

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота

освітній ступінь – магістр

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕСІВ СУБДИФУЗІЇ ДЛЯ
ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ»**

Виконала: студентка 2-го року
навчання
освітньо-наукової програми
«Системний аналіз»,
спеціальності 124 Системний аналіз

Петренко Оксана Ігорівна

Керівник: Щестюк Н. Ю.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

« ____ » _____ 20 ____ р.

Київ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
I РОЗДІЛ. Процеси дифузії та їхня симуляція	5
1.1 Загальна характеристика процесу дифузії	5
1.2 Арифметичний Броунівський рух (модель Башельє)	6
1.2 Геометричний Броунівський рух	8
1.3 Дифузійна модель Блека-Шоулза: суть, переваги і недоліки	9
II РОЗДІЛ. Процеси субдифузії та їхнє моделювання для цін на опціони	16
2.1 Загальна характеристика процесу субдифузії	16
2.2 Характеристика та комп'ютерне моделювання субординатора	18
2.3 Характеристика та комп'ютерне моделювання оберненого субординатора	20
2.4 Моделювання процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)	22
2.5 Кореляційна структура динамік лог-ретурнів, підпорядкованих субдифузійному процесу	23
2.6 Справедлива ціна опціону для субдифузійної моделі Блека-Шоулза	26
2.7 Числові результати для реальних даних. Порівняльний аналіз	27
ВИСНОВОК	36
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	38
ДОДАТОК А	40
ДОДАТОК Б	41
ДОДАТОК В	42
ДОДАТОК Г	43
ДОДАТОК Д	44
ДОДАТОК Е	45
ДОДАТОК Ж	46
ДОДАТОК К	47
ДОДАТОК Л	48
ДОДАТОК М	49

ВСТУП

Застосування процесів субдифузії для моделювання цін на опціони та інші цінні папери є актуальним та популярним напрямком дослідження у сучасній фінансовій математиці. Одним із основних завдань на фінансових ринках є якомога точніше спрогнозувати рух цін на активи із врахування великої кількості факторів, які на неї впливають. Оскільки динаміка руху цін неможлива без опису стохастичних процесів, до сих пір важко точно спрогнозувати ціни деривативів.

Існують патерни, які можуть бути причиною утворення сталих проміжків ціни. Наприклад, глобальні зміни, що негативно впливають на фінансову активність, або на ринку бере участь невелика кількість гравців, чи ринок є молодим, який тільки розвивається тощо.

Стохастичні процеси Леві та Броунівський рух є неперервними, тому процеси дифузії не можуть описати поведінку ринку без будь-якої торгівлі або без зміни ціни. В такому випадку необхідно використовувати процес субдифузії, який застосовується в фінансовій математиці для комп'ютерного моделювання стійких проміжків цін на активи. Субдифузію, в свою чергу, можливо змодельовати на основі, так званих, субординаторів. Існують багато видів субординаторів: α -stable (α -стійкий) субординатор, tempered-stable субординатор, гамма субординатор та обернений Гаусовий субординатор (Inverse Gaussian). Обернений Гаусовий субординатор буде застосовуватись в цьому дослідженні для побудови процесу субдифузії.

Дипломна робота є продовженням теми курсової праці.

За *метою даної роботи* поставлено використання процесів субдифузії для моделювання мало ліквідних ринків і тих, що розвиваються, та прогнозу цін на опціони.

Мета дипломної роботи зумовлена наступними науковими завданнями:

1. Обрати субординатор як обернений Гаусовий та симулювати його;
2. Симулювати обернений субординатор з оберненим Гаусовим розподілом;
3. Здійснити комп'ютерне моделювання процесу субдифузії для Геометричного броунівського руху (моделі Блека-Шоулза);
4. Знайти автокореляційну структуру лог-ретурнів для моделі субдифузії Блека-Шоулза;
5. Прорахувати справедливую ціну опціону на купівлю акції, рух якої підпорядковується моделі субдифузії Блека-Шоулза з оберненим Гаусовим субординатором;
6. Проаналізувати числові результати для реальних даних.

Робота складається з двох розділів.

Перший розділ присвячено дослідженню та опису процесу дифузії для арифметичного та геометричного Броунівських рухів. У розділі досліджено модель Блека-Шоулза, а саме формула для оцінювання цін на опціони.

Другий розділ присвячено аналізу та моделюванню процесу субдифузії, а також його застосуванню в моделі Блека-Шоулза для прогнозування ціни на опціони для реальних даних.

У результаті створено програмний продукт на мові Python, який може застосовуватись для моделювання прогнозу ціни на опціони.

I РОЗДІЛ. Процеси дифузії та їхня симуляція

1.1 Загальна характеристика процесу дифузії

Процес дифузії є широко розповсюдженим явищем в природі. З фізичної точки зору це процес загального переміщення будь-яких частинок, зазвичай атомів, молекул, енергії, з області більшої її концентрації в меншу. Як наслідок процесу вирівнюється концентрація частинок у займаному об'ємі.

Проте дане природне явище не залишилось тільки в рамках дослідження науки фізики. В теорії ймовірностей та статистиці дифузія є розв'язком стохастичного диференціального рівняння - рівняння, в якому один або більше членів є стохастичним процесом [1]. Варто зазначити, що стохастичний процес є певним узагальненням поняття випадкової величини, а саме величини, що залежить від часу. В теорії ймовірностей стохастичний процес також визначають як об'єкт, який являє собою сукупність випадкових величин. Враховуючи вищезазначене, розв'язком стохастичного диференціального рівняння буде випадковий (стохастичний) процес. Це неперервний марковський процес з майже неперервними траєкторіями вибірки. Прикладами дифузійних процесів є Броунівський рух, відбитий Броунівський рух і процеси Орнштейна–Уленбека. В даній дипломній роботі будуть застосовуватись саме Броунівський рух, а саме Арифметичний та Геометричний Броунівські рухи.

Броунівський рух названий на честь британського ботаніка Роберта Брауна, який досліджував поведінку пилку. Броунівським рухом називають вибіркиму траєкторію дифузійного процесу, яка моделює траєкторію руху частинок пилку в воді, схильних до випадкових переміщень в наслідок зіткнення з іншими частинками пилку. Це означає, що в будь-який момент часу положення частинки є рандомною.

Також, поняття Броунівського руху вивчали й інші відомі вчені, зокрема Альберт Ейнштейн та Норберт Вінер. У свою чергу, Вінер розробив математичну модель Броунівського руху, яка також ще називається Вінерівським процесом

W_t . Це стохастичний процес з неперервним часом та незалежними приростами. Являється одним із найбільш популярних прикладів процесу Леві (будь-який неперервний процес із початком в нулі, який має невід’ємні незалежні прирости). Має низку властивостей:

- $W(0) = 0$
- Має незалежні прирости;
- Має Гаусові прирости: $W(t + u) - W(t) \sim N(0, u)$;
- Має неперервний шлях (без стрибків).

В даній дипломній роботі застосовуються процес Іто для вирішення стохастичного диференціального рівняння. За означенням, процес Іто - це узагальнений Вінерівський процес, в якому параметри a та b є функціями від базової змінної x і часу t [2]. Загальні процеси Іто представляють собою “деформацію” простого вінерівського блукання за допомогою коефіцієнту зміни першого порядку $a(x, t)$ та коефіцієнту другого порядку $b(x, t)$. Тоді зміна dx матиме вигляд [3]:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\delta W \quad (1.1)$$

де $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$ - безкінечно малий вінерівський “шум”, а $\varepsilon \sim N(0,1)$. Функція $a(x, t)$ - є коефіцієнтом зносу, а $b(x, t)$ - коефіцієнтом волатильності, квадрат якого $b^2(x, t)$ називається дифузиею. Рівняння Іто (1.1) дозволяє легко моделювати часову динаміку довільного стохастичного процесу за допомогою ітераційної схеми [3]

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t + b(x_k, t_k)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_k \quad (1.2)$$

1.2 Арифметичний Броунівський рух (модель Башельє)

Піонером прогнозування цін на опціони із використанням такого стохастичного процесу, як Броунівський рух, був саме французький математик Луї Башельє, який у своїй докторській дисертації (1900 р.) започаткував модель

ціноутворення опціонів. Він запропонував перший аналіз математичних властивостей броунівського руху для моделювання стохастичної зміни курсів акцій, і це випередило роботу Ейнштейна (1905) на п'ять років. Теорія випадкових блукань Башельє стверджує, що ціни на акції постійно реагують на нову інформацію і рухаються під впливом цієї інформації як частинки пилу під впливом ударів молекул рідини. В основі моделі Башельє лежить арифметичний Броунівський рух. Від стандартного Броунівського руху відрізняється зсувом: якщо $\mu = 0$, то це стандартний Броунівський рух, а якщо μ константний, то це Броунівський рух із константним зсувом, тобто арифметичний. Рівняння дифузії для арифметичного Броунівського руху має вигляд [4]:

$$dX_t = \mu dt + \sigma \delta W_t \quad (1.3)$$

де:

X_t - ціна активу;

W_t - Броунівський рух або Вінерівський процес, тобто процес з незалежними, нормально розподіленими приростами та неперервною траєкторією;

σ - стандартне відхилення ціни активу, або волатильність (вимірює величину зміни ціни активу);

μ - це параметр зсуву процесу. Якщо $\mu > 0$, в середньому траєкторія буде рухатися нагору, інакше - вниз.

Дане стохастичне диференціальне рівняння можна вирішити за допомогою рівняння Іто [3], в якому для арифметичного Броунівського руху параметри a та b не залежать від часу, тоді рівняння дифузії матиме вигляд:

$$dx = a(x)dt + b(x)\delta W_t \quad (1.4)$$

а ітераційна схема Ейлера для моделювання процесу має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k + a_k \Delta t + b_k \varepsilon_k \sqrt{\Delta t}, \quad (1.5)$$

де $\varepsilon_k \sqrt{\Delta t} = W_t$, a_k та b_k є константними та можуть бути визначеними для реальних значень у II розділі. Програмна ералізація моделі наведена в Додатку А. В якості результату було отримано графік:

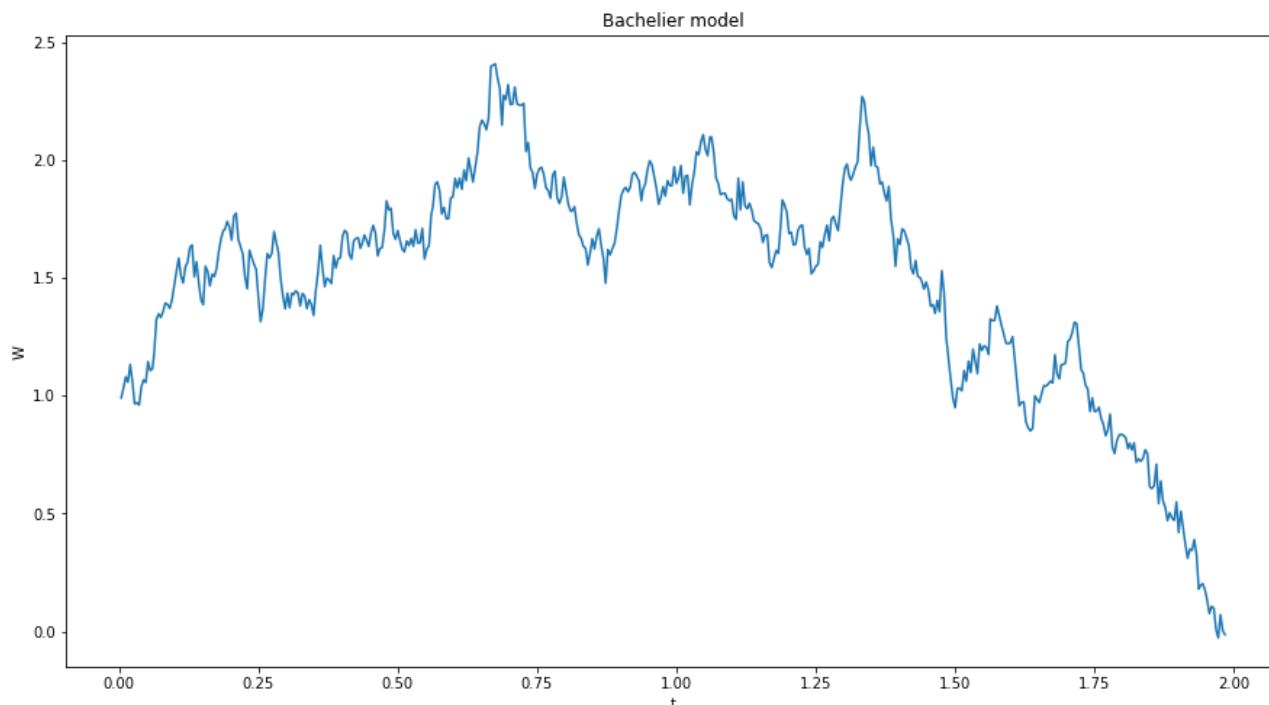


Рис. 1.1 - модель Башельє з Арифметичним Броунівським Рухом, параметри: $t_0 = 0$; $x_0 = 1$; $step = \frac{1}{252}$; $num = 500$ (к-ть ітерацій)

1.2 Геометричний Броунівський рух

Ще одним різновидом Броунівського руху, який активно застосовується в прогнозуванні цін на опціони є геометричний Броунівський рух - це стохастичний процес неперервного часу, в якому логарифм випадкової величини слідує за броунівський рухом із дрейфом. Інакше кажучи, це стандартний Броунівський рух із лінійним зсувом.

Формула дифузії для геометричного Броунівського руху має вигляд [5]:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t \delta W_t \quad (1.6)$$

а рівняння Іто:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\varepsilon\sqrt{dt} \quad , \quad (1.7)$$

де параметри a та b залежать від x та часу, а ітераційна схема:

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t + b(x_k, t_k)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_k \quad (1.8)$$

Програмна реалізація геометричного Броунівського руху наведена в Додатку Б.

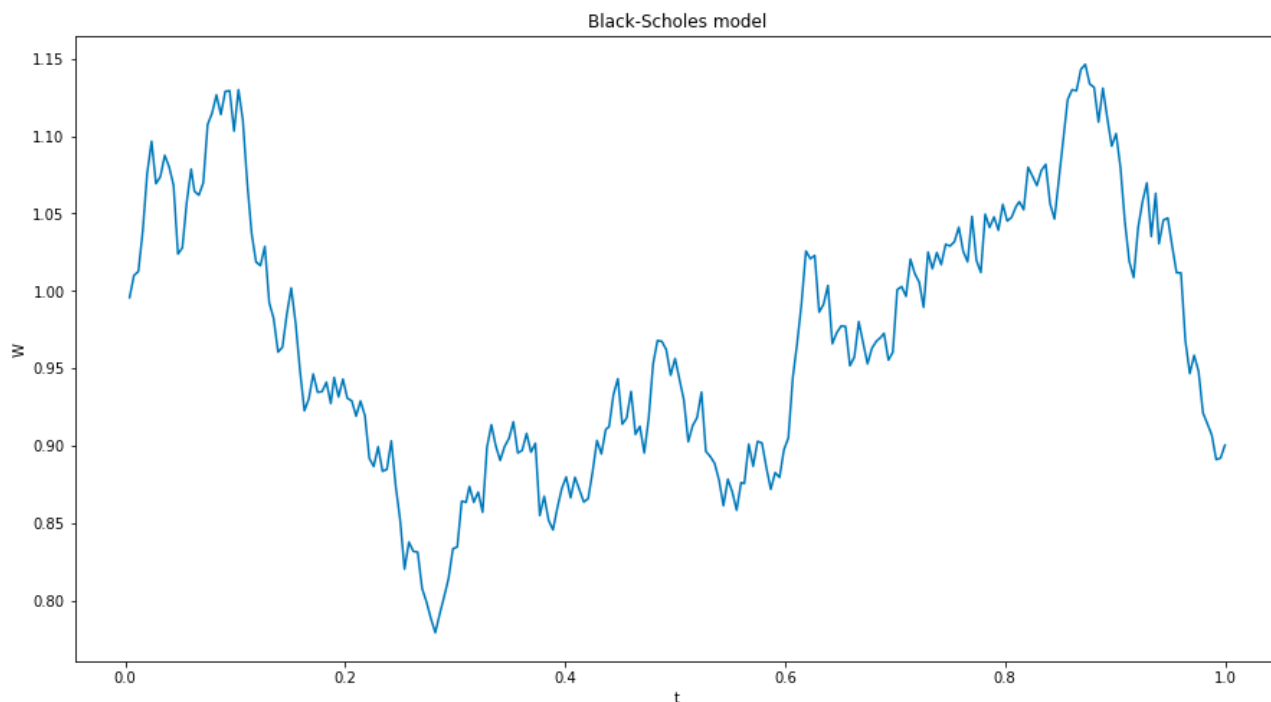


Рис. 1.2 - модель Блека-Шоулза з геометричним Броунівським рухом. Параметри: $t_0 = 0$; $x_0 = 1$; $\text{step} = 1/252$; $\text{num} = 500$ (к-ть ітерацій);

1.3 Дифузійна модель Блека-Шоулза: суть, переваги і недоліки

Модель Башельє безумовно є потужним відкриттям у процесі моделювання цін на опціони. Вона дала поштовх до розвитку нової моделі прогнозування цін на опціони. Саме модель Блека-Шоулза-Мертон (1970 р.) використана в даній роботі для обчислення справедливої ціни опціону.

В даній моделі розглядаються безризикові та ризикові активи. Безризикові активи розраховуються за формулою:

$$A_n = A_0 e^{rt} \quad (1.9)$$

а ризикові активи можна виразити у вигляді стохастичного диференціального рівняння наведеного у формулі (1.6)

де ціна активу підпорядковується геометричному Броунівському руху [5]:

$$X_t = X_0 \exp \{ \sigma B(t) + \mu t \}, X_0 > 0 \quad (1.10)$$

Модель Блека-Шоулза містить в собі рівняння для прорахування ціни на опціони. Перед цим необхідно зазначити основні припущення, що стоять за моделлю Блека-Шоулза [6]:

- Опціони є європейськими (можуть бути виконані тільки на дату закінчення терміну опціону);
- немає комісій (торгівля безкоштовна);
- Існує постійна безризикова ставка, за якою завжди можна позичити гроші;
- Ціни акцій мають логнормальний розподіл, а волатильність є постійною;
- Акції не виплачують дивідендів;
- Немає можливості арбітражу;

Незважаючи на те, що деякі з цих припущень не точно відображають реальність, модель Блека Шоулза все ще залишається однією з найкращих і найбільш часто використовуваних моделей ціноутворення опціонів. Але це точно не ідеальна модель. Тим не менш, він як і раніше надзвичайно актуальний для всіх торговців опціонами.

Основне завдання дипломної роботи полягає у розрахунку справедливої ціни опціону моделі Блека-Шоулза для процесів дифузії та субдифузії, щоб в подальшому провести порівняльний аналіз із реальними даними. В даному дослідженні для моделювання та аналізування було взято європейський call опціон.

Варто нагадати, що call опціон – це опціонний контракт, який дає право, але не зобов'язання, купити базовий актив за заздалегідь визначеною ціною до або в день закінчення терміну дії. Європейський стиль опціонів передбачає собою виконання контракту тільки на дату закінчення терміну опціону, тобто в один заздалегідь визначений моменту часу. Розраховувано ціну європейського

опціону за моделлю Блека-Шоулза. За моделлю Блека-Шоулза на ціну впливають такі фактори, як: волатильність, безризикова (відсоткова) ставка, час до виконання контакту, страйкова ціна та початкова ціна.

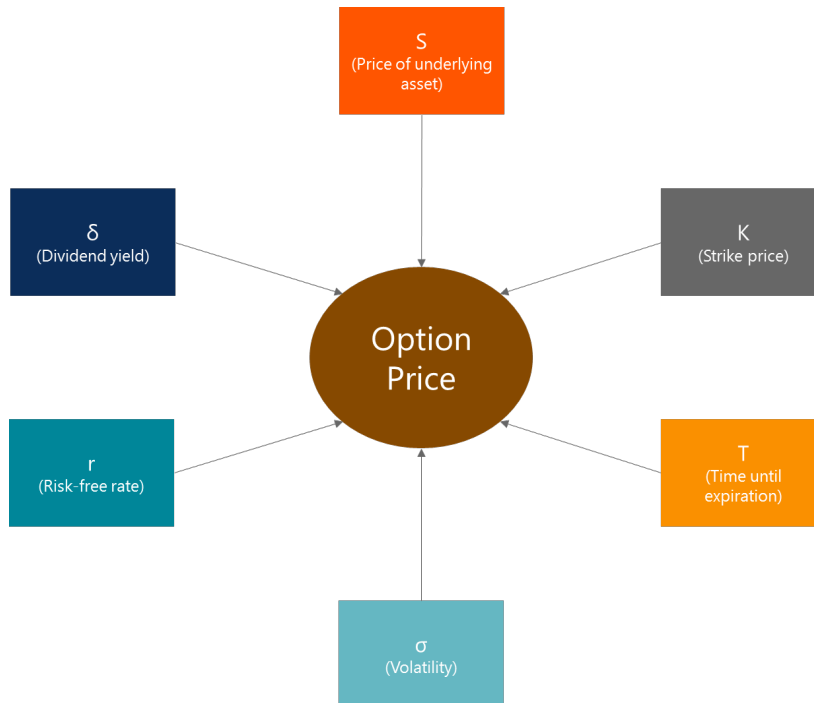


Рис. 2.6 - фактори, які впливають на формування ціни на опціон за моделлю Блека-Шоулза

На рисунку (2.6) також зображений дивідендний дохід як фактор, проте в початковій моделі цей фактор не враховується, він зустрічається вже в похідних сучасних моделях. В даному дослідженні дивідендний дохід також не буде застосовуватись.

Формула для оцінювання опціонів має вигляд [5]:

$$C(S, K, T, \sigma) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-rt} \quad (1.11)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

де:

S - ціна опціону

K - ціна виконання опціону, страйкова ціна (strike price);

N - кумулятивна функція розподілу ймовірностей (CDF);

$T = (T_1 - t)$ - час, що залишився до погашення (в роках);

r - відсоткова ставка;

σ - волатильність;

По суті, дана формула спрощено може інтерпретуватися як різниця між ціною опціону та ціною виконання опціону, помножені кожен на певні мультиплікатори. У страйкової ціни це e^{-rt} та $N(d_2)$. Множення Ke^{-rt} просто дисконтує ціну виконання до поточного часу. Це робиться шляхом порівняння ціни виконання з безризиковою ставкою та часом до закінчення терміну дії, бо на ціну опціону має впливати безризикова ставка. Щодо двох інших множників $N(d_1)$ та $N(d_2)$. $N()$ є кумулятивною функцією розподілу, яка використовується для обчислення ймовірностей при нормальному розподілі, і приводить значення ймовірності від 0 до 100%. $N(d_2)$ обчислює оцінку ймовірності того, що опціон буде виконано. Це має сенс лише тоді, коли опціон є ITM (in-the-money) або коли S (ціна акцій) більша за K (ціну виконання). Іншими словами, $N(d_2)$ є оцінкою ймовірності того, що майбутня ціна акцій буде вище ціни виконання на момент закінчення терміну дії з урахуванням ризику. $N(d_1)$ можна розглядати як ймовірність того, що опціон не буде виконано, з урахуванням ризику. Як видно з формули для d_1 , $N(d_1)$ завжди більше, ніж $N(d_2)$, незалежно від значень змінної. Це має сенс, оскільки значення опціону не має бути негативним. Дана формула буде застосовуватися в прогнозуванні цін на опціони для реальних даних. Реалізація формули справедливої ціни опціону для моделі Блека-Шоулза наведена в Додатку Ж.

Модель Блека-Шоулза, має свої сильні та слабкі сторони [7].

Із позитивних моментів точно можна виокремити наступні пункти.

Точність. Першою і головною перевагою моделі Блек-Шоулза є те, що це одна з найточніших моделей ціноутворення опціонів, яка доступна в порівнянні з іншими моделями. Вона враховує всі фактори, які можуть вплинути на ціну опціону, включаючи час до закінчення терміну дії, волатильність, процентні ставки та інші важливі змінні, що, у свою чергу, призводить до кращого або

точного визначення ціни опціонних контрактів і, таким чином, дає цій моделі перевагу над іншими, коли справа доходить до ціни опціонів.

Швидкість. Ще одна перевага моделі Блек-Шоулза полягає в тому, що вона може дуже швидко оцінити опціонні контракти, оскільки використовує математичну формулу для розрахунку ціни опціону. Це робить її популярним вибором для трейдерів, оскільки у випадку фондових ринків ціни змінюються за лічені секунди, і трейдерам потрібно швидко приймати рішення про те, купувати чи продавати опціонний контракт на основі ціни базового активу, який є акціями або індексами в випадок фондових ринків.

Гнучкість моделі. Іншою важливою перевагою моделі Блек-Шоулза є те, що її використання не обмежується лише фондовим ринком, вона досить гнучка, щоб використовувати її в різних ситуаціях. Отже, цю модель можна використовувати для оцінки опціонів не тільки на акції, але й на облігації, товари та інші активи, що робить її потужним інструментом для трейдерів, які хочуть торгувати різними активами, а не торгувати лише на одному ринку чи класі активів.

Із недоліків варто зазначити такі моменти.

Ігнорування інших факторів. Найбільшим недоліком моделі Блек-Шоулза є те, що під час розрахунку теоретичної вартості опціонного контракту вона враховує лише ціну базового активу та ігнорує інші важливі фактори. Тому, наприклад, він не враховує інші фактори, такі як дивіденди, процентні ставки, комісії, зміни волатильності, зовнішні шоки, дії регулятора ринку тощо. Це, у свою чергу, може призвести до деяких неточностей у ціноутворенні опціонних контрактів, що порушить всю ідею використання цієї моделі для справедливого ціноутворення опціонних контрактів.

Ігнорування від'ємних цін на активи. Негативні процентні ставки, які спостерігалися в деяких розвинених країнах після світової фінансової кризи 2008 року, змусили торгові бюро з фіксованим доходом переглянути свої моделі ціноутворення опціонів. Також поширення COVID-19 призвело до карантину в

уському світі та надзвичайно різке падіння світового попиту на нафту. Відтак, у квітні 2020 року ціна ф'ючерсних контрактів на нафту вперше в історії стала різко негативною. У відповідь Чиказька товарна біржа (CME) і Міжконтинентальна біржа (ICE) тимчасово змінили свої моделі опціонів нафти та природного газу з BS на модель Башельє до серпня 2020 року, щоб впоратися з негативними цінами.

Припущення моделі Блека Шоулза. Іншим обмеженням моделі Блека Шоулза є те, що вона базується на багатьох припущеннях, наприклад, ціна акцій підпорядковується логнормальному розподілу, фондовий ринок ефективний, немає арбітражних можливостей, процентні ставки є постійними і тому, про що ми всі знаємо, не відповідає дійсності.

Проблема з американськими опціонними контрактами. Інша проблема з моделлю Блек-Шоулза полягає в тому, що під час розрахунку американських опціонних контрактів вона обчислює ціну опціону на момент закінчення терміну дії, але у випадку раннього виконання опціонів американського стилю буде невідповідність між ціною опціонів, що обмежує використання цієї моделі. оскільки більшість біржових опціонів є опціонами американського стилю, а не європейськими.

Відсутність можливості змоделювати сталі процеси на ринку. Існують моменти, в яких ринок характеризується сталими проміжками без будь-якої торгівлі. Оскільки модель Блека-Шоулза базується на процесі дифузії для геометричного Броунівського руху, це означає що рух неперервний.

Прикладами останнього пункту недоліку використання моделі Блека-Шоулза є доволі актуальними для XXI століття. Неактивні проміжки для торгівлі на фінансових ринках був характерний для світової кризи в 2008 році, для світової пандемії COVID-19 починаючи з 2020 року, а також в цілому для нових ринків, що розвиваються та мають небагато гравців на ньому.

Дана робота якраз передбачає вирішення останньої вищезазначеної проблеми. Для того щоб змодельовати проміжки без будь-якої активності, необхідно процес дифузії замінити на субдифузію.

II РОЗДІЛ. Процеси субдифузії та їхнє моделювання для цін на опціони

2.1 Загальна характеристика процесу субдифузії

Дифузія (з латинської “розширятися”) - це дуже розповсюджене явище, яке можна спостерігати майже всюди: у фізиці, біології, хімії, соціології, економіці та фінансах. Центральна ідея дифузії, однак, є спільною для всіх цих: речовина або сукупність об’єктів, що є під впливом дифузії, поширюються з точки або місця, де є більша концентрація цієї речовини або сукупності об’єктів в меншу.

Дифузія є процесом, який залежить від часу. Варто зазначити ще таке поняття як середньоквадратичне переміщення (mean square displacement, або MSD) - це міра відхилення положення частинки щодо її опорного положення в часі (зазвичай береться середнє значення) [8]. Інакше кажучи, це міра, яку частинка долає в середньому за певний час (під час багатьох тестів). Це вимірювання особливо важливе при описі Броунівської динаміки та інших випадкових блукань, оскільки зазвичай не існує чіткого напрямку, уздовж якого можна виміряти пройденої відстань. Отже, для нормальної дифузії середньоквадратичне переміщення частинки є пропорційним часу. Якщо ж співвідношення між MSD та часом нелінійне співвідношення, тоді це процес характерних для аномальної дифузії [9].

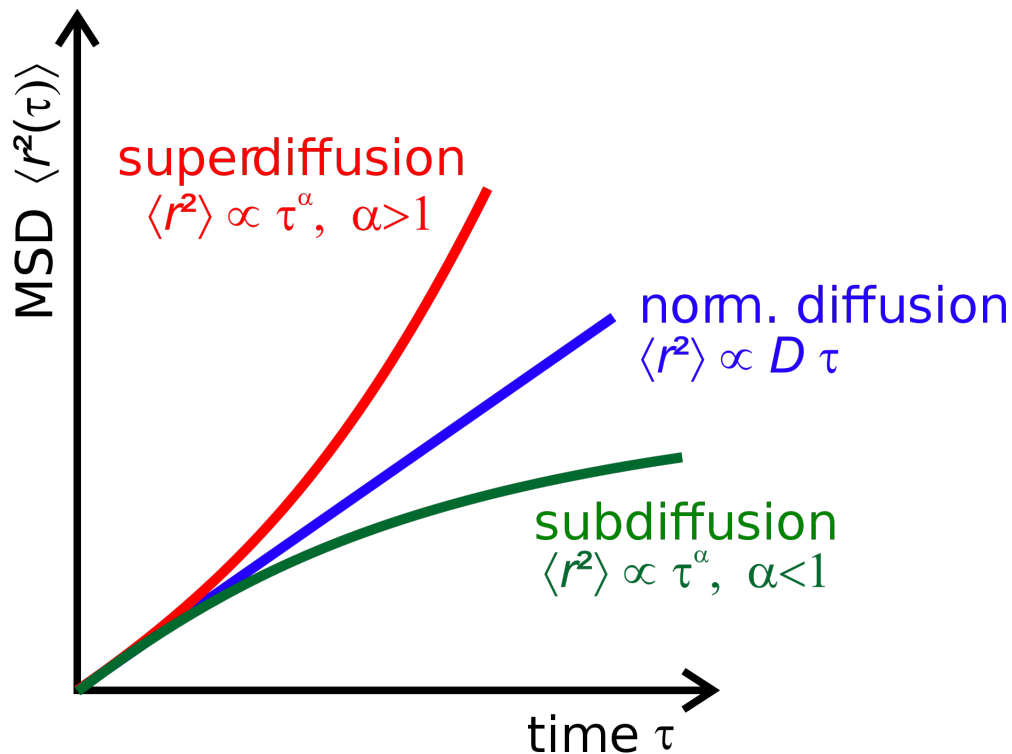


Рис. 2.1 - Графік залежності MSD від часу

У MSD Броунівського руху $\alpha = 1$. Якщо $\alpha > 1$, то процес є супердифузійним. Відповідно, якщо $0 < \alpha < 1$, то процес є субдифузійним [10]. В процесі субдифузії частинки схильні рухатись повільніше за час. Саме такий процес описує поведінку ринку цін на акції, якому характерні тимчасова відсутність активності гравців, або ж сталою ціною на активи певний час. В нашому випадку ціна на актив - це частинка, яка підпорядковується Броунівському руху. У випадку, якщо ціна активу не змінюється певний період, це означає, що з часом її середньоквадратичне переміщення не є лінійно пропорційне часу, а є меншим.

Для того, щоб змодельовати процес субдифузії, у рівняння субдифузії необхідно замінити календарний час на обернений субординатор. В той час для моделювання оберненого субординатору спочатку необхідно побудувати субординатор.

2.2 Характеристика та комп'ютерне моделювання субординатора

Звичайною моделлю субдифузії є славнозвісне рівняння Фоккера-Планка.

Еквівалентно описати процес субдифузії можна за допомогою субординатора. По суті, в даній інтерпретації процес дифузії змінюється в часі за допомогою так званого оберненого субординатора. У свою чергу, для побудовання оберненого субординатора необхідно спочатку змодельовати субординатор. Детальніше опис та моделювання оберненого субординатора виконано в розділі 2.3.

Субординатор - це стохастичний процес із позитивними неспадними траєкторіями, значення якого є додатними, а аргументом є календарний час, який відповідно також невід'ємний [11].

Є багато видів субординатора, відрізняються вони розподілами, а саме: α -stable (α -стійкий) субординатор, tempered-stable субординатор, гамма субординатор та обернений Гаусовий субординатор (Inverse Gaussian). Останній вид розподілу було обрано для моделювання субординатора.

Обернений Гаусовий субординатор - це процес Леві (процес із стаціонарними незалежними приростами) [11]. Обернений Гаусовий розподіл має кілька властивостей, аналогічних Гаусовому розподілу. Назва може вводити в оману: вона є «оберненою» лише в тому, що, в той час як Гаусовий процес описує значення броунівського руху у фіксований час, зворотний Гаусовий процес описує розподіл часу, необхідний Броунівському руху з позитивним дрейфом (фрактальний Броунівський рух), щоб досягти фіксованого позитивного значення.

Обернений Гаусовий процес $G(t)$ з параметрами δ і γ , обидва позитивні, які визначається в [12], має вигляд [11]:

$$G(t) = \inf\{s > 0: B_\gamma(s) > \delta t\}, \quad (2.1)$$

де $B_\gamma(s)$ - стандартний Броунівський рух із позитивним зсувом γ .

Обернений Гаусовий процес має декілька властивостей.

Щільність розподілу має вигляд [11]:

$$g(x, t) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\delta \gamma t - (\delta^2 t^2 / x + \gamma^2 x) / 2}, \quad x > 0 \quad (2.2)$$

Якщо параметри $\delta = \gamma = 1$, то щільність розподілу матиме вигляд [13]:

$$g(x, t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}}, \quad x > 0, t > 0 \quad (2.3)$$

$= 0$ в інакшому випадку.

Ймовірність великих відхилень (tail probability) для Гаусового процесу:

$$P(G(t) > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta t}{\gamma^2} e^{\delta \gamma t} x^{-3/2} e^{-(\gamma^2/2)x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

які експоненційно згасають, а отже всі моменти для процесу $G(t)$ є скінченними.

Момент q -го порядку для $G(t)$:

$$E(G^q(t)) \sim \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^q t^q, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Для моделювання субординатору обрано наступний алгоритм побудови [11].

1) Задано параметри $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}, \dots, t_n = 1$. $dt = \frac{1}{n}$. $\delta = \gamma = 1$.

a) Згенерувати стандартну нормальну випадкову величину N ;

b) Призначити $X = N^2$;

c) Призначити $Y = dt + \frac{X}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4dt}$;

d) Згенерувати рівномірно розподілену випадкову величину U на проміжку $[0, 1]$;

e) Якщо $U \leq \frac{dt}{dt+Y}$ повертати Y , інакше повертати $\frac{(dt)^2}{Y}$;

2) Призначити $G(t_0) = 0$ і $G(t_i) = \sum_{j=1}^i F_j$, $i = 1, 2, \dots, n$

3) ~~Обл~~ $G(t_1), G(t_2), \dots, G(t_n)$ - n симульованих значень оберненого Гаусового процесу в момент часу $t_1, t_2, \dots, t_n$ відповідно.

Результатом є змодельований обернений Гаусовий процес на графіку (Додаток В):

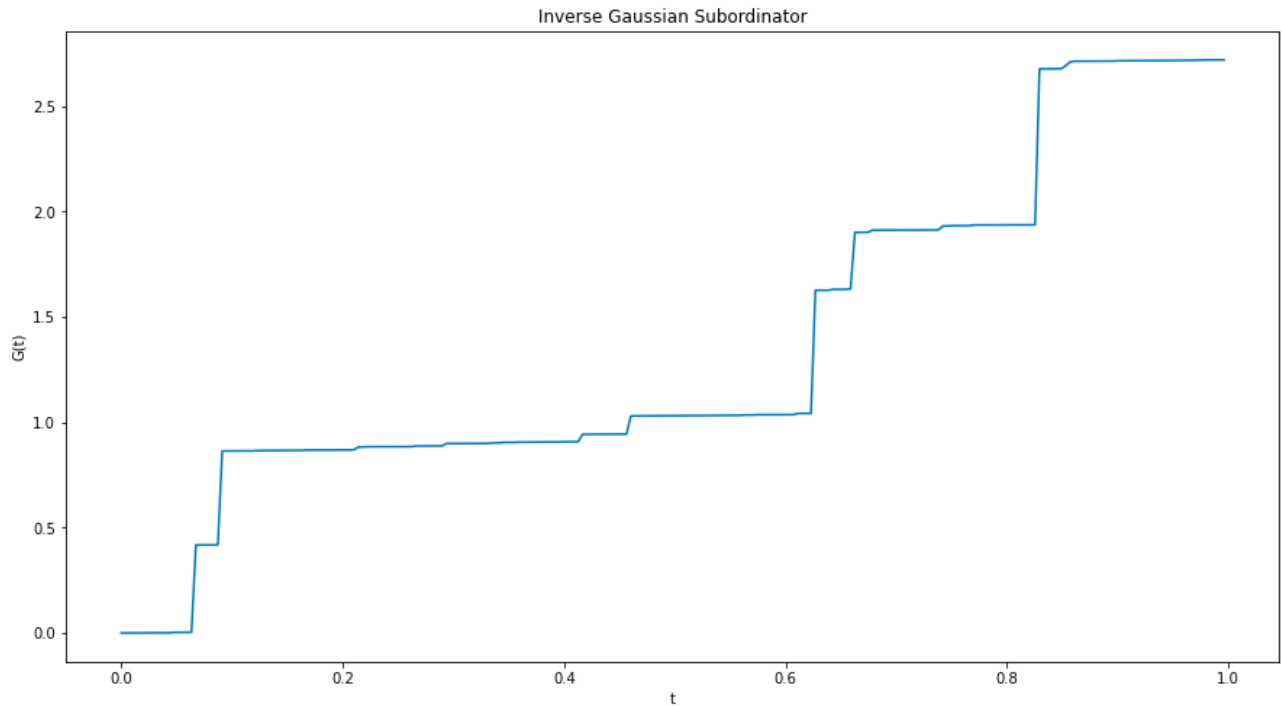


Рис. 2.2 - Обернений Гаусовий субординатор

Наступним етапом слугуватиме побудова оберненого субординатора.

2.3 Характеристика та комп'ютерне моделювання оберненого субординатора

Обернений субординатор застосовується в моделюванні процесів субдифузії шляхом заміни календарного часу в процесі дифузії на функцію оберненого субординатора. Обернений субординатор також називають “hitting time” - це перший раз, коли певний стохастичний процес, а саме субординатор, “впадає” в задану підмножину простору станів. Дивлячись крізь призму фінансової математики, обернений субординатор може інтерпретуватися як перший час досягання певного рівня ціни, яка потім може не змінюватись протягом тривалого часу, та базується на використанні іншого стохастичного процесу, а саме субординатора.

Загальна формула оберненого субординатора має вигляд [11]

$$H(t) = \inf\{\tau > 0: G(\tau) > t\} \quad (2.6)$$

В свою чергу обернений субординатор із оберненим Гаусовим розподілом має такі властивості:

- Момент q -го порядку:

$$E(H^q(t)) = M_q(t) \sim \begin{cases} \frac{1}{(\delta\sqrt{2})^q} \frac{t^{q/2}}{\Gamma(1+q/2)}, & \text{для } \gamma = 0 \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^q \frac{t^q}{\Gamma(1+q)}, & \text{для } \gamma > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

де γ та δ - додатні параметри, описані в [12], Γ - гамма-функція.

Запрограмовано обернений субординатор методом Монте-Карло. Тоді, формула, яка застосовується для моделювання, матиме вигляд [11]:

$$H_\Delta(t) = [\min\{n \in N: G(\Delta n) > t\} - 1]\Delta, n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Графік оберненого до оберненого Гаусового субординатора наведено нижче, а програмна реалізація мовою Python знаходиться у Додатку Г.

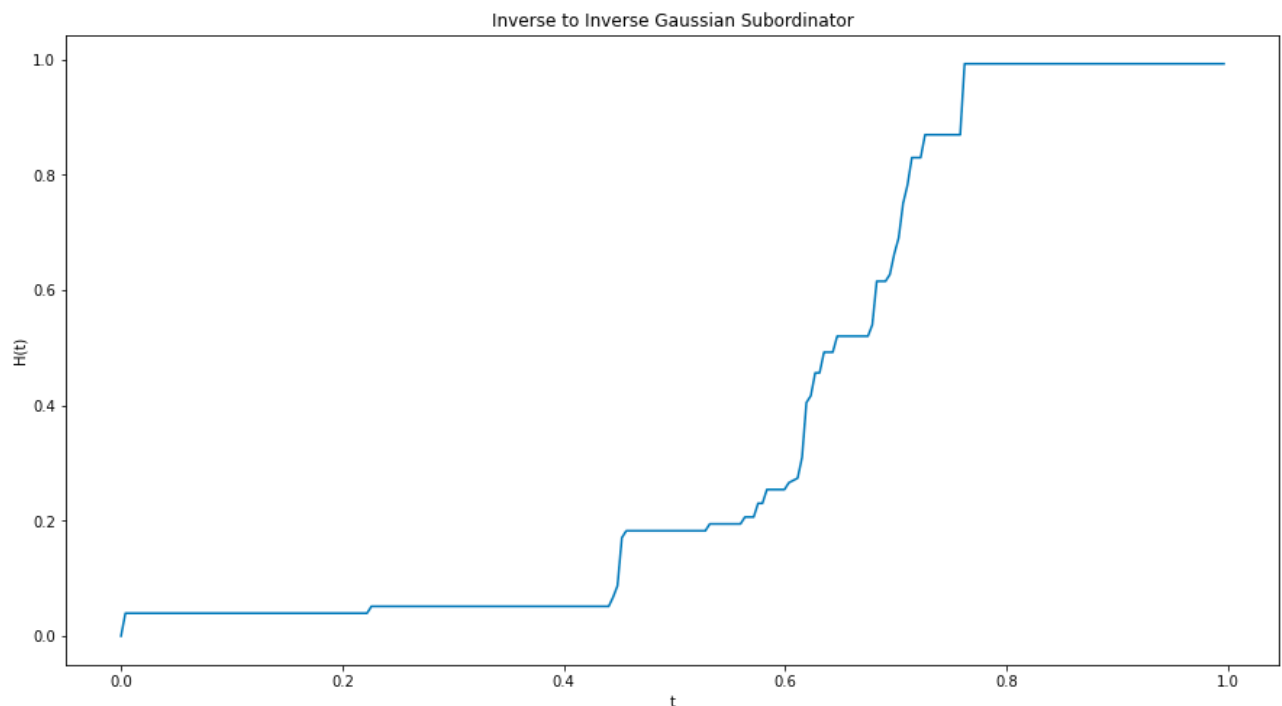


Рис. 2.3 - обернений субординатор із оберненим Гаусовим розподілом

Якщо в процесі дифузії замінити календарний час на обернений субординатор, тоді отримаємо процес субдифузії.

2.4 Моделювання процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

Наступним кроком слугує модернізація дифузійної моделі Блека-Шоулза шляхом заміни в ньому календарного часу на обернений субординатор, який вже було змодельовано в попередньому розділі.

Процес субдифузії для моделі Блека-Шоулза матиме вигляд:

$$dX_{H_t} = \mu dH_t + \delta H_t dW_{H_t} \quad (2.9)$$

де H_t - обернений субординатор із оберненим Гаусовим розподілом.

Нижче наведено обидва графіки для порівняння: процес дифузії та субдифузії для геометричного Броунівського руху. Як можна зазначити, траєкторія руху обидвох графіків однакова, тільки для процесу дифузії характерний неперервний рух функції, в той час як в процесі субдифузії можливо спостерігати певні проміжки без зміни значення функції (в нашому випадку ми маємо за аналогію ціни на опціони, у другому випадку на сталих проміжках ціни на опціони є незмінними).

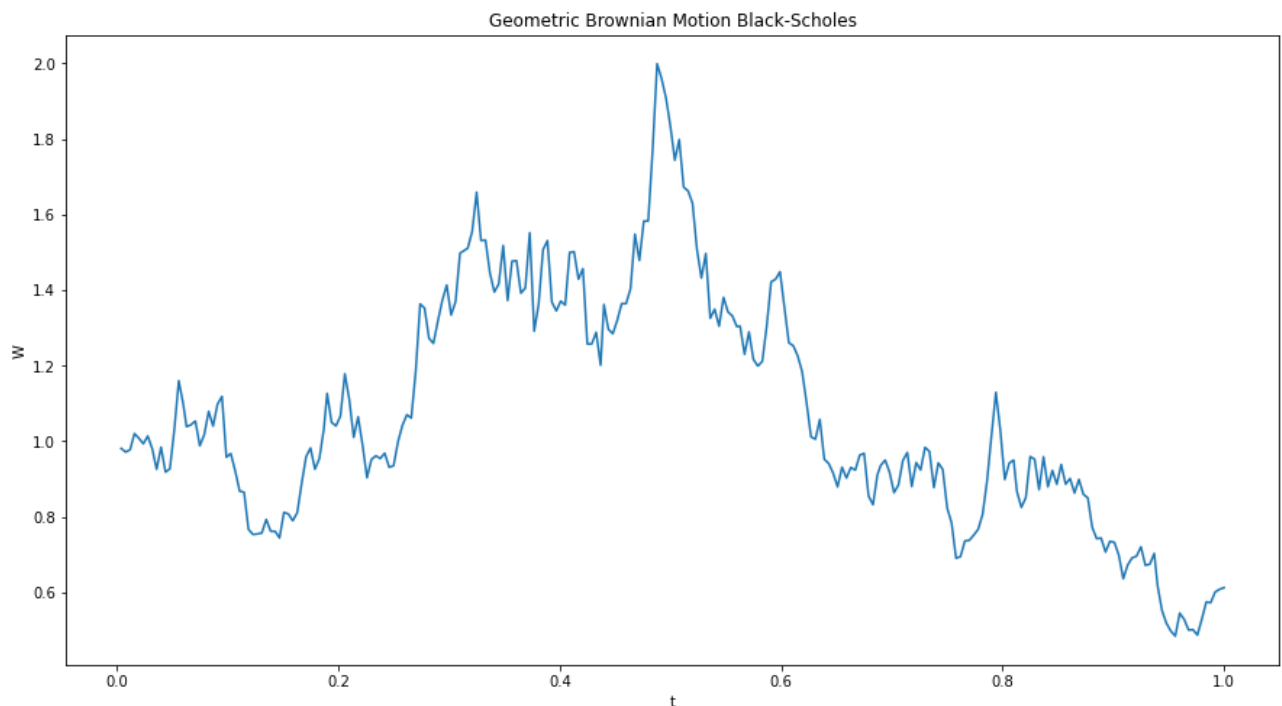


Рис. 2.4 - процес дифузії для геометричного Броунівського руху

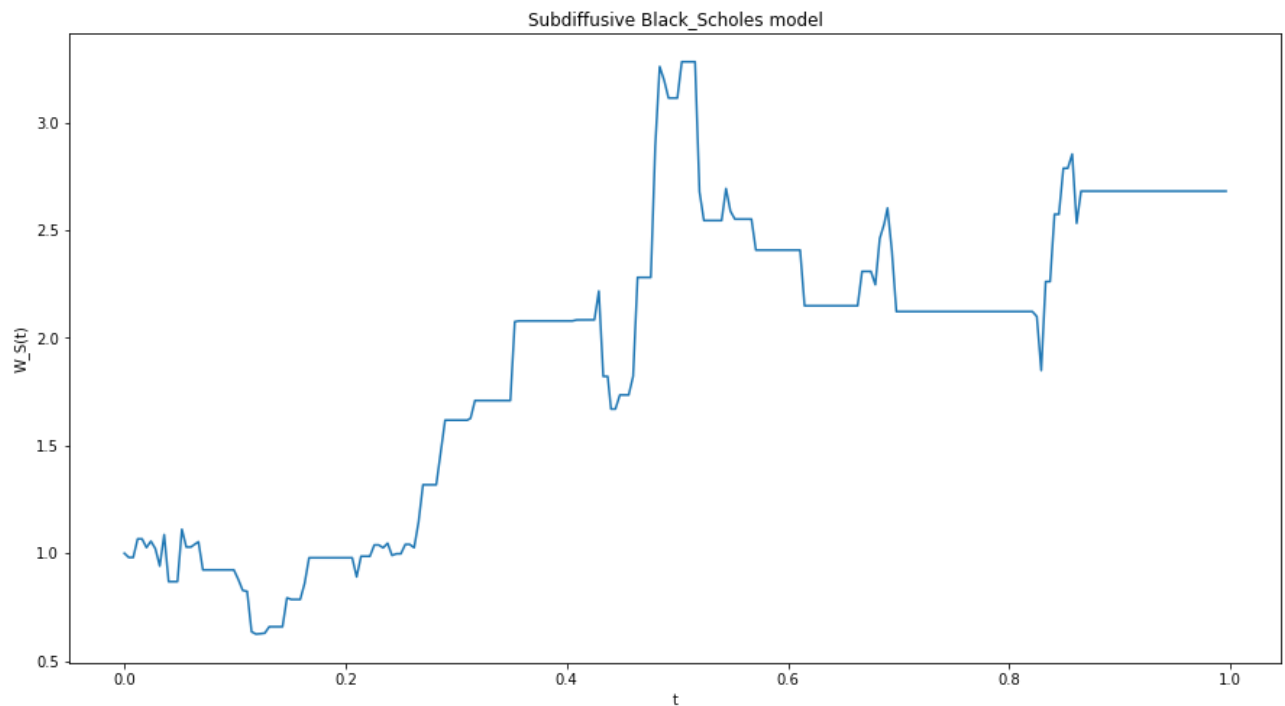


Рис. 2.5 - субдифузійна модель геометричного Броунівського руху (модель Блека-Шоулза). Параметри: $\delta = 10$.

В Додатку Е наведена програмна реалізація процесу субдифузії для геометричного Броунівського руху

2.5 Кореляційна структура динамік лог-ретурнів, підпорядкованих субдифузійному процесу

Нехай для ціни опціону S лог-ретурни позначаються $X_t = \ln \frac{S(t)}{S(t-1)}$. Тоді X_t керується дифузією

$$dX_t = \mu dt + \delta dB_t,$$

де B_t - Броунівський рух.

Тоді динаміка лог-ретурнів керується геометричним Броунівським рухом:

$$X(t) = X_0 + \mu t + \delta B_H(t), \quad t > 0.$$

де $B_H(t)$ - Броунівський рух (стандартний Броунівський рух із позитивним зсувом)

Замість календарного часу t використаємо обернений субординатор з оберненим Гаусовим процесом $H(t)$:

$$X(H(t)) = X_0 + \mu H(t) + \sigma B_H(H(t)), t \geq 0$$

В рівняння субдифузії підставимо значення оберненого субординатора в момент часу $t + k$:

$$(H(t + k)) = X_0 + \mu H(t + k) + \sigma B_H(H(t + k)), \quad t \geq 0$$

Автокореляційна функція між $X(H(t))$ та $X(H(t + k))$ має вигляд:

$$\begin{aligned} Cov(X(H(t))X(H(t + k))) \\ &= Cov(\mu H(t)\mu H(t + k)) + Cov(\mu H(t)\sigma B_H(H(t + k))) \\ &+ Cov(\sigma B_H(H(t))\mu H(t + k)) + Cov(\sigma B_H(H(t))\sigma B_H(H(t))) \\ &= \mu^2 Cov(\mu H(t)\mu H(t + k)) + \sigma^2 Cov(\sigma B_H(H(t))\sigma B_H(H(t))) \end{aligned}$$

враховуючи, що обернений субординатор $H(t)$ та фрактальний Броунівський рух $B_H(H(t))$ є незалежні.

Розрахуємо спочатку коваріацію між значеннями оберненого субординатора в моменти часу t та $t + k$ [14]:

$$Cov(H(t) H(t + k)) = E(H(t) H(t + k)) - E(H(t))E(H(t + k))$$

У свою чергу математичне сподівання добутку між значеннями оберненого субординатора в моменти часу t та $t + k$ [11]:

$$E(H(t) H(s)) = \frac{1}{2} E^2(H(s)) + \int_0^s E(H(t - y))d \cdot E(H(y))$$

Момент q -го порядку для $H(t)$ при $\gamma > 0$ наведено в (2.7). Тоді коваріація між значеннями оберненого субординатора в момент часу t та $t + k$:

$$\begin{aligned} Cov(H(t) H(t + k)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2 \frac{(t + k)^2}{3\Gamma} + \int_0^{t+k} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{(t - y)}{2\Gamma} d \left(\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \frac{y}{2T}\right) \\ &- \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{t}{2T} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{(t + k)}{2\Gamma} \end{aligned}$$

Наступним етапом розрахуємо кореляційну структуру між фрактальним Броунівськими рухами у моменти $H(t)$ та $H(t + k)$.

$$\text{Cov}\left(B_H(H(t))B_H(H(t+k))\right) = E(B_H(H(t))B_H(H(t+k))) - E(B_H(H(t)))E(B_H(H(t+k)))$$

Математичне сподівання для Броунівського руху із оберненим субординатором [11]:

$$E(B_H(H(t))) = c \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^H \frac{t^H}{\Gamma(1+H)}, \quad \text{для } \gamma > 0.$$

де c - момент q -го порядку для стандартної нормальної випадкової величини. Для $q > 0$:

$$c_q \equiv \sqrt{\frac{2^q}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

Математичне сподівання добутку має вигляд [11]

$$E(B_H(s)B_H(t)) = M_{2H}(s) + 2H \int_0^s M_{2H-1}(t-y) dM_1(y), \quad \text{для } s < t$$

Для фіксованого s та великого t :

$$E(B_H(s)B_H(t)) \sim M_{2H}(s) + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H-1} \frac{2H}{\Gamma(2H)} t^{2H-1} M_1(s)$$

де $M_q(t)$ - момент q -го порядку для $H(t)$. Для значень t та $t + k$:

$$E(B_H(t)B_H(t+k)) \sim \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H} \frac{t^{2H}}{\Gamma(1+2H)} + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H-1} \frac{2H}{\Gamma(2H)} (t+k)^{2H-1} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{t}{2\Gamma}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(B_H(H(t))B_H(H(t+k))\right) &= \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H} \cdot \frac{t^{2H}}{\Gamma(1+2H)} + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H-1} \cdot \frac{2H}{\Gamma(2H)} \\ &\cdot (t+k)^{2H-1} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \frac{t}{2\Gamma} - c \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^H \frac{t^H}{\Gamma(H+1)} c \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^H \cdot \frac{(t+k)^H}{\Gamma(H+1)} \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
& Cov\left(X(H(t))X(H(t+k))\right) \\
&= \mu^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{(t+k)^2}{3\Gamma} + \int_0^{t+k} \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \cdot \frac{(t-y)}{2\Gamma} d\left(\frac{\gamma}{\sigma} \cdot \frac{y}{2\Gamma}\right) - \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{t(t+k)}{4\Gamma^2} \right) \\
&+ \sigma^2 \left(\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2H} \cdot \frac{t^{2H}}{\Gamma(1+2H)} + \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{2H-1} \cdot \frac{2H}{\Gamma(2H)} \cdot (t+k)^{2H-1} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{t}{2\Gamma} - c \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^H \cdot \frac{t^H}{\Gamma(H+1)} \cdot c \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^H \cdot \frac{(t+k)^H}{\Gamma(H+1)} \right)
\end{aligned}$$

2.6 Справедлива ціна опціону для субдифузійної моделі Блека-Шоулза

Розглянемо модель ринку, в якому ціна активу підпорядковується процесу субдифузії для геометричного Броунівського руху. Тоді, для прорахування справедливої ціни європейського call опціону необхідно в формулі (1.11) замінити календарний час на значення оберненого субординатору в момент календарного часу t . Справедливу ціну опціону для моделі субдифузії можна прорахувати методом Монте-Карло - це широкий клас обчислювальних алгоритмів, які покладаються на повторну випадкову вибірку для отримання чисельних результатів. Основна концепція полягає у використанні випадковості для вирішення проблем, які в принципі можуть бути детермінованими. Тому ми можемо максимально наближено розрахувати майбутню ціну активу шляхом повторення експерименту n -ну кількість разів та взяти у якості результату середнє значення. За допомогою формули (1.11) розрахунок справедливої ціни опціону для субдифузійної моделі Блека-Шоулза має вигляд:

$$C(S, K, T, \sigma) = \langle C(S, K, T, \sigma) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(S, K, H_i(T), \sigma) \quad (2.10)$$

Для дослідження було взято $n = 100$ ітерацій для розрахунку середньої ціни опціону для моделі субдифузії. На кожен ітерацію i розраховується нове

значення оберненого субординатора в момент часу t , тому ціна опціону кожної ітерації буде різним. Це дозволяє розглянути якомога більше можливих варіантів, які можуть набувати значення цін на опціон. Реалізація методу мовою Python наведено в Додатку К.

2.7 Числові результати для реальних даних. Порівняльний аналіз

Фінальним етапом буде застосування теоретичних знань для прорахування цін на опціони для субдифузійної моделі та проведення порівняльного аналізу для ціноутворення опціону дифузійної та субдифузійної моделі. Критерієм адекватності розробленої моделі є збіжність цін опціонів порівняно із реальними даними.

В якості реальних даних було обрано компанію “Airbnb” - це американська компанія, яка керує онлайн ринком житла, в першу чергу, житла для оренди, відпочинку та туристичної діяльності. Базована в Сан-Франциско, Каліфорнія, платформа доступна через веб-сайт і мобільний додаток. “Airbnb” не володіє жодним із перерахованих об’єктів; замість цього він отримує прибуток, отримуючи комісію від кожного бронювання. Заснована у 2008 році, зараз налічує понад 6000 працівників та чистий прибуток у розмірі 0.47 млрд. дол. Як і багато інших компаній, пов’язаних із туризмом, сильно постраждала під час пандемії COVID-19.

Часовий проміжок даних: 24.11.2020 - 23.11.2021. Спостерігаючи за змінами на ціни в даному часовому проміжку (Рис. 2.7), можемо зробити висновок, що ринок є доволі активним, хоча незначні талі проміжки на ринку також присутні.

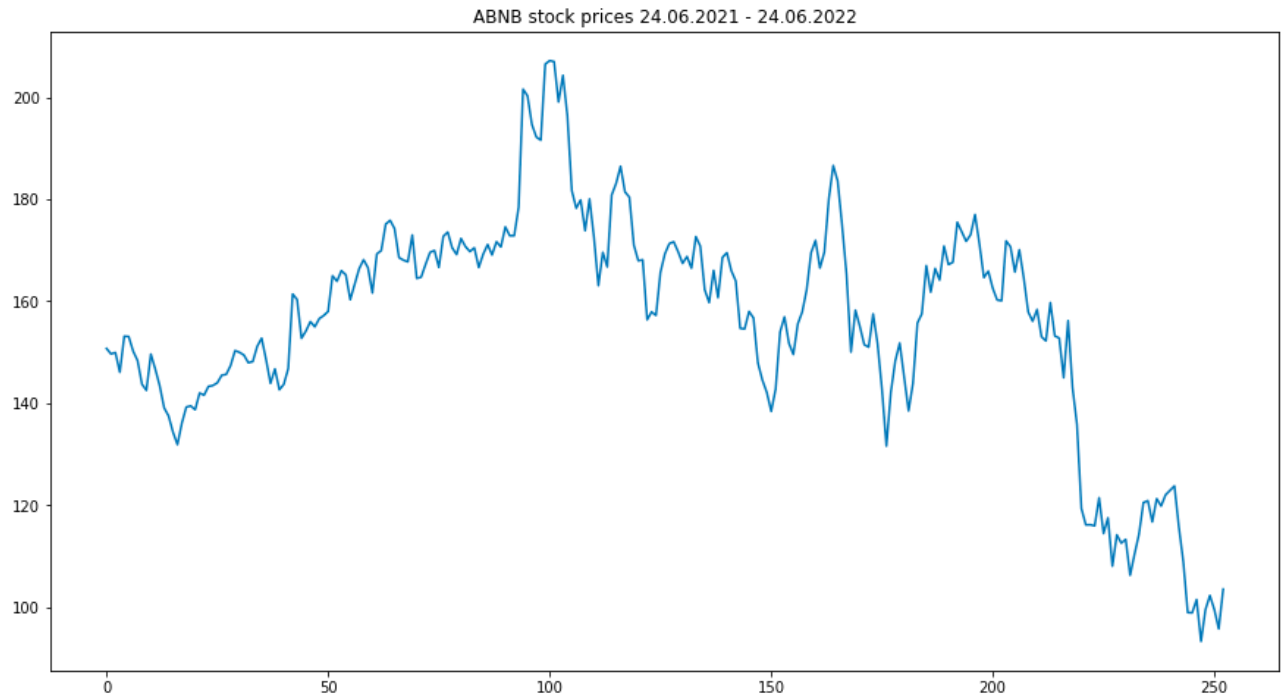


Рис. 2.7 - Динаміка цін на акції компанії “Airbnb”

Наступним етапом необхідно розрахувати лог-ретурни для цін на акції на заданому проміжку за формулою:

$$h_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \quad (2.11)$$

Результати наведено на Рис. 2.8.

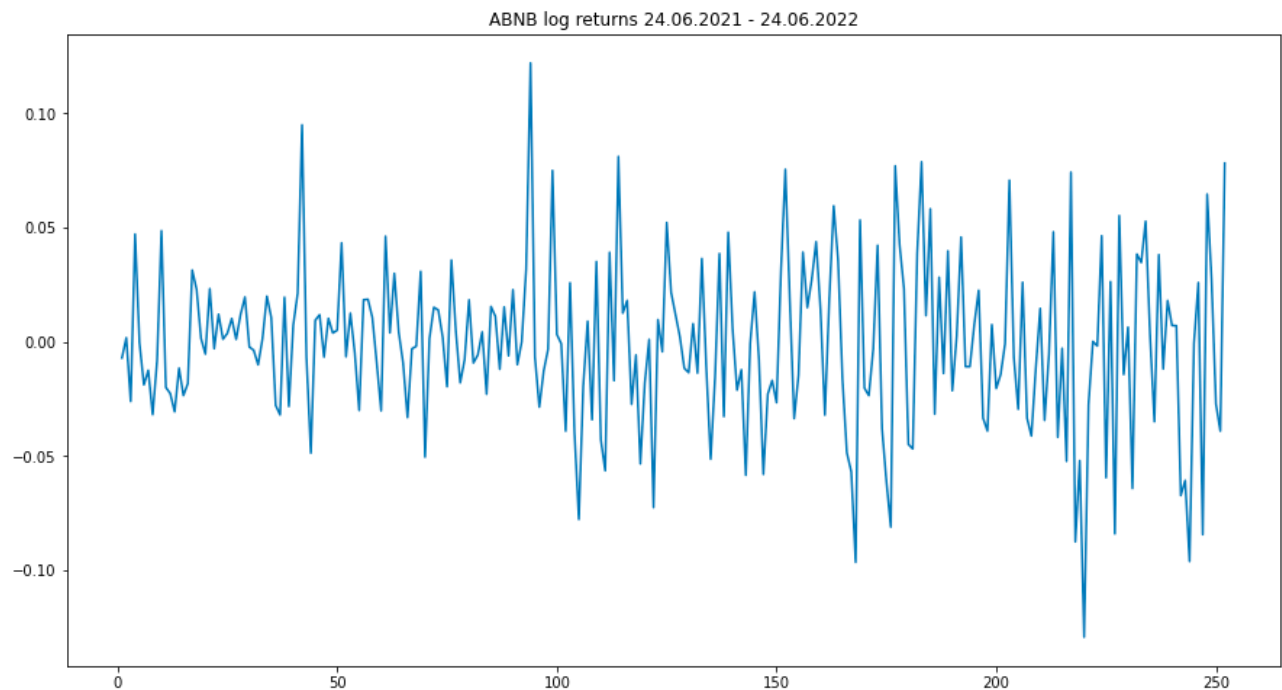


Рис. 2.8 - Динаміка лог-ретурнів для компанії “Airbnb”

Для моделювання процесу дифузії та субдифузії, а також моделювання ціни, для компанії “Airbnb” за обраний період необхідно прорахувати такі параметри: зсув (μ), волатильність (σ) та відсоткову ставку (r). Зсув розраховується як середнє значення лог-ретурнів:

$$\mu = \underline{h} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n} = -0.0014914 \quad (2.12)$$

Для розрахунку волатильності необхідно спочатку знайти дисперсію s^2 :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \underline{h})^2}{n-1} \quad (2.13)$$

Тоді волатильність розраховується за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}} = 0.5758, \quad (2.14)$$

де Δt або для малих значень t - dt - крок по часу.

а відсоткова ставка:

$$r = \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0.164265 \quad (2.15)$$

Для порівняльного аналізу було взято реальні дані цін на опціони в певні дати. Варто зазначити, що дата початкової ціни на опціон S – 24.06.2022. На Рис. 2.9 зображено прогноз ціни на call опціон для 1 липня 2022р. для компанії “Airbnb”.

Calls for July 1, 2022

Contract Name	Last Trade Date	Strike ^	Last Price	Bid	Ask	Change	% Change	Volume	Open Interest	Implied Volatility
ABNB220701C00060000	2022-06-24 10:15AM EDT	60.00	42.20	42.20	45.70	+2.30	+5.76%	1	18	229.88%
ABNB220701C00070000	2022-06-14 11:31AM EDT	70.00	29.01	31.90	35.90	0.00	-	1	0	169.14%
ABNB220701C00080000	2022-06-24 10:43AM EDT	80.00	23.30	23.25	24.05	+8.62	+58.72%	2	207	98.44%
ABNB220701C00085000	2022-06-24 3:29PM EDT	85.00	19.26	17.25	19.15	+9.26	+92.60%	3	204	109.18%
ABNB220701C00090000	2022-06-24 3:58PM EDT	90.00	13.92	13.50	14.30	+7.52	+117.50%	11	45	73.93%
ABNB220701C00094000	2022-06-24 3:24PM EDT	94.00	10.55	9.95	10.60	+6.00	+131.87%	69	65	68.80%
ABNB220701C00095000	2022-06-24 3:25PM EDT	95.00	9.66	9.30	9.70	+5.61	+138.52%	144	103	69.97%
ABNB220701C00096000	2022-06-24 3:52PM EDT	96.00	8.84	8.55	8.85	+5.30	+149.72%	135	128	69.53%
ABNB220701C00097000	2022-06-24 2:43PM EDT	97.00	8.05	7.70	8.05	+4.85	+151.56%	49	86	67.87%
ABNB220701C00098000	2022-06-24 3:34PM EDT	98.00	7.28	6.95	7.30	+4.52	+163.77%	209	198	67.29%
ABNB220701C00099000	2022-06-24 3:48PM EDT	99.00	6.35	6.25	6.55	+4.08	+179.74%	119	101	66.50%
ABNB220701C00100000	2022-06-24 3:57PM EDT	100.00	5.60	5.55	5.85	+3.58	+177.23%	723	518	65.53%
ABNB220701C00101000	2022-06-24 3:48PM EDT	101.00	5.30	4.90	5.20	+3.71	+233.33%	134	101	64.80%
ABNB220701C00102000	2022-06-24 3:53PM EDT	102.00	4.43	4.30	4.60	+3.08	+228.15%	312	115	64.23%
ABNB220701C00103000	2022-06-24 3:52PM EDT	103.00	3.90	3.75	4.00	+2.81	+257.80%	444	108	63.38%

Рис. 2.9 – Прогноз цін на call опціони компанії «Airbnb» на 01.07.2022, ресурс: [Yahoo finance](https://finance.yahoo.com)

Таблиця 2.1 - Вхідні реальні дані компанії “Airbnb”

Дата виконання опціону	К-ть днів до реалізації контракту від початкової дати, днів/робочих днів у році	Ціна опціону, \$ США
01.07.2022	6/252	5.60
08.07.2022	11/252	6.88
15.07.2022	16/252	8.10
22.07.2022	21/252	9.25
29.07.2022	26/252	9.95
19.08.2022	41/252	12.75
16.09.2022	61/252	14.72

Продовження таблиці 2.1

21.10.2022	86/252	16.15
16.12.2022	126/252	19.5
20.01.2023	151/252	21.35

За допомогою реалізації програмного продукту на мові Python, було прораховано ціни на опціони для дифузійної моделі Блека-Шоулза (1.11), а також субдифузійної моделі за формулою (2.10). Для більш точного результату для прорахування кожного опціону для обох моделей було застосовано приховану волатильність, оскільки при $\sigma = 0.5758$ дані обох моделей значно різнились від реальних даних, що свідчило про наявність прихованої волатильності. Для моделі Блека-Шоулза прихована волатильність при страйковій ціні 100 вже була прорахована біржою, а для субдифузійної моделі приховала волатильність була розрахована за допомогою бібліотеки Mibian. На вхід функції задаються параметри: початкова ціна, страйкова ціна, відсоткова ставка, к-ть днів до реалізації контракту, ціна call опціону, наприклад:

$$c = \text{mibian.BS}([1.4565, 1.45, 1, 30], \text{callPrice} = 0.0359)$$

у результаті c повертає приховану волатильність $c.impliedVolatility$.

У Додатку Л наведено ціни на опціони в різні періоди для реальних даних із ресурсу [Nasdaq](#) а також прораховані приховані волатильності для дифузійної та субдифузійної моделей.

Отримано такі результати цін на опціони на відповідні дати :

Таблиця 2.2 - Результати прогнозів цін на опціони

Дата виконання опціону	Реальні дані	дифузійна модель Блека-Шоулза	субдифузійна модель Блека-Шоулза
01.07.2022	5.60	6.336900	7.740074
08.07.2022	6.88	7.613486	8.424420
15.07.2022	8.10	9.010545	9.225342
22.07.2022	9.25	10.072188	10.004648
29.07.2022	9.95	11.130749	11.749216
19.08.2022	12.75	14.297772	12.821529
16.09.2022	14.72	16.927690	15.141871
21.10.2022	16.15	19.785150	17.663779
16.12.2022	19.5	23.746212	20.708384
20.01.2023	21.35	26.007220	21.695584

Графічно ціни на опціони зображені наступним чином:

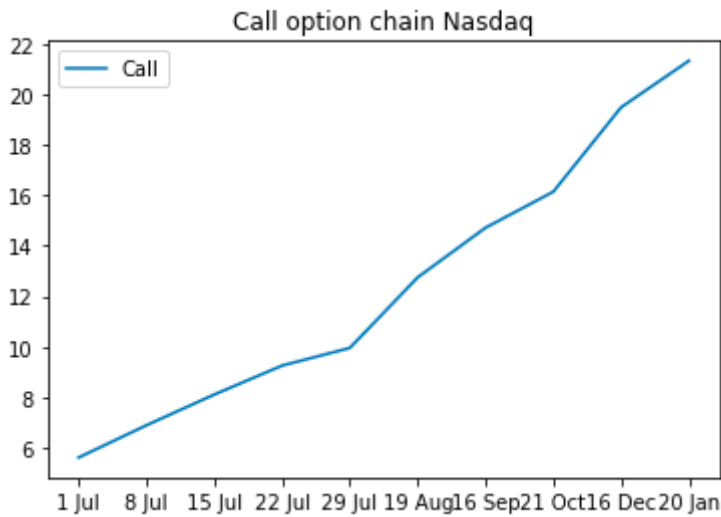


Рис. 2.10 - Реальні ціни на опціони для компанії “Airbnb”

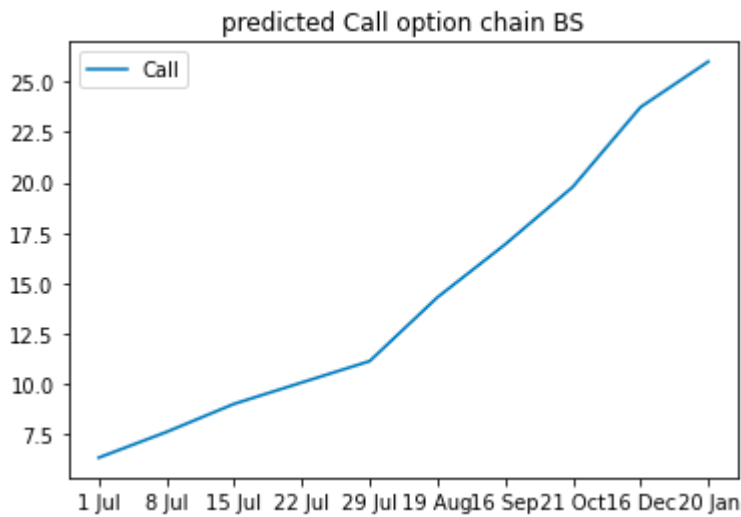


Рис. 2.11 - Прогнозовані ціни опціонів для дифузійної моделі Блека-Шоулза

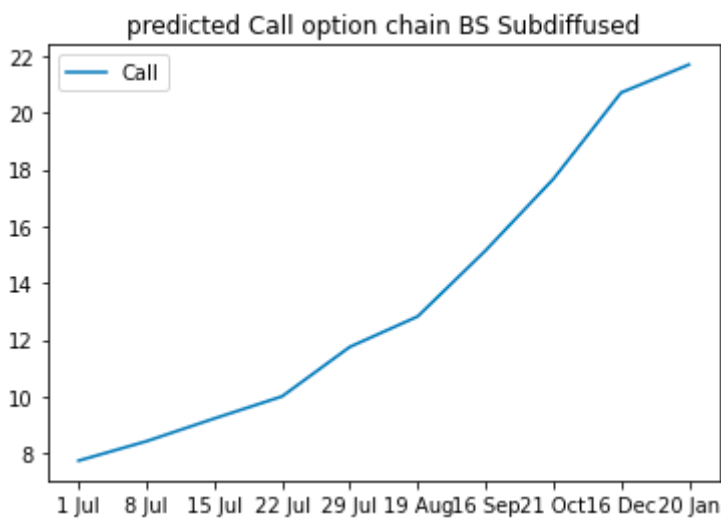


Рис. 2.12 – Прогнозовані ціни опціонів для субдифузійної моделі Блека-Шоулза

Як критерій оцінки моделі прораховано відносні похибки для кожної моделі відносно реальних даних:

Таблиця 2.3 – Відносні похибки цін на опціони для моделі Блека-Шоулза

Дата виконання опціону	дифузійна модель Блека- Шоулза	субдифузійна модель Блека- Шоулза
01.07.2022	-0.131589	-0.382156
08.07.2022	-0.106611	-0.22448
15.07.2022	-0.112413	-0.138931
22.07.2022	-0.088885	-0.081584
29.07.2022	-0.118668	-0.180826
19.08.2022	-0.121394	-0.00561
16.09.2022	-0.149979	-0.02866
21.10.2022	-0.225087	-0.093732
16.12.2022	-0.217754	-0.061968
20.01.2023	-0.218137	-0.016187

Після отримання наведених результатів, можемо зробити такий висновок. Прогноз цін на опціони для обох моделей є наближеним до реальних даних. Для короткострокового прогнозування більш ефективного виявилась модель дифузії для Блека-Шоулза, ніж субдифузійна: відносні похибки для найближчої дати становлять 13.16% та 38.2% відповідно, хоча 13% похибки є доволі високою. Проте для довгострокової перспективи, починаючи з 19.08.2022 (приблизно

через 2 місяці) прогнозування цін для субдифузійної модель має набагато кращі результати, ніж у дифузійної: для 19.08.2022 відносна похибка у дифузійній і субдифузійній становлять 12.13% та 0.56%, для 16.09.2022 -14.99% та 2.86% і тд. Отже, субдифузійна модель прорахування цін на опціони для краща для прорахування цін на опціони на довгостроковий період.

ВИСНОВОК

Процес субдифузії є невід’ємним інструментом для моделювання сучасних нетипових ринків, який підходить для мало ліквідних ринків, яким характерна відсутність зміни ціни на активи певний період часу. Оскільки процес дифузії є неперервним стохастичним рухом, він не може описати дане явище. Із нещодавніх яскравих прикладів, якого торкнулась світова спільнота, є пандемія COVID-19, під час гарячої стадії якої світова біржова активність знизилась. Також одним із прикладів є молодий ринок, що розвивається, або ж малоактивний ринок, який має відносно малу кількість гравців. Тоді на допомогу приходить процес субдифузії, який допомагає розширити можливості прогнозування ціни на цінні папери, даючи можливість зімітувати сталу динаміку зміни ціни на актив протягом певного часу.

Для дослідження як приклад мало ліквідного ринку було взято на дослідження прогнозування ціни на опціони компанію “Airbnb”.

Основні результати дослідження:

1. Було знайдено коваріаційну структуру між лог-ретурнами опціонів, динаміка цін яких підпорядковувалась субдифузійній моделі Блека-Шоулза;
2. Здійснено комп’ютерну симуляцію процесів оберненого Гаусового субординатора та оберненого до нього субординатора;
3. Змодельовано процеси дифузії та субдифузії;
4. Було знайдено ціни на опціони для дифузійної та субдифузійної моделі методом Монте-Карло;
5. Проведено порівняльний аналіз дифузійної та субдифузійної моделей: для короткострокового оцінювання краще підходить дифузійна модель, в той час як для довгострокового більш доцільно використовувати субдифузійну;
6. Як показало дослідження, субдифузійна модель має застосовуватись у комплексі з іншими фінансовими інструментами для більш точного

прогнозування ціни, такими як: прихованою волатильністю, комісією банків, відсотковою ставкою. Об'єднання даних інструментів діє більшу гарантію точного прогнозування ціни на активи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Diffusion process. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_process
2. Халл Д. Опціони, ф'ючерси та інші похідні фінансові інструменти / Джон Халл. – Київ: Вільямс, 2008.
3. Степанов С. С. Стохастичний світ / Сергій С. Степанов., 2009. – 376 с. – (Електронне видання). – (v. 0.1).
4. M. Magdziarz, Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model, Appl. 145 (2009) 188-203
5. M. Magdziarz, Black–Scholes formula in subdiffusive regime, J. Stat. Phys. 136 (2009) 553–564.
6. The Black Scholes Model Explained. (2019, October 29). Trade Options With Me. <https://tradeoptionswithme.com/black-scholes-explained/>
7. Parikh, V. (2022, March 11). Black Scholes Model Advantages and Disadvantages. LetsLearnFinance. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.letslearnfinance.com/black-scholes-model-advantages-and-disadvantages.html>
8. Mean square displacement. Wikipedia. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_squared_displacement
9. Anomalous diffusion [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous_diffusion#:~:text=Subdiffusion%20has%20been%20proposed%20as,heterogeneous%20medium%2C%20e.g.%20porous%20media.
10. R., Metzler; Jae-Hyung, Jeon; A. G., Cherstvy; E., Barkai (2014). "Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking". Phys. Chem. Chem. Phys. 16 (44): 24128–24164
11. Wylomanska, A., Kumar, A., Połoczński, R., Vellaisamy, P., Inverse Gaussian and its inverse process as the subordinators of fractional Brownian motion. Physcal Review. 96 (2016) 042128

12. D. Applebaum, L'evy Processes and Stochastic Calculus, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
13. M. T. Wasan (1968) On an inverse Gaussian process, Scandinavian Actuarial Journal, 1968:1-2, 69-96, DOI: 10.1080/03461238.1968.10413264
14. Mijena, J. B. Correlation structure of time-changed fractional Brownian motion. Cornell University, 2014. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.4502>

ДОДАТОК А

Програмний код для комп'ютерної реалізації моделі Башельє із використанням Арифметичного Броунівського Руху

```
def model_bachelier():  
    t = 0 # initial time value  
    x = 0 # initial x value in inial t time vale  
    t_array = [] # initialize array fox horizontal axis  
    x_array = [] # initialize array fox vertical axis  
    epsilon_array = [] # initialize array for storing the random variable  
  
    for k in range(num):  
        t += dt  
        eps = np.random.normal(m, s)  
        x += a(x, t) * dt + b(x, t) * sqrt_dt * eps  
  
        t_array.append(round(t, 3))  
        x_array.append(x)  
        epsilon_array.append(eps)  
    return t_array, x_array, epsilon_array
```

ДОДАТОК Б

Програмний код для комп'ютерної реалізації моделі Блека-Шоулза із використанням Геометричного Броунівського Руху

```
def model_black_scholes():  
    t = 0 # initial time value  
    x = 1 # initial x value in inial t time vale  
    t_array = [] # initialize array fox horizontal axis  
    x_array = [] # initialize array fox vertical axis  
    epsilon_array = [] # initialize array for storing the random variable  
  
    for k in range(num):  
        t += dt  
        epsilon = np.random.normal(m, s)  
        x += a_g(x, t) * dt + b_g(x, t) * sqrt_dt * epsilon  
  
        t_array.append(round(t, 3))  
        x_array.append(x)  
        epsilon_array.append(epsilon)  
    return t_array, x_array, epsilon_array
```

ДОДАТОК В

Програмний код для моделювання оберненого Гаусового субординатора

```
def inverse_gaussian_subordinator(delta = 1):
    gamma = 1
    G = [0]
    F = []
    t = 0
    dt = delta / days
    G = {0:0}

    for i in range (1, days):
        t += dt
        N = np.random.normal()
        X = pow(N, 2)
        Y = dt + X/2 - 1/2 * np.sqrt(4 * dt * X + pow(X, 2))
        U = np.random.uniform()
        check = dt / (dt + Y)
        F_i = Y if U <= check else pow(dt, 2)/Y
        F.append(F_i)
        G[round(t, 10)] = np.sum(F)

    time = [*G.keys()]
    return G, time
G_t, t = inverse_gaussian_subordinator()
draw_plot(t, [*G_t.values()], 't', 'G(t)', 'Inverse Gaussian Subordinator')
```

ДОДАТОК Г

Програмний код для моделювання оберненого субординатора (hitting time)

```
def inverse_subordinator(subordinator):  
    T, t_calendar = subordinator  
    inv_subordinator = []  
    for j in range(len(t_calendar)):  
        t = t_calendar[j]  
        for i, k in enumerate(T.keys()):  
            if T[k] > t or i == len(T) - 1:  
                inv_subordinator.append((i - 1) * step)  
                break  
    return inv_subordinator, t_calendar
```

ДОДАТОК Д

Програмний код процесу субдифузії для Арифметичного Броунівського Руху (модель Башельє)

```
def model_subdiffusion_bachelier(inverse_subordinator):
    x = 1
    t = 0
    x_array = [x]
    t_array = [t]

    inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator
    t_abm, w_abm, epsilon_abm = model_bachelier()

    for i in range(num - 1):
        t_i = t_abm[i]
        t_j = t_abm[i+1]
        epsilon = epsilon_abm[i+1]
        dt = inv_subordinator[i+1] - inv_subordinator[i]
        sqrt_dt = math.sqrt(dt)
        x += a(x, t) * dt + b(x, t) * sqrt_dt * epsilon

        t_array.append(t_i)
        x_array.append(x)
    draw_plot(t_abm, w_abm, 't', 'W', 'Arithmetic Brownian Motion Bachelier')
    draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W_S(t)', 'Subdiffusive Bachelier model')
```

ДОДАТОК Е

Програмний код процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

```
def model_subdiffusion_black_scholes(inverse_subordinator):
    x = 1
    t = 0
    x_array = [x]
    t_array = [t]

    inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator
    t_gbm, w_gbm, epsilon_gbm = model_black_scholes()

    for i in range(num - 1):
        t_i = t_gbm[i]
        t_j = t_gbm[i+1]
        epsilon = epsilon_gbm[i+1]
        dt = inv_subordinator[i+1] - inv_subordinator[i]
        sqrt_dt = math.sqrt(dt)
        x += a_g(x, t) * dt + b_g(x, t) * sqrt_dt * epsilon

        t_array.append(t_i)
        x_array.append(x)

    draw_plot(t_gbm, w_gbm, 't', 'W', 'Geometric Brownian Motion Black-Scholes')
    draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W_S(t)', 'Subdiffusive Black-Scholes model')
```

ДОДАТОК Ж

Програмний код для обрахування справедливої ціни опціону для моделі Блека-Шоулза

```
def bs_call_price(s, k, T, r, volatility):  
    a = volatility * T**0.5  
    d1 = (math.log(s / k) + (r + (volatility**2) / 2) * T) / a  
    d2 = d1 - a  
    call = s * stats.norm.cdf(d1) - k * math.e**(-r * T) * stats.norm.cdf(d2)  
    return call
```

ДОДАТОК К

Програмний код для обрахування справедливої ціни опціону для субдифузійної моделі Блека-Шоулза

```
def bs_subdiffusion_fair_call_price_avg(num, S, K, T, r, sigma):
    call_subdiffusion_prices = []
    for i in range(num):
        S_t, time = inverse_inverse_gaussian_subordinator();
        t_i = time.index(T)
        S_t_i = S_t[t_i]
        call_subdiffusion_prices.append(bs_call_price(S, K, S_t_i, r, sigma));
    call_subdiffusion_price_avg = sum(call_subdiffusion_prices) /
    len(call_subdiffusion_prices);
    return call_subdiffusion_price_avg;
```

ДОДАТОК Л

Реальні дані прогнозованих цін на опціони для компанії “Airbnb”

```

S=103.510002
K=100
#date, T, call price, implied volatility for BS, implied volatility for
subdiffused BS
call_nasdaq=[
    ('1 Jul', round(6/252, 10), 5.60, 0.6553, 0.3144),
    ('8 Jul', round(11/252, 10), 6.88, 0.6196, 0.307),
    ('15 Jul', round(16/252, 10), 8.10, 0.638, 0.298),
    ('22 Jul', round(21/252, 10), 9.25, 0.6353, 0.251),
    ('29 Jul', round(26/252, 10), 9.95, 0.6414, 0.3141),
    ('19 Aug', round(41/252, 10), 12.75, 0.6799, 0.2556),
    ('16 Sep', round(61/252, 10), 14.72, 0.6610, 0.3504),
    ('21 Oct', round(86/252, 10), 16.15, 0.6489, 0.4133),
    ('16 Dec', round(126/252, 10), 19.5, 0.6389, 0.4487),
    ('20 Jan', round(151/252, 10), 21.35, 0.6368, 0.4538),
]

```

ДОДАТОК М

Допоміжні функції:

- Параметри для Арифметичного Броунівського Руху

```
def a(x, t):
    return a_const;
```

```
def b(x, t):
    return b_const
```

- Параметри для Геометричного Броунівського Руху

```
def a_g(x, t):
    return a_const * x;
```

```
def b_g(x, t):
    return b_const * x;
```

- Функція для побудови графіків

```
def draw_plot(x, y, x_label, y_label, title, figsize=(15, 8)):
    plt.figure(figsize=figsize)
    plt.plot(x, y)
    plt.xlabel(x_label)
    plt.ylabel(y_label)
    plt.title(title)
    plt.show()
```

- Конфігураційні значення

```
# Конфігураційні значення для моделей Броунівського руху
days = 252
step = 1/days # крок, календарний час (252 робочі дні)
num = days # кількість точок для табуляції
dt = step
sqrt_dt = math.sqrt(dt)
m = 0 # mu для білого шуму ~ N(0, 1)
s = 1 # sigma^2 для білого шуму ~ N(0, 1)

# змінні для ітераційної схеми Ейлера
a_const = m
b_const = s

r=mu+pow(sigma, 2)/2 # процентна ставка
```