волатильність на сьогоднішній день можна було б дізнатися, додаючи 5% сьогоднішньої наведеної волатильності до 95% вчорашньої кінцевої волатильності [17].

Для такого способу необхідно зберігати лише значення вчорашньої кінцевої волатильності та він має цей ефект збалансування.

Як тільки отримаємо наведену волатильність, її можна використовувати в моделі Блека – Шоулза в якості параметра волатильності [17].

РОЗДІЛ 3: Побудова «посмішки» волатильності при оцінюванні акцій Tesla

3.1 Розрахунок волатильності

Для роботи з даними я обрала мову програмування Python в програмному забезпеченні Google Colaboration.

Першим кроком імпортуємо усі необхідні бібліотеки для роботи з даними:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import os
import sys

from google.colab import files
uploaded = files.upload()

from finmath import MultinomialModel
from scipy import stats
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf, plot_pacf

if not sys.warnoptions: #ignore warnings
    import warnings
    warnings.simplefilter("ignore")

pd.set_option('precision', 4)
%matplotlib inline
```

Отримуємо, що усі необхідні бібліотеки завантажені успішно:



Завантажимо усі дані про акції Тесла за останні 5 років, Tesla, Inc. Common Stock, що попередньо були завантажені в форматі .csv з сайту [15]

американського позабіржового ринку, що спеціалізується на акція високотехнологічних компаній, Nasdaq та побачимо, що усі 100% даних завантажені []:

```
from google.colab import files
uploaded = files.upload()
```

Choose Files HistoricalQuotes.csv

- **HistoricalQuotes.csv**(application/vnd.ms-excel) - 69360 bytes, last modified: 4/7/2020 - 100% done
Saving HistoricalQuotes.csv to HistoricalQuotes.csv

Опрацюємо інформацію наступним чином: розділимо усі дані на 5 стовбців Close, Volume, Open, High, Low та виведемо останні 5 записів на біржі:

Data preprocessing

```
[3] dateparse = lambda dates: pd.datetime.strptime(dates, '%m/%d/%Y')#str->data
df = pd.read_csv('HistoricalQuotes.csv',parse_dates=['Date'],date_parser=dateparse,index_col='Date')
df['Close/Last']=df['Close/Last'].apply(lambda x: x[2:]).astype("float64")
df.rename(columns={'Close/Last':'Close'},inplace=True)
df.head()
```

```
/usr/local/lib/python3.6/dist-packages/ipykernel_launcher.py:1:
"""Entry point for launching an IPython kernel.
```

	Close	Volume	Open	High	Low
Date					
2020-04-06	516.24	14901840	\$511.2	\$521	\$497.96
2020-04-03	480.01	22562080	\$509.5	\$515.49	\$468.3901
2020-04-02	454.47	19858430	\$481.03	\$494.2599	\$446.4
2020-04-01	481.56	13353180	\$504	\$513.9548	\$475.1
2020-03-31	524.00	17771490	\$501.25	\$542.96	\$497

Зробимо запит на кількість записів, найдавнішу та найновішу дату в даних:

```
[4] print(f"Earliest date: {df.index.min():%d %b %y}")
print(f"Latest date: {df.index.max():%d %b %y}")
print(f"Entries: {df.shape[0]}")
```

та отримаємо, що найдавніші дані записані 7-го квітня 2015 року, найновіші дані записані 6-го квітня 2020 року, станом на 6 квітні 2020 року. Усього записів 1260, тобто сумарна кількість усіх робочих днів за 5 років, у кожному з яких по 252 робочих днів:

```

Earliest date: 07 Apr 15
Latest date: 06 Apr 20
Entries: 1260

```

Візуалізуємо усі ціни закриття за останні 5 років:

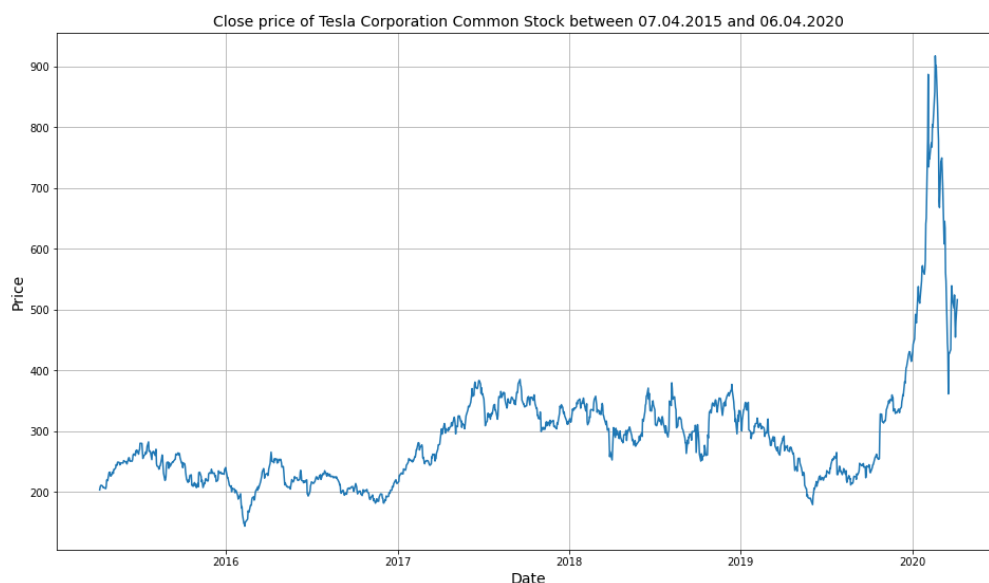
Close price visualization

```

[5] plt.figure(figsize=(16,9))
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('Date',fontsize=14)
    plt.ylabel('Price',fontsize=14)
    plt.plot(df.Close)
    plt.title(f"Close price of Tesla Corporation Common Stock between {df.index.min():%d.%m.%Y} and {df.index.max():%d.%m.%Y}", fontsize=14);

```

та отримаємо наступний графік:



На графіку ми можемо побачити, що найменшою ціна була у першому кварталі 2016 року, за 5 років видно тенденцію зростання, а починаючи з останнього кварталу 2019 року можемо побачити різке збільшення ціни на акцій компанії Тесла.

Виконавши більш детальний запит на максимальну та мінімальну ціну за останні 5 років, отримали, що найбільшою ціною була 19 лютого 2020 року та становила 917.42 \$, а найменшою ціна була 10 лютого 2016 року та становила 143.67 \$.

```

max_price = df.Close.max()
min_price = df.Close.min()

print(f"Max Close price of ${max_price:.2f} was reached at 19 Feb 2020")
print(f"Min Close price of ${min_price:.2f} was reached at 10 Feb 2016")

```

Max Close price of \$917.42 was reached at 19 Feb 2020
 Min Close price of \$143.67 was reached at 10 Feb 2016

Наступним кроком обчислимо логарифми коливань цін та

```

[8] df['Log_returns']=np.log(df.Close)-np.log(df.Close.shift(-1))
    df[['Close', 'Log_returns']]

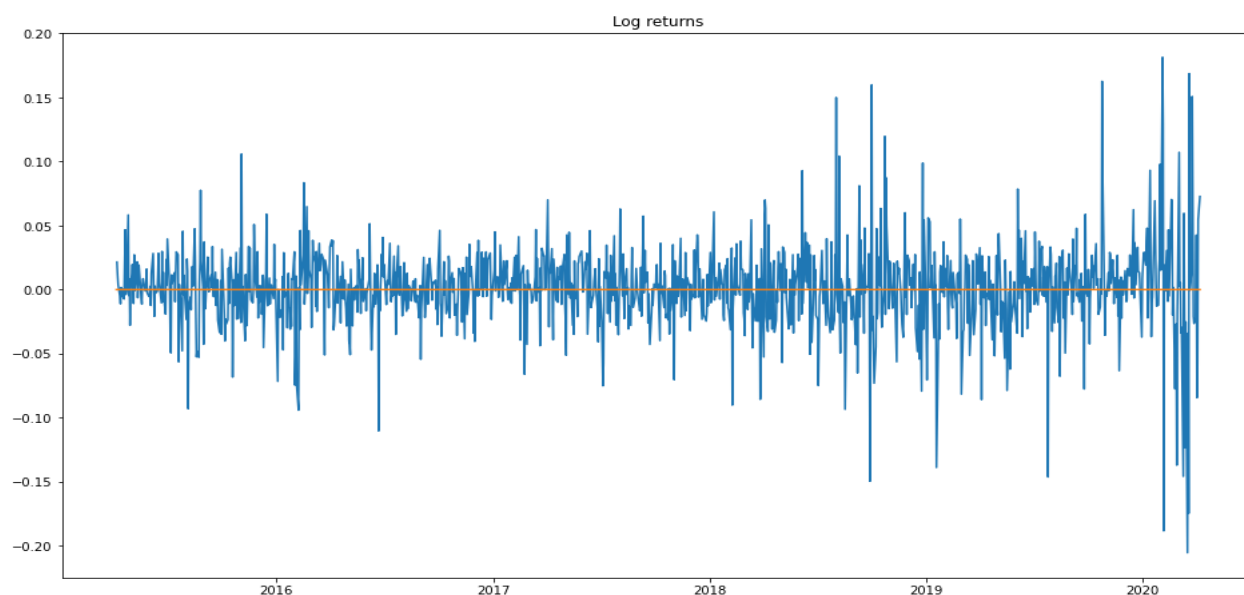
```

виведемо отриманий результат для перших п'яти у вигляді таблиці:

Date		
2020-04-06	516.24	0.0728
2020-04-03	480.01	0.0547
2020-04-02	454.47	-0.0579
2020-04-01	481.56	-0.0845
2020-03-31	524.00	0.0426

На основі цих результатів створимо відповідних графік, щоб проаналізувати, чи існують якісь тенденції розвитку ціни на ринку:

```
plt.figure(figsize=(16,9))  
plt.plot(df.Log_returns)  
plt.plot(df.index,np.zeros(len(df.index)))  
plt.title("Log returns");
```



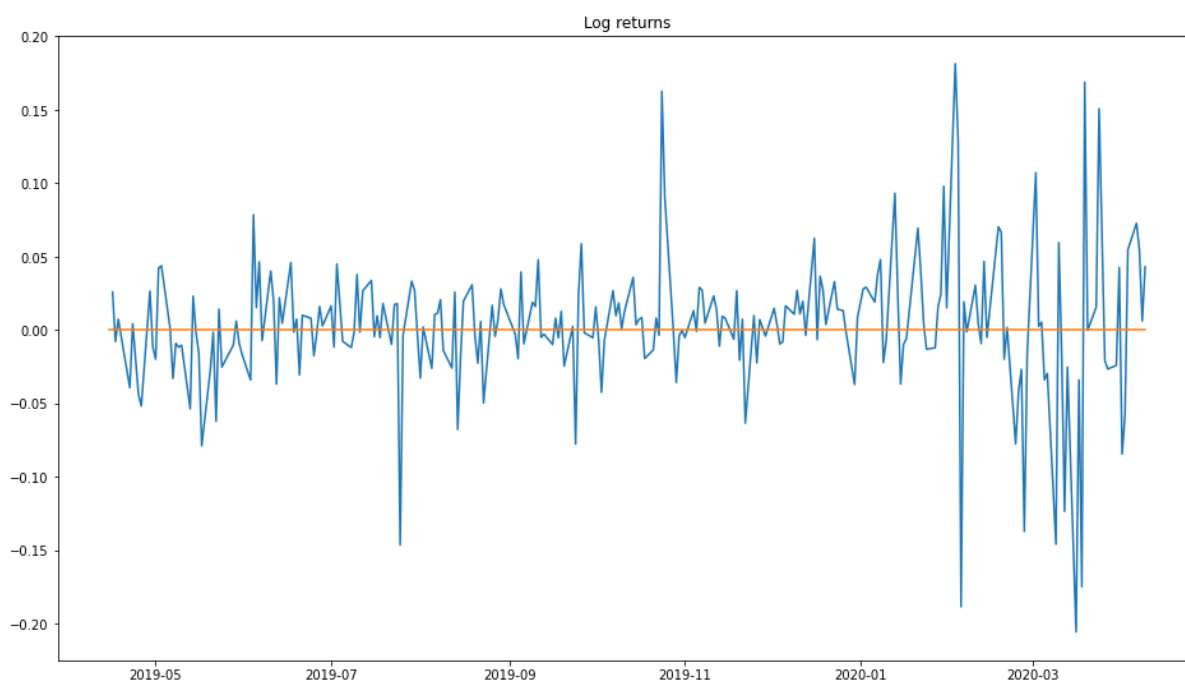
Бачимо, що на графіку чітких тенденцій немає. Але варто помітити, що у першому кварталі 2020 року коливання є найбільшими за останні 5 років і за підрахунками становлять приблизно 0.1814.

```
df.Log_returns.max()
```

```
0.18144501798943757
```

Це означає, що найбільшим коливанням ціни Close/Last на акції Тесла становило 18.14%.

Щоб більш детально розглянути логарифми коливань за останній рік, зробимо окремий графік:



Бачимо, що якоїсь чітко вираженої тенденції за рік не було. А ось оцінюючи стан починаючи з 2020 року, видно, що ситуація на ринку дуже не стабільна, особливо в лютому, де ціна різко піднялася на приблизно 15%, а на наступний день впала на приблизно 35%, та у березні – навпаки.

Підрахуємо середнє арифметичне, дисперсію та середнє квадратичне відхилення логарифмів коливань цін:

▼ Sample Mean and Variance

For series of returns calculate sample mean and sample variance

```
[15] mean, var = df.Log_returns.mean(),df.Log_returns.var()
      stddev = var**0.5
      print(f"sample mean = {mean:.6f}, sample variance = {var:.8f}, standard deviation = {stddev:.8f}")
```

```
sample mean = 0.000740, sample variance = 0.00106044, standard deviation = 0.03256447
```

Отримуємо, що середнє арифметичне дорівнює 0.000740. Таке мале середнє значення може бути у двох випадках: якщо коливання низькі або якщо коливання вниз-вверх, тобто від'ємні та додатні значення відповідно, приблизно однакові за модулем, що і відбувається у нашому випадку, як показано на графіку, тому середнє арифметичне не дає вичерпної інформації.

Дисперсія дорівнює приблизно 0.0011, а середнє квадратичне відхилення— приблизно 0.0326. Дисперсія значно відрізняється від середнього арифметичного, тому ми можемо допустити, що коливання цін розподілені не нормально. Після того, як порахуємо волатильність, перевіримо, чи є розподіл нормальним.

Підрахуємо річну волатильність:

▼ Annual average volatility

Calculate annual average volatility $\sigma: \sigma^2 = \frac{s^2}{\Delta t}, \Delta t = \frac{1}{252}$

```
delta_t = 1/252
sigma_sq = var/delta_t
sigma = sigma_sq**0.5
print(f"Annual average volatility is equal to {sigma*100:.2f}%")
```

Annual average volatility is equal to 74.00%

У формулі ми взяли 252 дні, оскільки стільки усього робочих днів у році. Отримали результат, що річна волатильність складає 74.

А за останні п'ять років, волатильність звичайних акцій компанії складає 115.59 %.

▼ Average volatility for 5 years

Calculate average volatility for 5 years $\sigma: \sigma^2 = \frac{s^2}{\Delta t}, \Delta t = \frac{1}{1260}$

```
[12] delta_t = 1/1260
      sigma_sq = var/delta_t
      sigma = sigma_sq**0.5
      print(f"Annual average volatility is equal to {sigma*100:.2f}%")
```

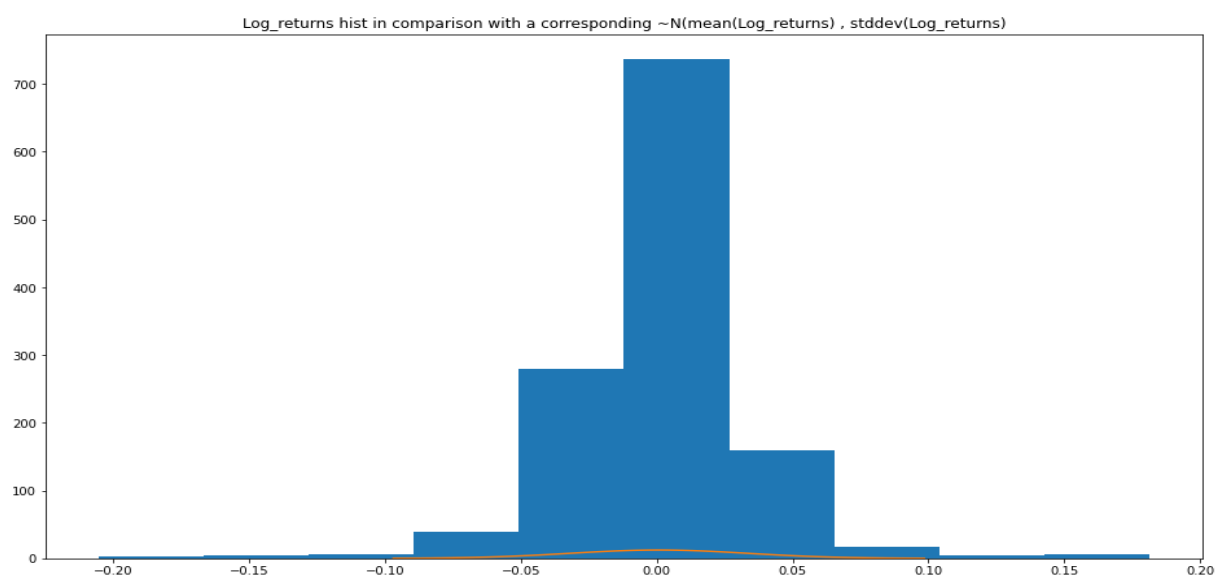
➞ Annual average volatility is equal to 115.59%

Перевіримо, чи розподілені логарифми коливань за останні 5 років та за останній рік нормально:

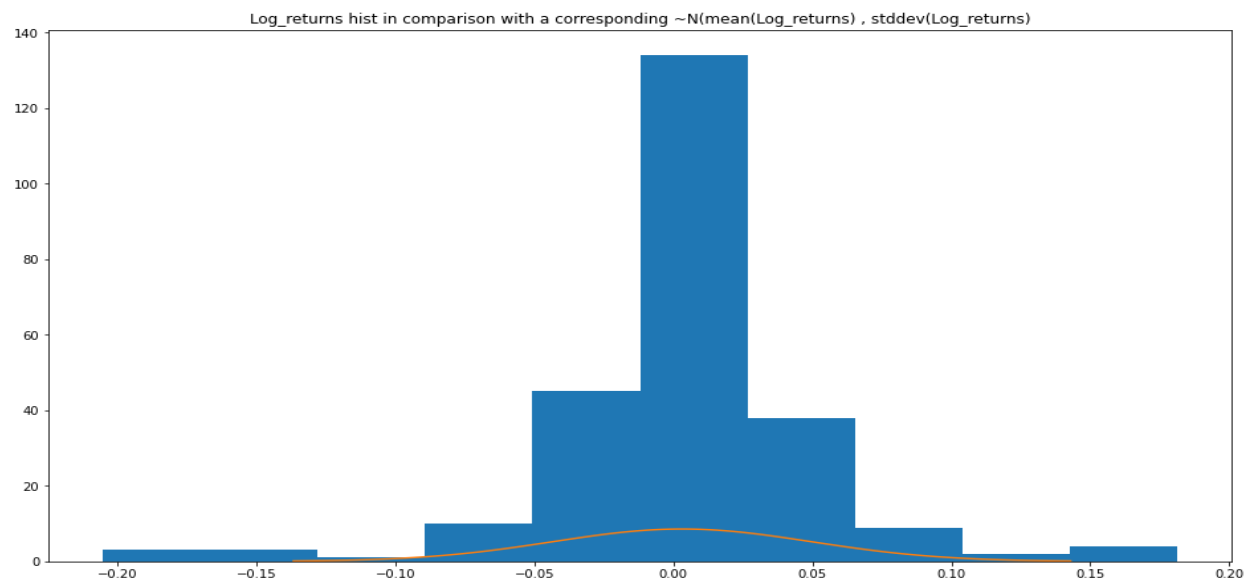
▼ Log returns for normality

```
[17] plt.figure(figsize=(16,9))
      plt.hist(df.Log_returns)
      x = np.linspace(mean-3*stddev,mean+3*stddev,100)
      plt.plot(x,stats.norm.pdf(x,mean,stddev));
      plt.title("Log_returns hist in comparison with a corresponding ~N(mean(Log_returns) , stddev(Log_returns));")
```

На отриманих графіках бачимо, що логарифми коливань за останні 5 років

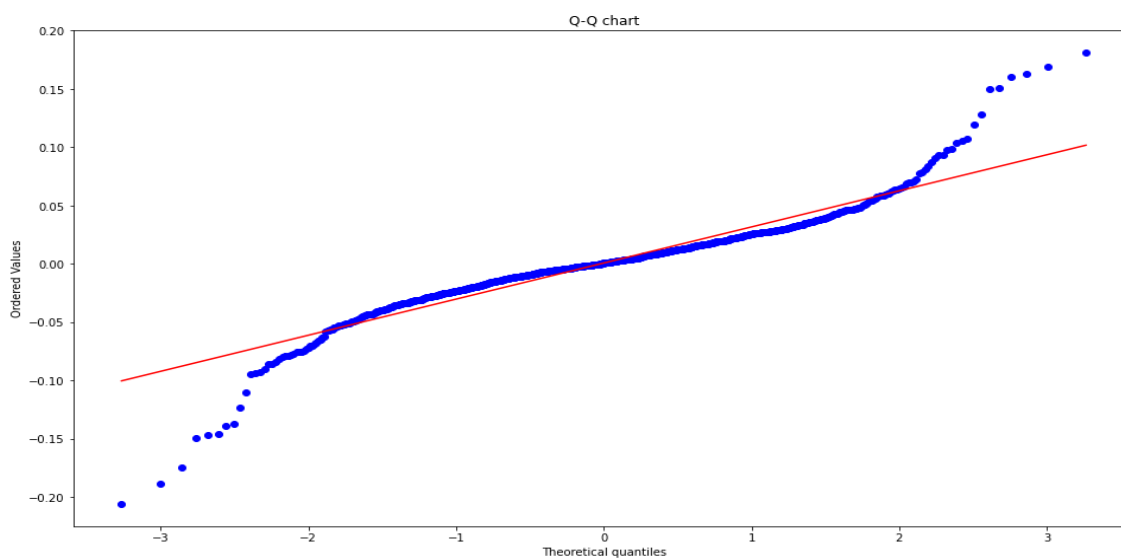


та, окремо, за останній рік:



Зробимо тест Шапіро – Уїлка для даних за останні 5 років. Він показав, що даний розподіл відрізняється від нормального розподілу:

According to the Shapiro-Wilk test, $W = 0.9034$ $p = 0.00000000$, which means that the data differs significantly from a normal distribution. Let's have a look at Q-Q diagram given below:

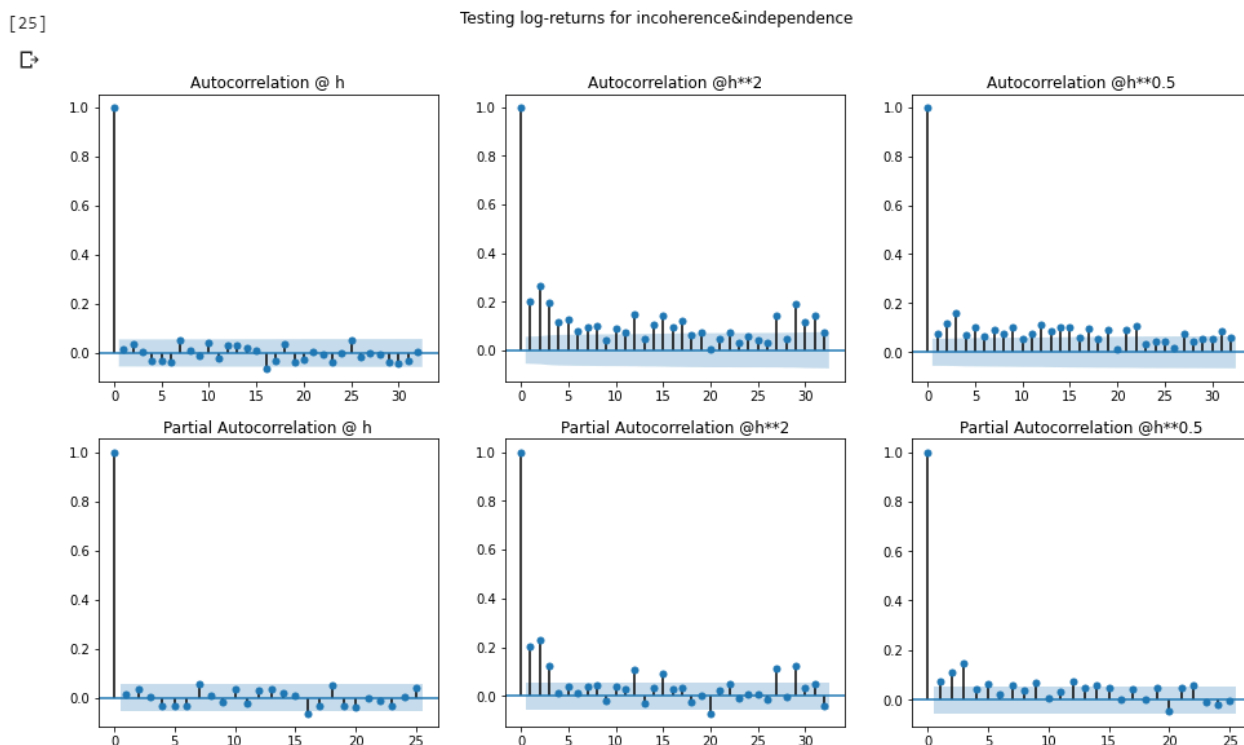


Отримуємо, що критерій Шапіро – Уїлка дорівнює 0.9034, при $p = 0$. Робимо висновок, що дані розподілені не нормально.

Зробивши додатково тест Колмогорова – Смірнова отримуємо, що критерій дорівнює 0.4546 при значення p менше 0.05. Отже, знову ж отримуємо, що дані розподілені не нормально:

```
[22] statistic,p=stats.kstest(df.Log_returns.values[: -1], 'norm')
      print(f"According to the Kolmogorov-Smirnov test, statistic = {statistic:.4f} p = {p}<0.05, wh:
↳ According to the Kolmogorov-Smirnov test, statistic = 0.4546 p = 2.7971039712178014e-238<0.05,
```

І наш кінцевий висновок ми робимо після тесту ACF та PACF:



ACF та PACF результати незалежні, отже, логарифми коливань ціни розподілені не нормально.

3.2 Розрахунок справедливої ціни за формулою Блека – Шоулза

Підрахуємо справедливую ціну за формулою Блека – Шоулза, що ми розглядали у розділі 2.1, тобто:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \text{ у яких}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

```
def d(T,R,S,K,sigma,option='both'):
    """T -- share of work days passed (x) to a total number of work days (252)
    R -- interest rate
    S -- current price
    K -- strike price
    sigma -- annual average volatility"""

    coeff = sigma*T**0.5
    res = np.log(S*np.exp(R*T)/K)

    if option=='d1':
        return res/coeff + 0.5*coeff
    elif option=='d2':
        return res/coeff - 0.5*coeff
    else:
        return res/coeff + 0.5*coeff,res/coeff - 0.5*coeff

def N(x):
    return stats.norm.cdf(x,0.0,1.0)
```

```
def calculate_option_prices(T,R,S,K,sigma, in_detail=False):
    d1,d2 = d(T,R,S,K,sigma)

    c_call = S*N(d1)-K*np.exp(-r*T)*N(d2)
    c_put = N(-d2)*K*np.exp(-r*T) - N(-d1)*S

    #check for parity
    c1= c_call+K*np.exp(-r*T)
    c2= c_put+S*np.exp(-r*T)

    parity = np.isclose(c1,c2,rtol=1e-01)

    if in_detail:
        return {"d1":d1,"d2":d2, "N(d1)":N(d1),"N(d2)":N(d2),
                "c_call":c_call,"c_put":c_put,
                "parity":pd.DataFrame.bool(parity)}

    return c_call,c_put

dates = list(call_put_data.keys())
calculate_option_prices(T_data[dates[0]],r,S,K,sigma,in_detail=True)#example
```

```
rows = ['d1','d2','N(d1)','N(d2)','c_call','c_put','parity']
options_data = pd.DataFrame(columns=call_put_data.keys(),index=rows)
for date in options_data.columns:
    options_data[date]=calculate_option_prices(T_data[date],r,S,K,sigma,True).values()
print(f"S={S}, K={K},r={r:.4f},sigma={sigma*100:.2f}%")
options_data
```

Та отримаємо наступний вивід:

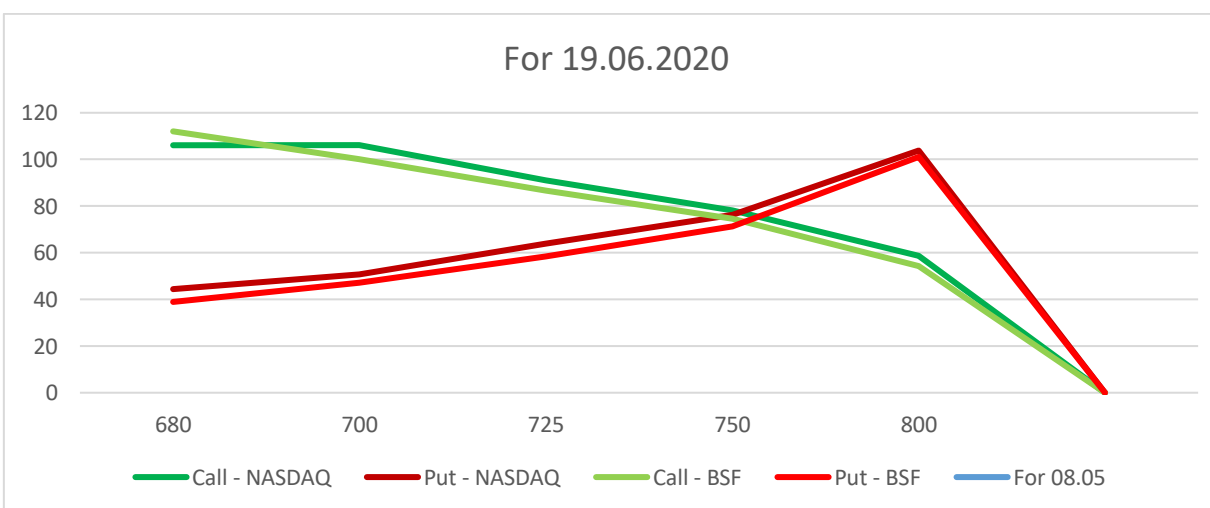
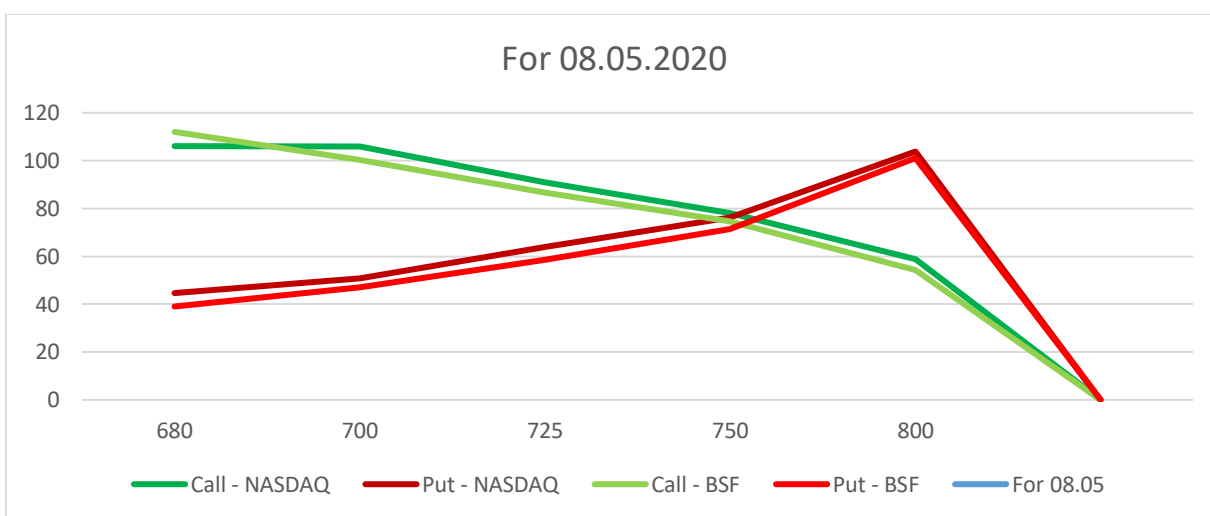
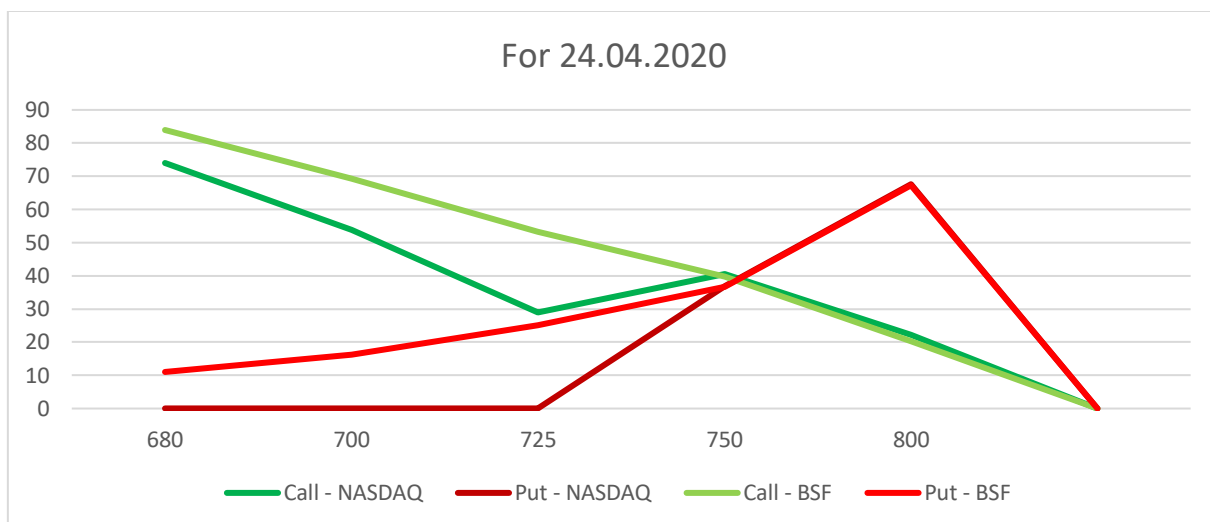
```

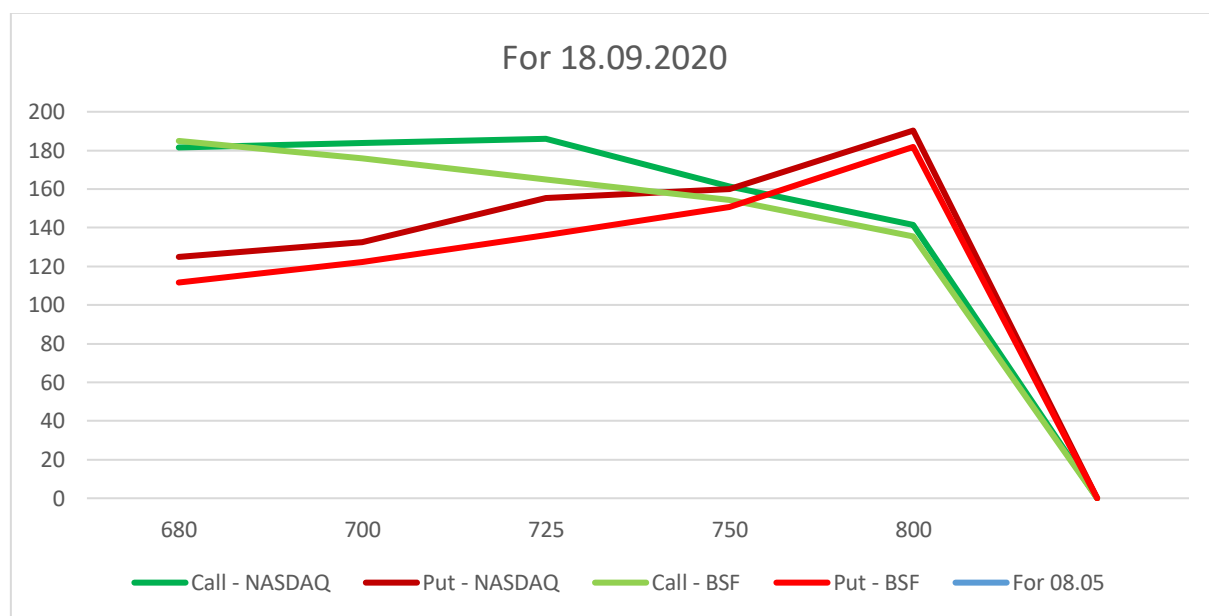
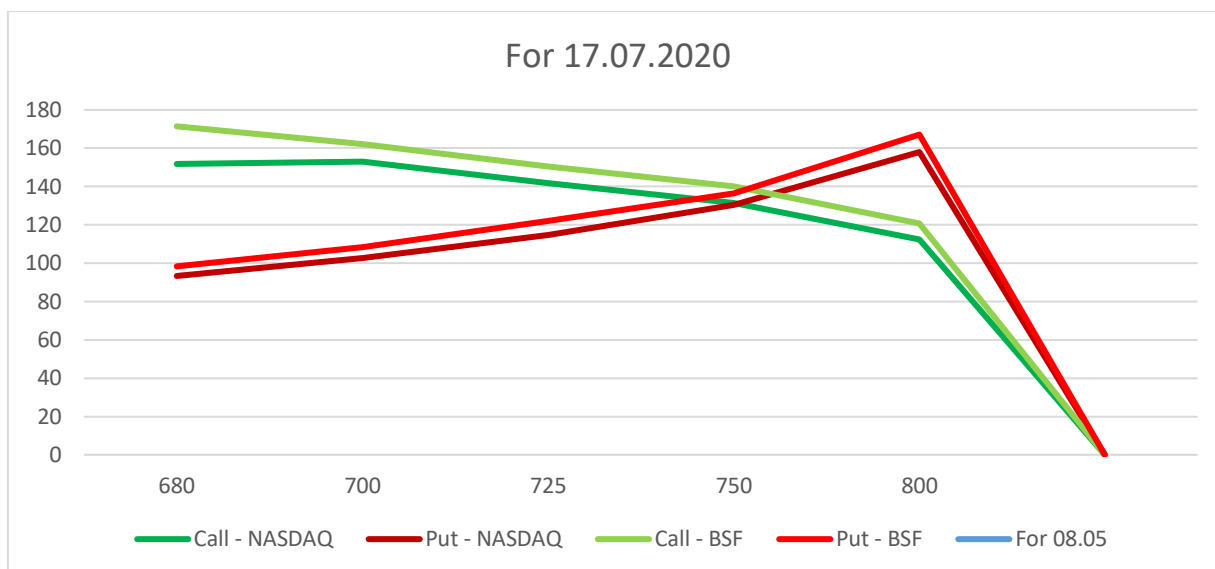
S=573.0, K=1870,r=0.0027,sigma=74.00%
      17.04.2020  15.05.2020  19.06.2020  17.07.2020  18.09.2020
d1      -1.1295e+01  -5.5686e+00   -3.2469   -2.7262   -1.8661
d2      -1.1399e+01  -5.7771e+00   -3.5926   -3.1298   -2.4176
N(d1)    6.9413e-30   1.2840e-08    0.0006    0.0032    0.0310
N(d2)    2.1079e-30   3.8009e-09    0.0002    0.0009    0.0078
c_call    3.5827e-29   2.5134e-07    0.0283    0.2018    3.1867
c_put    1.2969e+03   1.2966e+03   1295.9454  1295.7253  1297.4315
parity    1.0000e+00   1.0000e+00    1.0000    1.0000    1.0000
```

Побудуємо графіки для цін на «колл» та «пут» опціони для $T = 1, 2, 3, 6$ місяців, при цьому візьмемо офіційні числа на сайті NASDAQ для 24.04.2020, 08.05.2020, 19.06.2020, 17.07.2020, 18.09.2020 для цін страйк 680\$, 700\$, 725\$, 750\$, 800\$.

NASDAQ data										
	24.04.2020		08.05.2020		19.06.2020		17.07.2020		18.09.2020	
Strike	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put
680	74	0.06	106.08	44.54	150.36	77.50	151.66	93.45	181.6	124.8
700	53.9	0.01	106	50.75	139	87.75	153	102.75	184	132.35
725	29	0.01	91	64	126.82	99.60	141.65	114.85	186	155.45
750	40.45	36.85	78.22	76.10	116.75	113.60	131.29	130.29	161.47	160.1
800	22.18	67.59	58.7	103.8	95.6	143.45	112.5	158	141.50	190.27
Results by Black – Schoel;s Formula										
	24.04.2020		08.05.2020		19.06.2020		17.07.2020		18.09.2020	
Strike	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put	Call	Put
680	83.943	10.935	112.03	39.003	143.005	69.946	171.426	98.329	184.9	111.773
700	69.311	16.27	100.23	47.083	132.63	79.319	161.98	108.4534	175.841	122.1893
725	53.2	25.16	86.687	58.5298	120.39	92.0663	150.60	122.057	164.823	136.1484
750	39.709	36.66	74.53	71.383	109.106	105.76	139.962	136.392	154.461	150.7637
800	20.317	67.271	54.251	101.074	89.2049	135.8401	120.724	167.1169	135.58	181.802

Тепер порівняємо справедливі ціни на «колл» та «пут» опціони взяті з сайту NASDAQ та пораховані за формулою Блека – Шоулза:





3.3 Розрахунок прихованої волатильності

Грека Vega є першою похідною σ мінливості [17], таким чином, є невід'ємною частиною у формулюванні прихованої або ж неявної волатильності. Далі йде швидке виведення Vega [19]:

$$vega(C) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

Оскільки Vega є першою похідною мінливості, її часткова похідна набуває вигляду $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$. Тому беремо часткову похідну формули Блека – Шоулза щодо σ [19]:

$$vega(C) = Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right)$$

Ми знаємо, що

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \text{ тоді}$$

$$d_2 - d_1 = -\sigma\sqrt{T-t}, \text{ звідки отримуємо:}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}$$

Можемо замінити:

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-d_1^2}{2}}, \text{ тоді}$$

$$vega(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Se^{-q(T-t)}e^{\frac{-d_1^2}{2}}\sqrt{T-t}$$

Порахувавши vega для кожного терміну:

```
import numpy as np
import scipy.stats as si

S = 573
K = 1870
T_1 = 4/252
T_2 = 20/252
T_3 = 44/252
T_4 = 64/252
T_5 = 109/252
r = 0.0027
sigma = 0.74

#Non-Dividend
def vega(S, K, T, r, sigma):

    #S: spot price
    #K: strike price
    #T: time to maturity
    #r: interest rate
    #sigma: volatility of underlying asset

    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

    vega = S * si.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) * np.sqrt(T)

    return vega

Vega_1 = vega(S,K,T_1,r,sigma)
Vega_2 = vega(S,K,T_2,r,sigma)
Vega_3 = vega(S,K,T_3,r,sigma)
Vega_4 = vega(S,K,T_4,r,sigma)
Vega_5 = vega(S,K,T_5,r,sigma)
```

Отримаємо наступні результати:

Vega					
Страйк	17.04.2020	08.05.2020	19.06.2020	17.07.2020	18.09.2020
680	82.820903	153.537769	215.948809	257.160100	334.422379
700	75.579106	143.288900	205.263524	246.398826	323.671316
725	64.023794	130.003942	191.801788	232.941616	310.317237
750	50.827067	116.543111	178.385013	219.586944	297.116637
800	25.939681	90.460081	152.286727	193.583140	271.389123

Значення «колл» та «пут» опціонів ми можемо визначити як:

$$C_{value}(S, K, T, \sigma_{imp}, r, q) = C$$

$$P_{value}(S, K, T, \sigma_{imp}, r, q) = P$$

Тоді, оскільки обидві функції залежать від прихованої волатильності, значення «колл» та «пут» опціонів зростають [19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{value}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial P_{value}}{\partial \sigma} = vega(C_{value}) = vega(P_{value}) \\ &= Se^{-qT} \sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_1^2}{2}} > 0 \end{aligned}$$

Щоб волатильність існувала та була строго більше нуля, дані значення «колл» опціону мають бути без арбітражу [19]:

$$Se^{-qT} - Ke^{-rT} \leq C < Se^{-qT}$$

Також потрібно зауважити, що волатильність існує і є строго більше нуля лише тоді, коли для «пут» опціона виконується [19]:

$$Ke^{-rT} - Se^{-qT} \leq P < Ke^{-rT}$$

Прихована волатильність - єдиний параметр у моделі Блека – Шоулза, який безпосередньо не спостерігається та часто є вище для опціону «поза грошей», ніж для опціону «в грошах», як пояснювалося в розділі 1.3. Це і називають посмішкою волатильності.

Ми можемо дивитися на «колл» та «пут» опціони як на функції від параметру сігма – волатильності [7. ст. 798]. Тоді необхідно вирішити нелінійну проблему $f(x) = 0$, де x - шукана мінливість [19]:

$$f(x) = Se^{-qT}N(d_1(x)) - Ke^{-rT}N(d_2(x)) - C$$

$$f(x) = Ke^{-rT}N(-d_2(x)) - Se^{-qT}N(-d_1(x)) - P$$

Щоб розв'язати її, скористаємося чисельними методами, а саме методом Ньютона [7, ст. 799-812]:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ де}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Se^{-qT}\sqrt{T}\exp\left(-\frac{(d_1(x))^2}{2}\right)$$

, тоді

$$\sigma_{k+1}^{imp} = \sigma_k^{imp} - \frac{f(\sigma_k^{imp})}{f'(\sigma_k^{imp})}, \forall k \geq 0$$

Підрахуємо приховану волатильність для цін страйк 680\$, 700\$, 725\$, 750\$, 800\$ для різних дат 17.04.2020, 08.05.2020, 19.06.2020, 17.07.2020, 18.09.2020:

```
def newton_vol_call(S, K, T, C, r, sigma):

    #S: spot price
    #K: strike price
    #T: time to maturity
    #C: Call value
    #r: interest rate
    #sigma: volatility of underlying asset

    d1 = (np.log(S / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = (np.log(S / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

    fx = S * si.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) - K * np.exp(-r * T) * si.norm.cdf(d2, 0.0, 1.0) - C

    vega = 0.00562

    tolerance = 0.000001
    x0 = sigma
    xnew = x0
    xold = x0 - 1

    while abs(xnew - xold) > tolerance:

        xold = xnew
        xnew = (xnew - fx - C) / vega
```

```
    return abs(x_new)

Vega_11 = vega(S,K_5,T_1,r,sigma)
Vega_12 = vega(S,K_5,T_2,r,sigma)
Vega_13 = vega(S,K_5,T_3,r,sigma)
Vega_14 = vega(S,K_5,T_4,r,sigma)
Vega_15 = vega(S,K_5,T_5,r,sigma)

#For strike 800$
#C_1 = 83.943
#C_2 = 112.03
#C_3 = 143.005
#C_4 = 171.426
#C_5 = 184.9

volatility_c_1 = newton_vol_call (S,K_5,T_1,C_1,r,sigma,Vega_11)
volatility_c_2 = newton_vol_call (S,K_5,T_2,C_2,r,sigma,Vega_12)
volatility_c_3 = newton_vol_call (S,K_5,T_3,C_3,r,sigma,Vega_13)
volatility_c_4 = newton_vol_call (S,K_5,T_4,C_4,r,sigma,Vega_14)
volatility_c_5 = newton_vol_call (S,K_5,T_5,C_5,r,sigma,Vega_15)

print(f"Implied volatility for 17.04.2020:{volatility_c_1:.4f}%")
print(f"Implied volatility for 15.05.2020:{volatility_c_2:.4f}%")
print(f"Implied volatility for 19.06.2020:{volatility_c_3:.4f}%")
print(f"Implied volatility for 17.07.2020:{volatility_c_4:.4f}%")
print(f"Implied volatility for 18.09.2020:{volatility_c_5:.4f}%")

Implied volatility for 17.04.2020:0.4691%
Implied volatility for 15.05.2020:0.1879%
Implied volatility for 19.06.2020:0.1164%
Implied volatility for 17.07.2020:0.0915%
Implied volatility for 18.09.2020:0.0637%
```

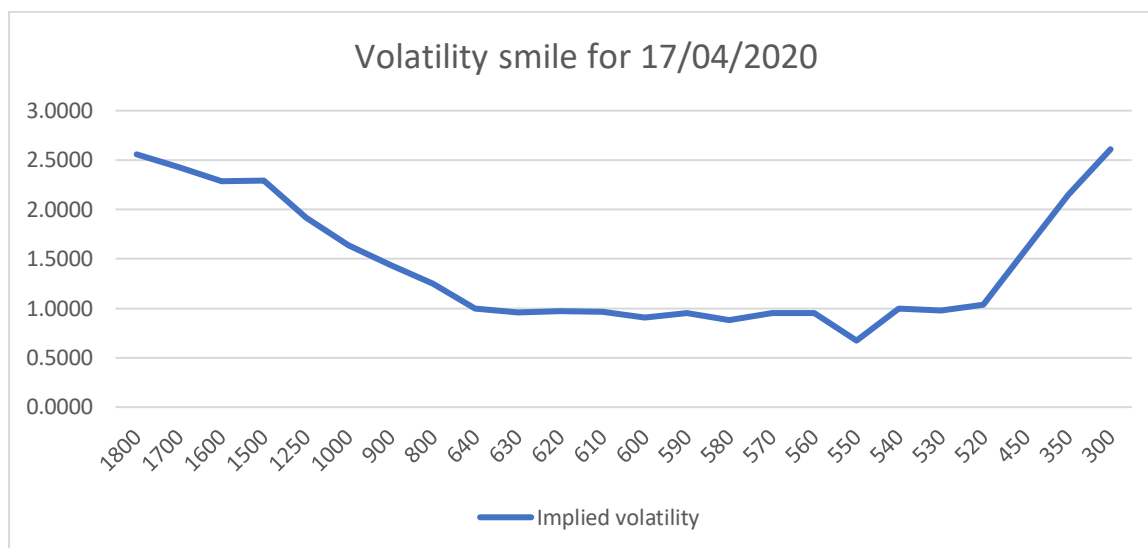
3.4 Побудова та аналіз кривої та поверхні волатильності

Розширимо дані з сайту marketbeat.com:

Date	17/04/2020	15/05/2020	19/06/2020	17/07/2020	18/09/2020
Maturity	4/252	20/252	44/252	64/252	109/252
Strike \$	Implied Volatility				
1800	2.56047	1.42821	1.14058	1.01771	0.890985
1700	2.42865	1.39273	1.1073	0.995423	0.876285
1600	2.28808	1.36373	1.08301	0.972261	0.858794
1500	2.29256	1.31702	1.04605	0.946964	0.841443
1250	1.92947	1.21247	0.966063	0.881318	0.797777
1000	1.63917	1.06972	0.880851	0.82166	0.766582
900	1.43689	1.01585	0.85372	0.809626	0.762005
800.00	1.25389	0.978215	0.830702	0.798407	0.754821
640	0.999045	0.963606	0.842642	0.817172	0.779229
630	0.960216	0.966288	0.84169	0.815114	0.778029
620	0.969578	0.965927	0.848263	0.819732	0.78581
610	0.964047	0.9687	0.852721	0.818668	-
600	0.904043	0.972481	0.859378	0.827063	0.795845
590	0.951885	0.97227	0.839171	0.827098	0.790034
580	0.878614	0.980022	0.856828	0.82435	0.795444
570	0.949026	0.982762	0.873703	0.831169	0.800512
560	0.949082	0.970418	0.872913	0.840575	0.802952
550	0.672985	0.996403	0.864854	0.844474	0.802222
540	0.995661	0.998576	0.881913	-	0.801915
530	0.986476	1.01035	0.889385	-	0.809573
520	1.03831	1.01384	0.902096	0.851823	0.792138
450.00	1.59771	1.08515	0.942281	0.903636	0.801915
350.00	2.14786	1.28192	1.03701	-	0.938497
300.00	2.61548	1.59463	1.13089	-	0.975357

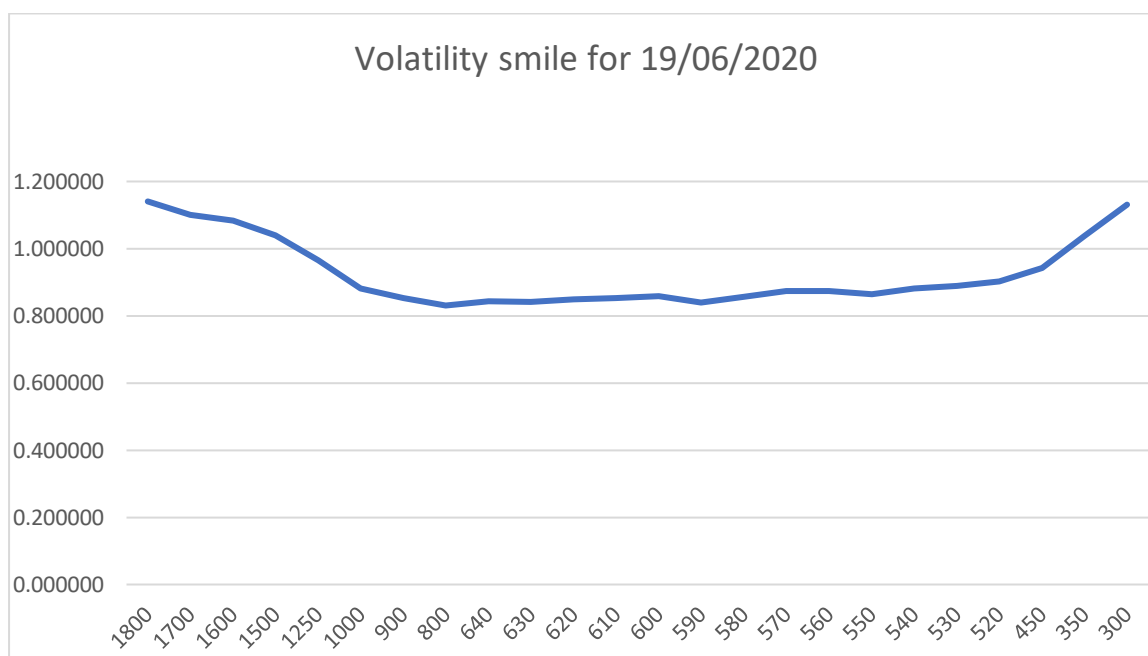
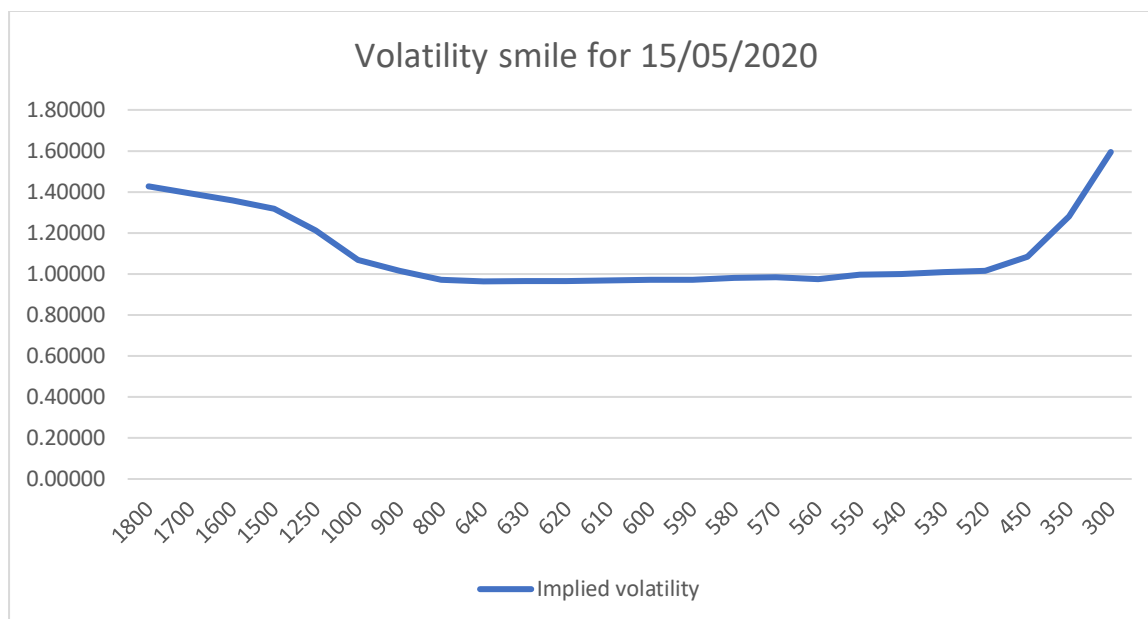
Як бачимо, що дані, отримані за допомогою онлайн калькулятора, відрізняються, оскільки відрізнялися ціни на «колл» опціони, взяті з сайту Nasdaq та порашовані за формулою Блека – Шоулза.

Побудуємо «посмішки» волатильності:

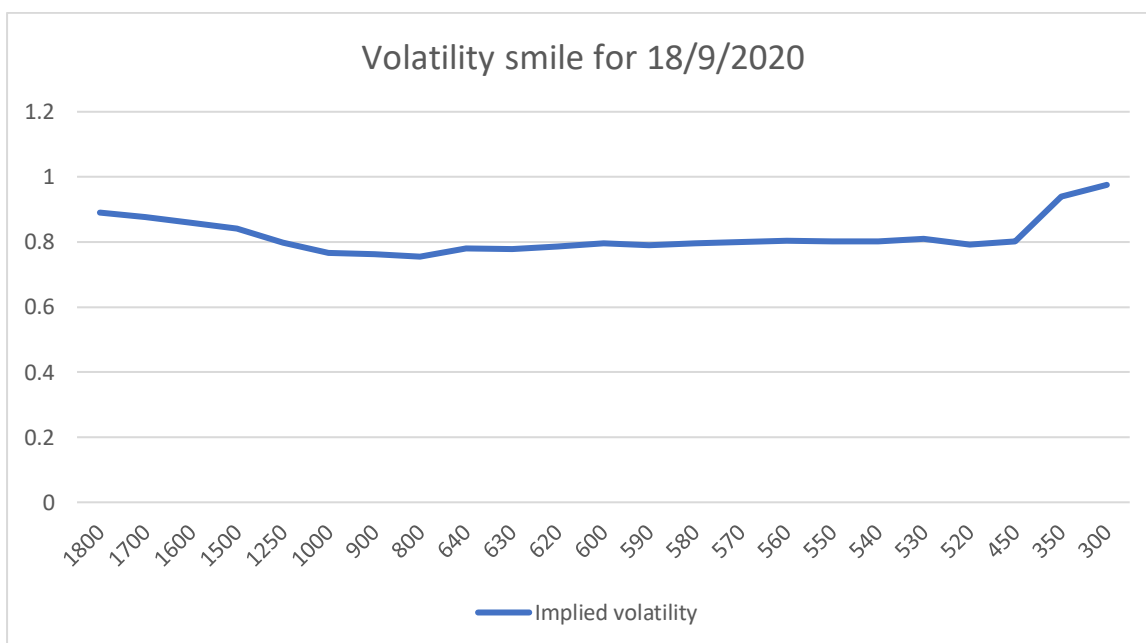
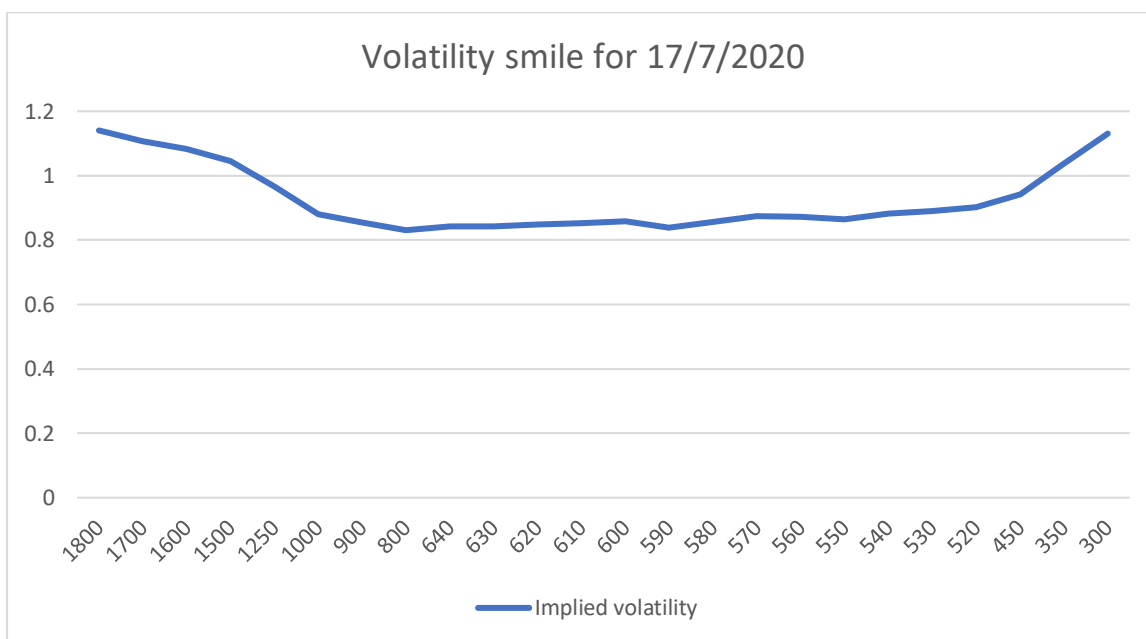


Бачимо, що найменшою волатильністю є на позначці 550\$, що і є найближчим значенням до ціни закриття, 548\$, станом на 13 квітня 2020 року.

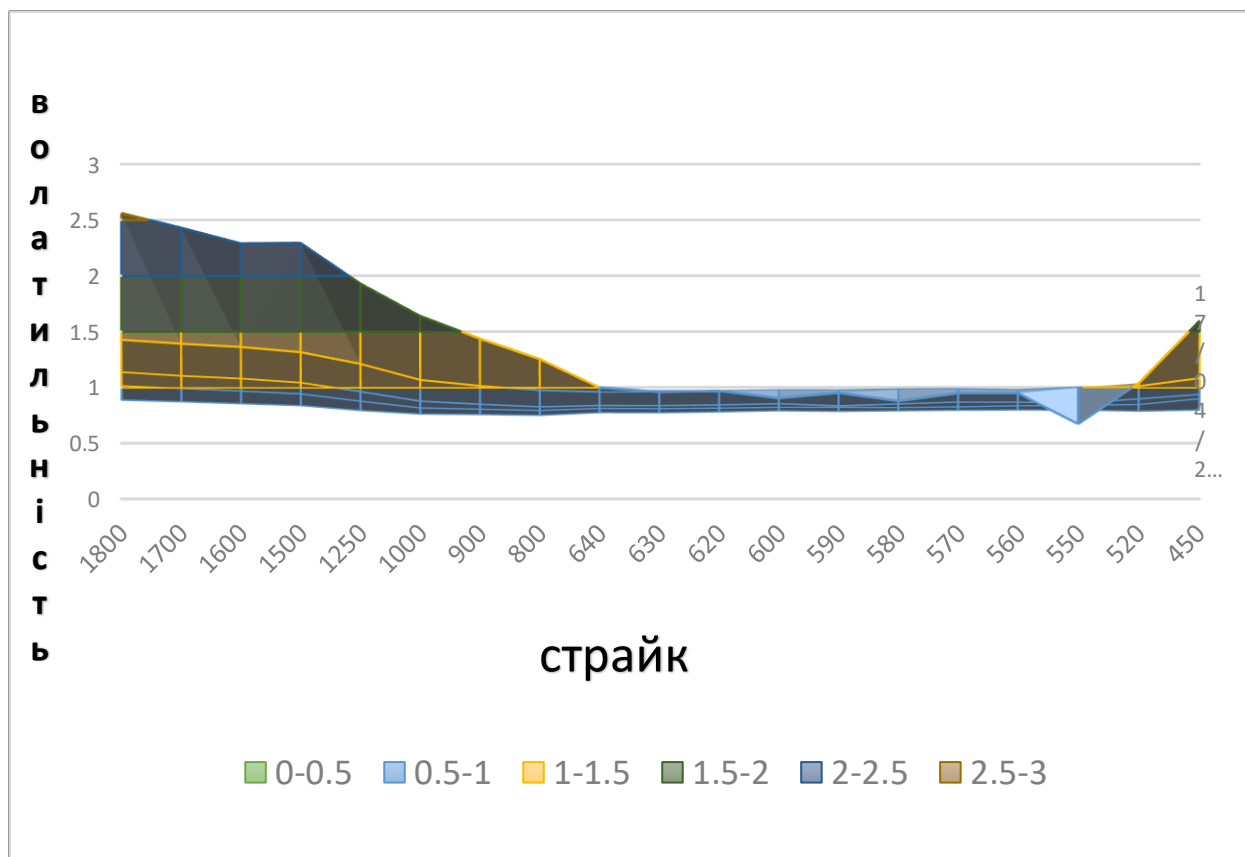
Зробимо графік «посмішки» волатильності для 15 травня 2020. Бачимо, що графік більш пологіший та діапазон волативності менший, ніж на попередньому графіку.



Бачимо, що на наступних трьох графіках, для 19 червня 2020 року, 17 серпня 2020 року, 18 вересня 2020 року, «посмішка» волатильності стає все більш пологою та діапазон волатильності стає все меншим, тобто значення мінливості для кожної ціни страйк відрізняється все менше. Це можна пояснити тим, що дата виконання опціону стає все більш віддаленою.

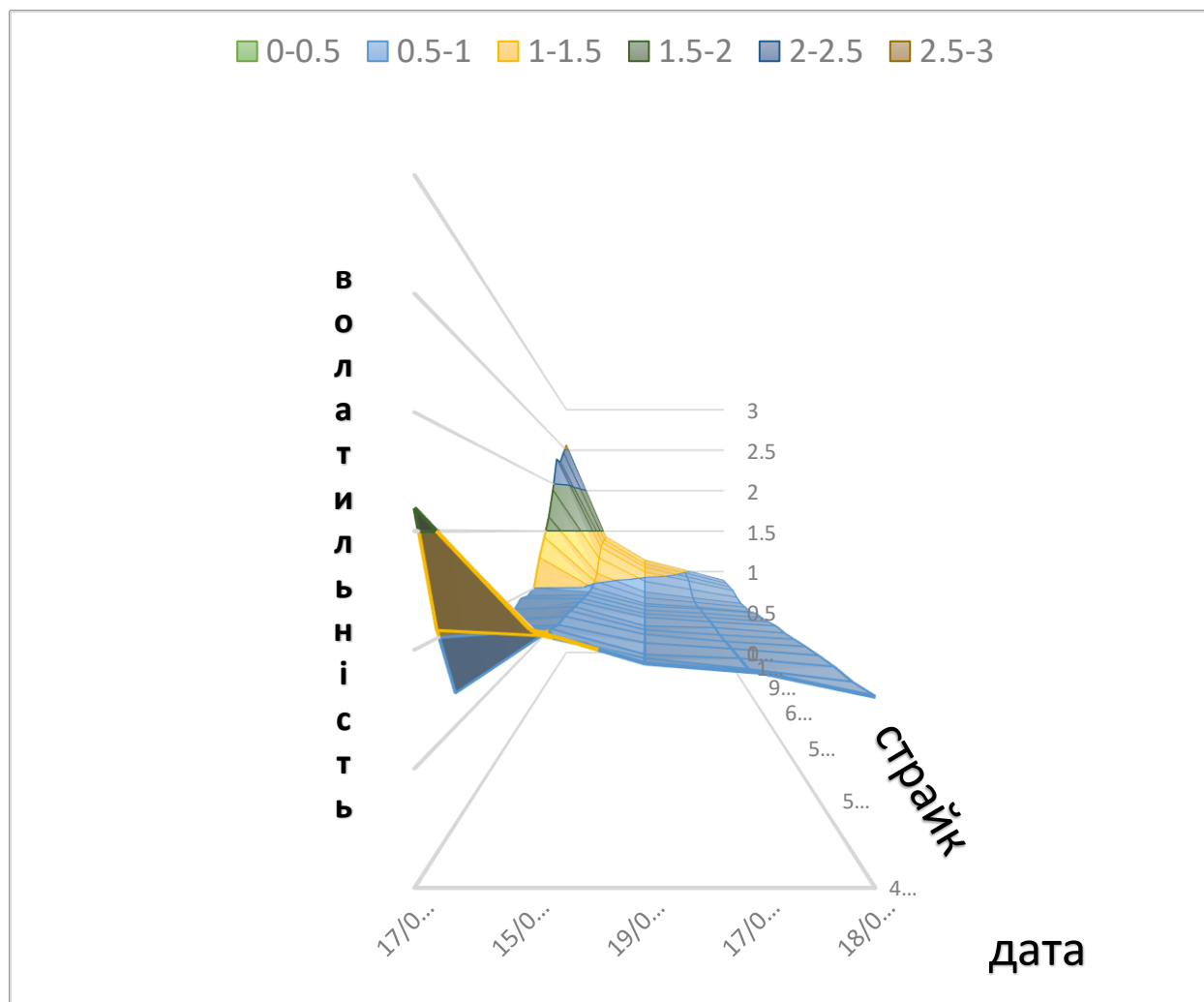


Побудуємо поверхню волатильності, тобто 3Д модель, де буде три вісі: - волатильність, ціна страйк, дата закінчення терміну. Розглянемо поверхню, коли модель по вісі волативності повернута на 0 градусів, без перспективи:



Бачимо, що модель нагадує криву посмішки.

Розглянемо модель, повернену по вісі волатильності на 90 градусів, з перспективою 45 градусів:



Якраз з такої сторони найкраще видно дрейфування «посмішки» волатильності в часі. Якщо дивитися на найближчу дату виконання опціону, тобто 17 квітня 2020 року, видно що кінці поверхні відносно сильно підняти догори, а чим далі термін виконання, тим модель стає плоскішою. Це можна описати наступним чином: ціни схильні до коливаль, тобто чим ближче до дати виконання, тим ризик більший.

Оскільки волатильність росте зі збільшенням ціни страйк, то можна зробити припущення, що очікується зростання. Якби «посмішка» волатильності зростала зі спадом ціни страйк, то можна було б зробити припущення, що очікується зниження ціни на ринку.

ВИСНОВКИ

Торгівля є рушійною силою економіки, а з її розвитком все більш актуальніше проблема оцінювання опціонів. Окрім термінових угод на купівлю чи продаж звичайних акцій існують опціонні контракти на облігації, товари, фондові індекси, іноземну валюту тощо.

Опціоном називають контракт між двома особами, відповідно до якого, перша особа дає другій особа право в межах визначеного періоду часу купити або продати актив за визначеною ціною. Існують «пут» та «колл» опціони.

Інвестору вигідно купувати опціон «колл», якщо очікує підвищення курсу цінних паперів або купує опціон «пут», якщо розраховує на зниження курсу, оскільки зростання страйкової ціни, як і його поточної ринкової ціни активу, ведуть до зростання цін на «колл» опціони та падіння цін на «пут» опціони. А зі збільшення волатильності цін на ринку збільшується ціна на опціони обох видів, оскільки чим більше коливання цін, тим невизначеніша майбутня ринкова ситуація, тобто більше ризиковість продажу опціонів.

Тобто волатильність необхідно розрахувати, якщо потрібен прогноз того, чи буде ціна зростати, чи спадати.

Існує історична та прихована або ж, ще називають, очікувана волатильність. Історична використовується для обрахунку справедливої ціни, а прихована – для побудови кривої та поверхні «посмішки» волатильності.

Існує значна кількість моделей оцінювання вартості опціонів на акції, найвідоміші з них це біноміальна модель оцінювання опціонів або її ще називають модель Кокса – Росса – Рубінштейна, модель Блека – Шоулза, метод Монте – Карло тощо.

Біноміальна модель була створена для дискретного одноперіодного випадку, у якому рух ціни активу відповідає стаціонарному біноміальному стохастичному процесу, тобто на кінець періоду вона може бути більшою, або меншою за початкову. Біноміальна модель та її модифікації використовуються для розрахунку ціни європейський, американських, азіатських опціонів.

Модель Блека – Шоулза дає змогу одержати справедливу величину премії, що сплачується за опціон. При її розрахунках використовуються час, що залишився до дати виконання опціону, ціна базового активу та ціна страйк, рівень процентних ставок, волатильність ціни базового активу та дивіденди. Завдяки цій моделі можна розрахувати ціну для європейського опціону та дати обмежену оцінку американському опціону.

Метод Монте – Карло є чисельним методом оцінки опціонів, на відміну від формули Блека – Шоулза, що є аналітичним методом. Основна його ідея в тому, що оцінюється математичне сподівання виплат, яку згенерує опціон для його власника, шляхом багаторазового генерування можливих шляхів руху ціни акцій. Однозначною перевагою методу Монте – Карло відносно інших способів оцінювання є те, що він може застосовуватися для ціноутворення будь – яких видів опціонів, але через свою універсальність значим недоліком стає необхідність розробляти моделі для кожного виду опціонів.

Коли говорять про «посмішку» волатильності мають на увазі графічне зображення очікуваного рівня мінливості за опціонами з однаковими базовими активами та різними страйками.

Зазвичай очікувана волатильність при оцінюванні опціонів має неоднорідний розподіл – найнижча волатильність споглядається, коли страйк найбільш наближений до актуальної ціни на ринку.

Іншими словами, зазвичай ціна росте плавно, оскільки ріст – це відображення довгих позитивних ринкових тенденцій. Але, якщо трапляється якась криза, то ціна падає досить стрімко. Тому опціони на фондові активи враховують цю особливість при побудові «посмішки» волатильності.

При інших таких самих умовах «пут» опціони з нижніми страйками будуть вартувати більше, ніж «колл» опціони з верхніми страйками, тому і волатильність у них має бути більше. Звідси можна зробити висновок, що продавці «пут» опціонів заробляють на преміях більше, ніж продавці «колл» опціонів, тому що ризики різкого падіння завжди більше, ніж ризики різкого росту.

Для того, щоб побудувати криву та поверхню «посмішку» волатильності достатньо порахувати історичну волатильність, справедливую ціну, греку Вега, за допомогою якої обчислити приховану волатильність, після чого на отриманих даних можна побудувати графік залежностей цін страйку та волатильності.

У цій роботі я рахувала справедливу за формулою Блека – Шоулза. Результат вийшов не коректним, на мою думку, оскільки ситуація на ринку дуже не стабільна в цілому, а в компанії Тесла ситуація різко змінюється щодня, тому для такого випадку краще використовувати іншу модель.

Якщо «посмішка» волатильності росте зі зростанням ціни страйк – це означає, що очікується зростання ціни на ринку, і навпаки, якщо волатильність росте зі зменшення ціни на опціони, бо можна зробити припущення, що очікується спадання ціни.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вопросы экономики №10. 2007, журнал; статья А. Суэтина «Определение стоимости производных финансовых инструментов»
2. Инвестиционная деятельность: Учебник/ под ред. Г.П. Подшиваленко, Н.В. Киселёвой; Москва, издательство КНОРУС, 2005.
3. Інвестиційна діяльність в Україні та світі — Базові моделі вартісної оцінки опціонів
4. Капиталовложения. Экономический анализ инвестиционных проектов: Учебник/авторы: Г. Бирман, С. Шмидт; Москва, издательство ЮНИТИ, 2003.
5. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика: Учебник/авторы: П.П. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк; Москва, издательство Дело, 2001 г.
6. Организация и финансирование инвестиций: Учебник/автор: Я.С. Мелкумов; Москва, издательство ИНФРА-М, 2000 г.
7. Ankudinova, J. and M. Ehrhardt, 2008. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. Comput. Math. Applic.
8. Barton, K. and У. Lawryshyn, 2011. Integrating real options with managerial cash flow estimates. Eng. Economist
9. Black, F. and M. Scholes, 1973. The pricing of options and corporate liabilities. J. Polit. Econ
10. Chesney, M. and L. Scott, 1989. Pricing European currency options: A comparison of the modified Black- Scholes model and a random variance model.

11. J. Financial Quantitative Analysis

12. Company, R., A. Gonyáley and L. Jódar, 2006. Numerical solution of modified Black-Scholes equation pricing stock options with discrete dividend. Math. Comput. Modell..

13. Cutland, N.J., P.E. Kopp and W. Willinger, 1995. Stock price Returns and the Joseph effect: A fractional version of the Black-Scholes model. Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, (RFA'95), Springer International Publishing, Birkhäuser, Basel.

14. https://www.researchgate.net/publication/324325960_A_Review_of_the_Recent_Advances_Made_in_the_Black-Scholes_Models_and_Respective_Solutions_Methods

15. <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/tsla/historical>

16. <https://www.marketbeat.com/stocks/NASDAQ/TSLA/>

17. <https://www.mobt3ath.com/uplode/book/book-32369.pdf>

18. <https://www.avatrade.ru/education/trading-for-beginners/chto-takoe-volatilnost>

19. <https://aaronshlegel.me/implied-volatility-functions-python.html>