УДК 510.649
Афонін А.О., старший викладач

Про резолюційні стратегії з слабкою факторизацією

В роботі досліджуються резолюційні стратегії лінійного типу для впорядкованих диз'юнктів, що використовують ослаблений варіант правила факторізациі. Доведення їхньої коректності та повноти спирається на так зване літеральне числення. Особливості виведення за допомогою таких стратегій демонструються на прикладах.
Ключові слова: диз'юнкт, коректність методу пошуку несумісності, лінійна резолюція, повнота методу пошуку несумісності, правило резолюції, правило факторизації, числення.

E-mail: andrew.afonin@gmail.com
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Afonin A.O., senior lecturer

On resolution strategies with weak factorization

Linear-type resolution strategies using a simplified modification of the factorization rule for ordered clause are investigated in the paper. The proofs of their soundness and completeness are based on a so-called literal calculus. Peculiarities of inference search with the help of such strategies are demonstrated by means of examples.

Key words: clause, soundness of refutation method, linear resolution, completeness of refutation method, resolution rule, factorization rule, calculus.

Вступ

Сучасні інтелектуальні системи вимагають застосування ефективних машинних засобів дедуктивних перетворень в класичній логіці першого порядку. Як правило, при реалізації таких систем перевага віддається резолюційному підходу, уперше запропонованому в [1] (див. також [2]). В поточний час він є достатньо вивченими з погляду побудови різноманітних його стратегій, під якими, найчастіше, розуміються різні обмеження, яким повинні задовольняти виведення, що будуються. Зокрема, досить добре була вивчена резолюційна техніка, що оперує із впорядкованими диз'юнктами як для лінійної [3,4], так і вхідної [5] резолюцій. В [6] було показано, що побудова "проекцій" деревоподібних структур, які використовуються в секвенційних численнях, призводить до появи нових повних розширень вхідної резолюції.

У даній роботі пропонуються нові резолюційні стратегії лінійного типу для впорядкованих диз'юнктів, що спираються на результати роботи [6] про літерні дерева і використовуються для пошуку суперечності.

Особливої уваги вони набули у зв'язку з простотою організації процесу пошуку висновку на ЕОМ, який відображає послідовне застосування правил висновку з посиланнями, одним з яких обов'язково є попередній висновок. З іншого боку, відсутність в них прямих аналогів такого правила, як поглинання, призводить до породження значного числа бектрекінгів, що робить значний вплив на ефективність пошуку суперечності в лінійному випадку. В зв'язку з цим розгляд лінійних стратегій для впорядкованих діз'юнктів з обмеженнями на резольвіруємі літери може виявитися істотним поліпшенням процесу пошуку виведення порожнього диз'юнкта [7-10]. Цим пояснюється актуальність досліджень, представлених в роботі.

Відмітимо, що особливістю підходу, який розглядається, є те, що, як і в [6], коректність і повнота пропонованих стратегій є наслідком результатів і методів, розвинутих у [6], до якої і відсилається зацікавлений читач.

Також відзначимо, що всі побудови і результати стосуються тільки класичної логіки першого порядку в її резолюційній трактовці. Як звичайно, виведенням називається послідовність формул, кожна з який є або аксіома (тобто належить вхідній множині), або отримана з попередніх формул за одним із правил виведення.

Основні поняття та позначення

Розглядається класична логіка першого порядку з функціональними символами і без рівності. При цьому, вважаються відомими поняття атомної формули, формули, літери і доповнення літери.

Якщо L - літера, то ~L означає її доповнення.

Формула, яка є результатом перейменування змінних в деякій формулі, називається її *варіантом*.

Формула виду $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ називається *диз'юнктом* ($L_1, \ldots, L_n$ - літери), який ототожнюється з впорядкованою мульти-множиною. Порожній диз'юнкт позначається символом □.

Зауваження. Представлення диз'юнкту як формули дозволяє розрізняти різні входження однієї і тієї ж літери в один і той же диз'юнкт. Ця властивість диз'юнктів грає важливу роль в подальшому. Також слід відзначити, що для досягнення мети даної роботи є дуже важливим те, що диз'юнкт являє собою "лінійний" вираз при читанні його як формули зліва направо, який задає лінійний порядок на входженнях литер в диз'юнкт.

Надалі *IS* позначає вхідну множину (вхідних) диз'юнктів.

Якщо $C \in IS$, і C є диз'юнкт $L_1 \vee \ldots \vee L_n$, то пара $<C,i>$ ($1 \le i \le n$) називається *індексом* входження літери L_i в C відносно *IS*. Відзначимо, що при застосуванні будь-яких правил виведення до диз'юнктів з *IS*, а потім до їхніх наслідків і т.д., зберігаються індекси літер, що належать диз'юнктам з множини *IS*.

Підстановка, уніфікатор і найбільш загальний уніфікатор (н.з.у) згадуються в змісті роботи [1]. Крім того, якщо σ є підстановка і *Ex* є вираз чи множина виразів, то результат застосування σ до *Ex* позначається $Ex{*}\sigma$.

Резолюційні стратегії, які розглядаються в роботі, базуються на деяких модифікаціях правила бінарної резолюції, а також правилах слабкої факторизації і квазіпоглинання. Виведення за допомогою цих стратегій розуміється в звичайномі сенсі.

Правило вхідної резолюції IR. Нехай диз'юнкти C_1 і C_2 мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E \vee D_3$, де C_2 належить вхідній множині *IS* і D_1, D_2, D_3 - диз'юнкти (можливо, порожні), а L, E - літери. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \sim E\}$. Тоді можна сказати, що із C_1 і C_2 за правилом вхідної резолюції *IR* може бути виведений диз'юнкт $D_1 \vee D_2 \vee D_3){*}\sigma$.

Правило бінарної резолюції BR. Нехай диз'юнкти C_1 і C_2 мають вигляд $D_1 \vee L$ і $D_2 \vee E$, де D_1 і D_2 - диз'юнкти (можливо, порожні), а L, E - літери. Нехай існує н.з.у. σ множини $\{L, \sim E\}$. Тоді говориться, що із C_1 і C_2 за правилом бінарної резолюції *BR* може бути виведений диз'юнкт $D_1 \vee D_2){*}\sigma$.

Зауваження. Система "вхідна резолюція + звичайна факторизація" не є повним методом пошуку суперечності у загальному випадку навіть у разі інтерпретації диз'юнкта як множини літер [1,5]. Нижче досліджуються можливості повного розширення метода пошуку вхідного спростування (тобто на базі правила *IR*) до різних варіантів лінійної резолюції, коли на застосування правила факторизації накладаються додаткові вимоги відносно впорядкованих диз'юнктів.

Слабка факторизація WF. Нехай $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \ldots C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ є диз'юнкт, у якому $C_1, \ldots, C_n$ є диз'юнкти, і $L_1, \ldots, L_n$ є літери, що мають один і той же індекс. Припустимо, що існує н.з.у. σ множини $\{L_1, \ldots, L_n\}$. Тоді говориться, що із $C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \ldots C_{n-1} \vee L_n \vee C_n$ за правилом слабкої факторизації *WF* може бути виведений диз'юнкт $(C_1 \vee L_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n){*}\sigma$.

Зауваження. У випадку, коли у формулюванні правила *WF* опущена вимога, щоб літери $L_1, \ldots, L_n$ мали той самий індекс, ми одержуємо звичайне правило факторизації [4] для впорядкованих диз'юнктів.

Лінійний пошук несумісності з слабкою факторизацією

Дана стратегія є модифікацією впорядкованої лінійної резолюції [2], у якій використовується правила *IR*, *BR* і *WF*.

Відповідно лінійної стратегії вважається, що виведення $C_1, \ldots, C_m$ ($m \ge 1$) задовольняє лінійній *стратегії з слабкою факторизацією* відносно диз'юнкта C, що належить вхідній множини *IS*, якщо C_1 є варіант C, $C_1, \ldots, C_m$ попарно не мають загальних змінних і для всякого $i = 2, \ldots, m$ виконуються хоча б одна з таких умов:

- C_i є варіант вхідного диз'юнкта з *IS*;
- C_i є результат застосування *WF* до C_{i-1};
- C_i є результат застосування *IR* до C_{i-1} і D, де D є варіант вхідного диз'юнкта ($1 \le j \le i-1$);
- C_i є результат застосування *BR* до C_{i-1} і D, де D є варіант раніше отриманого диз'юнкта C_j ($1 \le j \le i-1$).

Твердження 1 (про коректність і повноту лінійної резолюції з правилами *IR*, *BR* і *WF*). Нехай *IS* є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є сумісна множина. Множина *IS* є несумісною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з слабкою факторизацією порожнього диз'юнкта □ в системі пошуку спростування відносно C.

Доведення. Розглянута теорема може бути легко отримана на базі досліджень з повноти літеральних числень, які були проведені в роботі, з використанням диз'юнктивних образів літеральних дерев [6]. *Q.E.D.*

Приклад 1. Нехай *IS* є множина $\{L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}, \neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}\}$, де L - атомарна формула, $\neg$ є знак заперечення, а впорядковані пари натуральних чисел служать індексами входжень літери L (запис $L^{(i,j)}$ означає, що літера L займає j-те місце в i-ому диз'юнкті). Тоді маємо наступне лінійне виведення в системі пошуку спростування з правилами *IR*, *BR* і *WF*:

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (2) і (1), за правилом *IR* або *BR*)
4. $\neg L^{(2,2)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (3) і (2), тільки за правилом *IR*)
5. $\neg L^{(2,2)}$ (із (4), за правилом *WF*)
6. $L^{(1,1)}$ (із (5) і (1), за правилом *IR* або *BR*)
7. $\square$ (із (6) і (5), тільки за правилом *BR*)

Отже, *IS* є несумісною множиною вхідних диз'юнктів.

Зауваження. Правило слабкої факторизації не може бути застосовано до вхідних диз'юнктів. От чому виникає необхідність в застосуванні правила *IR*. Цей приклад також демонструє, що без застосування правила *WF* не можна отримати висновок $\square$. Те ж саме стосується *IR* і *BR*. Крім того, звертаємо увагу на той факт, що при заміні звичайної факторизації правилом слабкої факторизації не можна уникнути появи тавтологій (тобто диз'юнктів, що містять літеру та її доповнення, таких як, наприклад, (3)) в будь-яких виведеннях $\square$, навіть у випадку застосування бінарної резолюції без будь-яких обмежень. Це легко перевіряється за допомогою тільки-но приведеного прикладу.

Наслідок. Метод (звичайної) впорядкованої лінійної резолюції [2] є коректним та повним.

Доведення. Очевидно. *Q.E.D.*

Зауваження. У випадку звичайної лінійної резолюції можна шукати виведення $\square$, що не містять тавтологій. Так, для наведеного вище прикладу маємо:

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg L^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $L^{(1,1)}$ (із (1), за правилами *IR* та звичайної факторизації)
4. $\neg L^{(2,1)}$ (із (2), за правилами *IR* та звичайної факторизації)
5. $\square$ (із (4) і (3), за правилом *BR*)

Лінійне виведення з квазіпоглинанням

Спроба об'єднати правило *BR* і *WF* в одне правило призводить до стратегії поглинання.

Диз'юнкт C буде називатися *початковим піддиз'юнктом* диз'юнкта D тоді і тільки тоді коли D має вигляд $C \vee D'$, де D' - диз'юнкт. (У цьому визначенні враховується те, що графічно рівні літери з різними індексами вважаються різними.)

Правило резолюційного квазіпогликання SR. Нехай диз'юнкти D_1 і D_2 мають вигляд $C_1 \vee L$ і $C_2 \vee E$, існує н.з.у. σ множини $\{L,\sim E\}$, де L і E - літери, та C_1 і C_2 - диз'юнкти. Нехай існує така підстановка θ, що $(C_2{*}\sigma){*}\theta$ може бути виведеним із $((C_1 \vee C_2){*}\sigma)$ деякими послідовностями застосувань правила *WF*, причому $(C_2{*}\sigma){*}\theta$ є початковим піддиз'юнктом диз'юнкта $((C_1 \vee C_2){*}\sigma){*}\theta$. Тоді можна сказати, що за правилом *SR* із D_1 і D_2 може бути виведений диз'юнкт $(C_2{*}\sigma){*}\theta$.

Зауваження. Зрозуміло, що θ може бути одночасним найбільш загальним уніфікатором певних множин, що складаються тільки з літер, які мають той самий (свій для кожної множини) індекс. Ця властивість дозволяє "переписати" правило *SR* тільки в термінах метода резолюції зі звичайним алгоритмом уніфікації (не залучаючи поняття слабкої факторизації).

Стратегія лінійного виведення з квазіпоглинанням. Виведення C1, ..., Cm (m ≥ 1) називається лінійним виведенням з квазіпоглинанням відносно диз'юнкта C, що належить вхідній множині IS, якщо C1 є варіант C, C1, ..., Cm попарно не мають загальних змінних і для всякого i = 2, ..., m виконуються хоч би одна з таких умов:

- C_i є варіант вхідного диз'юнкта з *IS*;
- C_i є результат застосування *WF* до C_{i-1};
- C_i є результат застосування *IR* до C_{i-1} і D, де D є варіант вхідного диз'юнкта ($1 \le j \le i-1$);
- C_i отриманий за правилом *SR* в інших випадках.

Твердження 2 (про коректність і повноту лінійної резолюції з квазіпоглинанням). Нехай *IS* є вхідна множина і $C \in IS$, причому $IS \setminus \{C\}$ є сумісна множина. Множина *IS* є несумісною тоді і тільки тоді, коли існує лінійне виведення з квазіпоглинанням порожнього диз'юнкта $\square$ відносно C.

Доведення (схема). Якщо звернутися до числення ***IS*** з [6], то аналізуючи літеральні дерева у виведеннях дерев доведенню в ***IS***, і переходячи потім до їх диз'юнктивних образів одержуємо необхідне. *Q.E.D.*

Зауваження. Для пропозиціональної логіки одержуємо, що $(C_1*\sigma)*\theta$ є піддиз'юнктом диз'юнкта D_1 (σ і θ - порожні підстановки), і надалі D_1 може не приймати участь в пошуку виведення $\square$.

Приклад 2. Нехай *IS* є множина $\{L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}, \neg E^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}, E^{(3,1)} \vee \neg L^{(3,2)}\}$. Тоді можна побудувати наступне виведення, яке задовольняє лінійному виведенню з правилом квазіпоглинання *SR*.

1. $L^{(1,1)} \vee L^{(1,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
2. $\neg E^{(2,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
3. $E^{(3,1)} \vee \neg L^{(3,2)}$ (вхідний диз'юнкт)
4. $L^{(1,1)} \vee E^{(3,1)}$ (із (3) і (1), за правилом *IR*)
5. $L^{(1,1)} \vee \neg L^{(2,2)}$ (із (4) і (2), за правилом *IR*)
6. $L^{(1,1)}$ (із (5) і (1), тільки за правилом *SR*)
7. $\neg E^{(2,1)}$ (із (6) і (2), за правилом *SR* або *IR*)
8. $\neg L^{(3,2)}$ (із (7) і (3), за правилом *IR*)
9. $\square$ (із (8) і (6), за правилом *SR*)

Отже, множина вхідних диз'юнктів є несумісною.

Зауваження. Як і у випадку лінійної резолюції з слабкою уніфікацією, застосування лінійного виведення з квазіпоглинанням призводить до необхідності породження тавтологій (диз'юнкт (5)). Також відзначимо, що в прикладі 2 після одержання (6) можна "блокувати" (за допомогою поглинання) використання диз'юнктів (1), (4) і (5), а після породження диз'юнкту (7) можна "блокувати" і (2); у цьому випадку, к диз'юнкту (7) може бути застовано тільки правило *IR* з породженням диз'юнкту (8), для якого можливе тільки застосування правила *SR* з породженням $\square$ на останньому кроці (9).

Висновок

Сформульовані вище стратегії з'явилися в результаті аналізу виведень у численні літеральних дерев із [6] і їхніх диз'юнктивних образів. Тому результати про коректність і повноту побудованих стратегій виявилися наслідками коректності і повноти числення літеральних дерев, у той час як їх прямий доказ вимагав би значних зусиль, не кажучи вже про формулювання самих стратегій. Цей факт можна пояснити тією причиною, що деревоподібні структури містять більше інформації про способи організації процесу пошуку, ніж їхні лінійні аналоги.

Автор висловлює надію, що резолюційна техніка, запропонована у даній роботі, як і самі лінійні стратегії, є корисними в різних інтелектуальних системах з апаратом пошуку логічного виведення.

Література

1 1. Robinson J. A. A machine-oriented logic based on resolution principle // Journal of the ACM. - 12. - 1965. - P. 23 - 41.

2. Bachmair, L., Ganzinger, H. Resolution theorem proving // Handbook of Automated Reasoning (Ed. by A.Robinson and A.Voronkov). Elsevier Science Pub. . - 2001. - P. 19 - 99.

3. Loveland D. W. A unifying view of some linear herbrand procedures // Journal of the ACM. - 19(2) . - 1972. - P. 366-384.

4. Minicozzi E. and Reiter R.: A note on linear resolution strategies in consequence-finding. Artificial Intelligence, 3 (1-3), 1972. - P. 175-180.

5. Chang C. and Lee R. Symbolic logic and mechanical theorem proving. Academic Press, Inc. - Orlando, FL, USA. - 1997.

6. Афонін А.О. Про машинно-орієнтовані числення секвенціального типу для класичної логіки першого порядку // Наукові записки. Національний університет "Києво-Могилянська Академія". - Комп'ютерні науки . - НаУКМА, К. - № 99. - 2009.- С. 23-28.

7. Clocksin W.F. and Mellish C.F. Programming in Prolog. New York: Springer-Verlag. - 1984.

8. Reiter R. Two results on ordering for resolution with merging and linear format // Journal of the ACM. - 18, 1971. - P. 630-646.

9. Gabbay D.M., Christopher J. Hogger Ch.J, Robinson J.A., Siekmann J.S. Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. - Volume 2, Deduction Methodologies. - Oxford University Press. - 1994.

10. Shen Y., Yuan L., You J., Zhou N. Linear tabulated resolution based on Prolog control strategy // Theory and Practice of Logic Programming. - 1(1). - 2001. - P. 71-103.

Надійшла до редколегії
11.12.2009