

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет економічних наук

Кафедра фінансів

Магістерська робота

ОСВІТНІЙ СТУПІНЬ - МАГІСТР

на тему: **«МОДЕЛІ ОЦІНКИ ТА АНАЛІЗ РИЗИКУ БОРГОВИХ ЦІННИХ
ПАПЕРІВ ІЗ ВБУДОВАНИМИ ОПЦІОНАМИ»**

Виконав: студент 2-го року навчання,
спеціальності 072 «Фінанси,
банківська справа та страхування»

Тарнавський Олександр
Володимирович

Керівник: Дадашова П.А.
кандидат економічних наук, старший
викладач

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена
з оцінкою «_____»

Секретар ЕК _____
«_____» _____ 2019 р.

Київ 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОЦІНКИ ВБУДОВАНИХ ОПЦІОНІВ	7
1.1. Загальні відомості щодо опціонів, що є вбудованими у облігації з індексованою вартістю.	7
1.2. Біноміальна модель та модель Блека Шоулза оцінки вартості опціону.....	10
1.3. Модель Дуана оцінки вартості опціону.	20
Висновок до розділу 1.....	23
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ ОЦІНКИ ОПЦІОНІВ.....	25
2.1. Історія та сучасні тенденції в побудові моделей оцінки опціонних контрактів.....	25
2.2. Використання моделі GARCH Дуана для оцінки вбудованих опціонів.	29
2.3. Побудова та використання програмного забезпечення для оцінки вартості вбудованих опціонів.	47
Висновок до розділу 2.....	55
РОЗДІЛ 3 АНАЛІЗ РИЗИКУ ОПЦІОНІВ ВБУДОВАНИХ В ОБЛІГАЦІЇ З ІНДЕКСОВАНОЮ ВАРТІСТЮ	56
3.1. Аналіз грецьких літер вбудованих опціонів.	56
3.2. Аналіз показника VaR для вбудованих опціонів.	63
3.3. Аналіз альтернативних метрик ризику для вбудованих опціонів.....	71
Висновок до розділу 3.....	74
ВИСНОВКИ	76
Список використаних джерел	80
Додаток А.....	84

Додаток Б	87
Додаток В	93
Додаток Г	96

ВСТУП

Існування похідних фінансових інструментів, та власне опціонів, пов'язане з ризиками щодо прибутків та збитків за ними, а також складнощами щодо їх оцінки. Хоч в Україні відсутній ринок похідних фінансових інструментів, державні облігації з індексованою вартістю поєднують у собі властивості звичайних купонних облігацій та опціону. Наявність вбудованого опціонного контракту ускладнює обов'язкову оцінку фінансовими інституціями таких цінних паперів. Складність полягає у тому, що через відсутність ринку похідних фінансових інструментів, неможливо перевірити використовувані моделі оцінки справедливої вартості опціону. Висновки аудиторів свідчать про актуальність цієї проблеми для якості фінансових звітів банків. **Актуальність дослідження** полягає у тому, щоб використати принципово різні підходи до визначення справедливої вартості таких контрактів для врахування можливих неточностей та помилок. Також критичною є оцінка ризиків, пов'язаних з володінням облігаціями з вбудованим опціоном.

Тема оцінки опціонів широко є глибоко досліджуваною зарубіжними вченими. Перша група таких вчених досліджувала закриту форму оцінки опціонів (оцінка за допомогою виведення однієї формули для вартості опціону), до них можна віднести Фішера Блека, Майрона Шоулза, Марка Гармана та Стівена Колхагена. Інша група займалась оцінкою опціонів за допомогою симуляційних методів, до цієї групи можна віднести таких вчених як Фелім Бойл та Джин-Чуан Дуан.

В Україні дослідженням вартості опціонів, що вбудовані в облігації з індексованою вартістю, займається Національний банк України. НБУ регулярно публікує результати своїх оцінок на офіційному інтернет-порталі, ці оцінки є базою для відображення справедливої вартості облігацій з індексованою вартістю у фінансових звітах банків.

Метою дослідження є оцінка справедливої вартості облігацій з індексованою вартістю різними підходами та визначення ймовірного ризику, пов'язаного з утриманням цих цінних паперів. Відповідно до мети роботи визначено завдання:

- Сформулювати основні теоретичні засади щодо обігу облігацій з вбудованими опціонами, а також щодо методів їх оцінки;
- Оцінити справедливу вартість облігацій з вбудованими опціонами, застосовуючи різні підходи до оцінки вартості опціонів;
- Розробити додаток для зручної регулярної оцінки опціонів, що включатиме різні методи оцінки
- Проаналізувати ризик опціонів, вбудованих у облігації з індексованою вартістю за допомогою коефіцієнтів чутливості (грецьких літер);
- Проаналізувати показник VaR (Value at Risk) для опціонів, вбудованих у облігації з індексованою вартістю;
- Проаналізувати альтернативні показники фінансового ризику для вбудованих опціонів;
- Зробити висновки щодо проведеної оцінки та аналізу ризиків.

Об'єктом дослідження є державні облігації України з індексованою вартістю. **Предметом** дослідження є справедлива вартість облігацій з індексованою вартістю.

Методи дослідження. У роботі використано статистичні, економетричні та симуляційні методи дослідження. За допомогою графічного аналізу статистичних даних досліджується динаміка валютного курсу з урахуванням фундаментальних факторів впливу. За допомогою GARCH моделі у роботі побудованих прогноз волатильності валютного курсу долар-гривня. Методом симуляції побудовано різні шляхи майбутнього курсу долар-гривня, що є основою для оцінки валютного опціону.

Інформаційну базу дослідження становлять регуляторні акти Національного банку України, закони України, статистичні дані з бази НБУ та

Міністерства фінансів України, монографії та статті зарубіжних вчених з теми оцінки похідних фінансових інструментів, ресурси Інтернет.

Наукова новизна результатів. У роботі вперше обґрунтовано доцільність та застосовано модель Дуана для оцінки валютного опціону долар-гривня, вбудованого у облігації з індексованою вартістю, та порівняно з результатами закритої моделі оцінки опціону. Таким чином, удосконалено методологію оцінки вартості та ризику цього опціону. Крім того, створено автоматизований додаток для оцінки опціонів за моделлю Дуана.

Практичне значення результатів полягає у розширенні методології оцінки вартості та ризику облігацій з вбудованим опціоном в Україні. Результати дослідження можуть бути застосовані комерційними банками та інвесторами, які є тримачами облігацій з індексованою вартістю задля більш точної оцінки їхньої вартості та ризику. Також результати дослідження можуть бути застосовані Національним банком України у його оцінках вартості облігацій з індексованою вартістю.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі наведено теоретичні засади щодо оцінки облігацій та опціонів, що можуть бути вбудованими в них. Другий розділ представляє оцінку вбудованого опціону класичним методом закритої форми та методом Дуана, побудову додатку для оцінки опціону та його опис. У третьому розділі проаналізовано фінансовий ризик, притаманний опціонам, що вбудовані у облігації з індексованою вартістю за допомогою трьох груп ризик-метрик.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОЦІНКИ ВБУДОВАНИХ ОПЦІОНІВ

1.1. Загальні відомості щодо опціонів, що є вбудованими у облігації з індексованою вартістю.

Опціони, вбудовані у боргові цінні папери, є досить поширеним явищем на фінансових ринках. Головною метою вбудови опціону в облігації є підвищення інвестиційної привабливості боргу його емітентом. Опціони вбудовуються таким чином, що або ризики для інвестора зменшуються, або ймовірна дохідність збільшується. При цьому вбудований опціон не є самостійним фінансовим інструментом, тобто не торгується окремо. Опціональність проявляється у специфічних умовах, що прописуються емітентом облігації.

Найпоширенішим прикладом вбудови опціону в облігації є облігації з правом дострокової купівлі (вбудований опціон «колл») та з правом дострокового продажу (вбудований опціон «пут»).

У облігацію з правом дострокової купівлі вбудовується опціон «колл» на саму ж облігацію, при цьому його власником є емітент. Таким чином, емітент при сприятливій динаміці ставок може викупити свій борг і залучити новий на більш вигідних умовах. Тобто, вбудований опціон додає гнучкості у прийнятті рішень саме емітенту [1, с. 301].

У облігацію з правом дострокового продажу вбудовується опціон «пут» на саму ж облігацію, при цьому його власником є інвестор. При збільшенні ставок інвестор може продати емітенту облігацію та інвестувати звільнені кошти з більшою дохідністю. Таким чином, вбудований опціон додає гнучкості у прийнятті рішень інвестору [2, с. 459].

Іншим прикладом вбудованого опціону є облігації, що конвертуються. За ними інвестор може конвертувати облігацію у акції компанії-емітента облігації у заданій пропорції. Це класичний приклад того, як компанія-боржник намагається зробити свій борг більш привабливим. До випуску таких облігацій вдаються компанії, які знаходяться у скрутному фінансовому становищі та намагаються залучити борг за якнайнижчою вартістю. Облігація стає привабливішою за рахунок того, що за найкращим сценарієм емітент покращує своє фінансове становище, його акції дорожчають і для інвестора стає вигіднішим використати опціон, ніж чекати погашення облігації. Мінусом для компанії-емітента у такому випадку є розмиття власності [3, с. 277].

Опціони також вбудовані у облігації з індексованою вартістю, що емітує Міністерство фінансів України. Опціон проявляється у самому механізмі валютної індексації. При цьому індексується лише номінальна вартість облігації, жоден із купонів не індексується. Такі облігації можна було б назвати доларовими облігаціями з гривневими купонами, якби не опціонний механізм. Він забезпечує те, що виплата номінальної вартості відбувається за валютою, що укріпилась за час обігу облігації. Мотивацією для використання такого інструменту є покращення інвестиційної привабливості державного боргу за рахунок значного зменшення валютного ризику для інвестора. Початок випуску таких інструментів відбувся у 2011 р.

Опціон вбудований в облігацію з індексованою вартістю є валютним опціоном «колл», де базовим інструментом є долар США. Це можна побачити, розглянувши механізм індексації. Сума погашення облігації з індексованою вартістю розраховується за формулою [4]:

$$СП = \max \left(\text{Ном}, \text{Ном} * \frac{СКМР_1}{СКМР_0} \right) \quad (1.1)$$

де СП – сума погашення облігації з індексованою вартістю;

Ном – номінальна вартість облігації з індексованою вартістю;

$СКМР_1$ – офіційний курс гривні до долара США в середньому за календарний місяць, що передує місяцю погашення облігації.

$СКМР_0$ – середньозважений курс гривні до долара на міжбанківському ринку за календарний місяць, що передує місяцю розміщення облігації.

Вираз (1.1) можна перетворити віднявши від обох аргументів функції максимуму номінальну вартість облігації та винесши її за функцію:

$$СП = \text{Ном} + \max \left(0, \text{Ном} * \left(\frac{СКМР_1}{СКМР_0} - 1 \right) \right) \quad (1.2)$$

Логічно це можна трактувати як те, що власник облігації у будь-якому випадку отримає номінальну вартість облігації. Проте, залежно від динаміки курсу, він може отримати додаткову виплату. Продовживши перетворення можна отримати:

$$СП = \text{Ном} + \frac{\text{Ном}}{СКМР_0} * \max(0, СКМР_1 - СКМР_0) \quad (1.3)$$

Вираз справа дає змогу остаточно переконатись у наявності вбудованого опціону «колл», адже є типовою формулою виплати по ньому. Множник $\frac{\text{Ном}}{СКМР_0}$ можна трактувати як теоретичний обсяг поставки для цього опціону. Отже, перший доданок можна поєднати з купонними виплатами та оцінити як звичайну облігацію, а другий доданок – як валютний опціон.

1.2. Біноміальна модель та модель Блека Шоулза оцінки вартості опціону.

Широке розповсюдження опціонних контрактів на розвинених фінансових ринках спричинило потребу в оцінці цих фінансових інструментів. Найпростішою моделлю оцінки опціонів є біноміальна модель. Її у 1979 році у своїй роботі описали Джон Кокс, Стівен Росс та Марк Рубінштайн [5].

Метод полягає у побудові біноміальних дерев для визначення ціни опціону. При цьому висуваються певні припущення:

1. Ціна на базовий актив (у даному випадку – акція) є випадковим блуканням (Броунівський рух).
2. Оцінка відбувається у світі з нейтральним відношенням до фінансового ризику (risk-neutral valuation).
3. Відсутність арбітражу.

Припущення 1, згідно з багатьма дослідженнями розвинених фондових ринків, є правдивим. Щодо припущення 2, сучасна теорія фінансів визначає, що учасники ринку здебільшого уникають ризику, тобто воно не справджується у реальному світі. Припущення 3 частково справджується з огляду на обмежену здатність учасників ринку усувати можливості для арбітражу. Проте, не дивлячись на справдження лише деяких припущень, емпіричні дослідження показують, що біноміальна модель здатна пояснювати ціноутворення на ринку опціонних контрактів.

Найпростішим видом цієї моделі є однокрокове біноміальне дерево. При його побудові припускається, що ціна на акцію за один період може збільшитись чи зменшитись на однакову величину. Для відображення змін в ціні акції застосовуються коефіцієнти u та d .

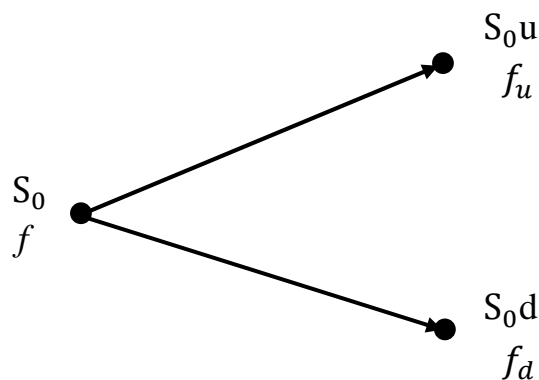


Рис. 1. 1. Ціна акції та опціону “колл” на неї у вигляді однокрокового біноміального дерева.

Однокрокове біноміальне дерево зображено схематично на рис. 1.1. На схемі S_0 – ціна акції у поточний момент часу, S_0u – ціна акції у випадку її збільшення наступному періоді, S_0d – ціна акції у випадку її зменшення у наступному періоді, f – ціна опціону “колл” на акцію у поточний момент часу, f_u – ціна опціону у випадку збільшення ціни акції у наступному періоді, f_d – ціна опціону у випадку зменшення ціни акції у наступному періоді.

Можна припустити, що $u = 1.1$, $d = 0.9$, тобто ціна на акцію може збільшитись або зменшитись на 10%. Таким чином, при відомій ціні на поточний момент можна розрахувати її значення у випадку збільшення та зменшення. Для прикладу $S_0 = 100$, тоді $S_0u = 110$, а $S_0d = 90$. Також припускається що є опціон з ціною виконання $K=105$. У такому випадку можна за формулою, допустивши нульовий прибуток власника опціону, розрахувати вартість опціону у двох випадках у наступному періоді. Таким чином: $f_u = 5$, $f_d = 0$.

Далі можна сконструювати з акції і опціону “колл” на неї безризиковий портфель, який у будь-якому випадку з рис. 1.1 давав би однакову дохідність. Для цього варто припустити, що в портфелі є коротка позиція (продаж) опціону “колл” на одну акцію та довга позиція (купівля) акцій на кількість, яку необхідно

визначити. Кількість акцій має бути такою, щоб справджувалась рівність безризикового портфелю:

$$S_0 u \Delta - f_u = S_0 d \Delta - f_d \quad (1.4)$$

де Δ (дельта) – кількість акцій для створення безризикового портфелю.

З формули (1.4) можна отримати [6, с. 615]:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad (1.5)$$

Видно, що дельта є відношенням різниці цін опціону за різних сценаріїв до різниці цін акції за різних сценаріїв. Окрім того, що дельта є кількістю акцій для створення безризикового портфелю, вона є однією з важливих характеристик опціону.

Для описаного вище прикладу дельта дорівнює 0.25. Тобто, безризиковий портфель можна скласти з 0.25 акцій та продажу опціону “колл” на 1 акцію.

Припускаючи відсутність арбітражу, дохідність такого портфелю має дорівнювати безризиковій процентній ставці, а дисконтована вартість дорівнювати витратам на його конструювання. Таким чином:

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT} \quad (1.6)$$

де r – безризикова ставка.

Підставивши формулу для Δ та реорганізувавши рівняння (1.6) можна отримати формулу теперішньої вартості опціону [5, с. 256]:

$$f = e^{-rT} (p f_u + (1 - p) f_d) \quad (1.7)$$

$$\text{де } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Формула (1.7) дозволяє оцінити опціон, якщо динаміка ціни акції описується однокроковим біноміальним деревом. При безризиковій ставці у 10% та терміну до погашення в 1 місяць вартість описаного вище опціону буде:

$$f = e^{-0.1*(1/12)}(0.5418*5 + 0*0.4582) \approx 2.69 \quad (1.8)$$

Однокрокова біноміальна модель дозволяє оцінити опціон, але не є реалістичною, з огляду на те, що за один місяць ціна акції змінюється безліч разів. Тому необхідно збільшувати кількість кроків у моделі. У двокроковій моделі ціна акції має три можливі фінальні значення, отже і вартість опціону на дату виконання може мати три значення. Для двокрокової моделі вартість опціону визначається за аналогічним принципом та запишеться:

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}) \quad (1.9)$$

де Δt – тривалість одного кроку біноміального дерева.

Для оцінки опціону за біноміальною моделлю необхідно знати параметри u та d , які не можна спостерігати у реальному житті. Проте, можна вирахувати їх за допомогою дисперсії ціни акції. Якщо ціна акції є Броунівським рухом, її дисперсію можна записати як $\sigma^2 \Delta t$. Далі необхідно записати дисперсію ціни акції за допомогою параметрів u та d та прирівняти два вирази:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \quad (1.10)$$

Розв'язавши рівняння (1.13) можна отримати значення параметрів:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (1.11)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (1.12)$$

Використання параметрів u та d , розрахованих таким чином, дозволяє врахувати волатильність ціни на базовий актив у оцінці опціону на нього.

Таким чином, використовуючи рівняння (1.7), (1.11), (1.12) та природу біноміального розподілу, можна визначити вартість опціону для будь-якої кількості кроків біноміальної моделі. Зі збільшенням кроків зростає не лише точність оцінки, а й затрати часу, тому для такої оцінки використовують спеціалізовані комп'ютерні пакети.

Окремим випадком оцінки опціонів є оцінка валютних опціонів. Загальні принципи оцінки цих деривативів не відрізняються від принципів оцінки опціонів на акції. Для валютних курсів також можна визначити волатильність (стандартне відхилення). Різниця полягає у тому, що замість безризикової ставки одної валюти використовується різниця безризикових ставок валютної пари. Таким чином, змінюється лише рівняння параметра p . Для прикладу формула цього параметру для пари гривня-долар:

$$p = \frac{e^{(r_{UAH} - r_{USD}) * \Delta t} - d}{u - d} \quad (1.13)$$

де r_{UAH} – гривнева безризикова ставка;

r_{USD} – доларова безризикова ставка.

Хоча торгівля опціонами була досить активною і задовгодо того, лише у 1973 році з'явилась модель, за допомогою якої можна було визначити ціну опціону достатньо точно. Вперше її вивели американські дослідники Фішер Блек, Майрон Шоулз та Роберт Мертон. Основу цієї моделі становить часткове диференціальне рівняння, яке для європейського опціону “колл”, де базовим активом є акція, має вигляд [7, с. 310]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (1.14)$$

де f – ціна опціонного контракту як функція від ціни акції та часу;

S – поточна ціна акції;

σ^2 - дисперсія часового ряду ціни акції, міра волатильності.

Оскільки у біноміальній моделі та моделі Блека-Шоулза використовуються однакові припущення, формулу ціни акції за моделлю Блека-Шоулза можна вивести за допомогою біноміальної моделі, якщо припустити що кількість періодів біноміального дерева прямує до нескінченності.

Для виведення формули потрібно припустити, що для оцінки опціону використовується дерево з кількістю періодів n , тоді тривалість одного кроку дерева буде T/n , де T – час до виконання опціону. За час до виконання базовий актив може зрости у ціні j разів, та зменшитись у ціні $n-j$ разів. Тоді, використовуючи формулу ймовірності для біноміального розподілу, очікувану ціну опціону на дату виконання можна записати як:

$$\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)! j!} p^j (1-p)^{n-j} \max(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0) \quad (1.15)$$

Функція (1.15) приймає ненульові значення коли $S_0 u^j d^{n-j} > K$, також це можна записати:

$$\ln(S_0 / K) > -j \ln(u) - (n-j) \ln(d) \quad (1.16)$$

Підставивши значення u та d , що враховують волатильність та перемістивши елементи, можна отримати:

$$j > \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0 / K)}{2\sigma\sqrt{T/n}} \quad (1.17)$$

Формула (1.17) є обмеженням для кількості періодів зростання ціни акції, при якій опціон має вартість. Таким чином, ввівши нові позначення та використавши припущення про відсутність арбітражу та нейтральне відношення до ризику, вартість європейського опціону “колл” можна записати:

$$c = e^{-rT} (S_0 U_1 - K U_2) \quad (1.18)$$

$$\text{де } U_1 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)! j!} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j};$$

$$U_2 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)! j!} p^j (1-p)^{n-j};$$

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0 / K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}.$$

Далі варто розглянути U_2 . Цей елемент є ймовірністю того, що настане певне число j сприятливих подій (виконання нерівності (1.17)). Відомо, що коли кількість експериментів прямує до нескінченності, біноміальний розподіл можна апроксимувати нормальним розподілом. Якщо зробити це для U_2 , то для n експериментів з ймовірністю успіху p , середнє значення буде np , а стандартне відхилення - $\sqrt{np(1-p)}$. Таким чином, ймовірність того, що кількість сприятливих подій буде більшою за α можна вирахувати за формулою:

$$U_2 = N\left(\frac{np - \alpha}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (1.19)$$

де $N()$ – кумулятивна ймовірнісна функція нормального розподілу.

Значення параметру p можна вирахувати з формул (1.7), (1.10), (1.12).

$$p = \frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \quad (1.20)$$

Якщо розкласти експоненційні функції, можна побачити, що, коли n прямує до нескінченності, $p(1-p)$ прямує до 0.25, а $\sqrt{n}(p - \frac{1}{2})$ прямує до $\frac{(r - \sigma^2/2)\sqrt{T}}{2\sigma}$. Використавши це та підставивши α у формулу (1.19), можна отримати:

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (1.21)$$

Далі варто розглянути U_1 . Для цього необхідно ввести нове позначення:

$$p^* = \frac{pu}{pu + (1-p)d} \quad (1.22)$$

Використовуючи нове позначення, U_1 можна записати як:

$$U_1 = (pu + (1-p)d)^n \times \sum_{j \geq \alpha} \frac{n!}{(n-j)!j!} (p^*)^j (1-p^*)^{n-j} \quad (1.22)$$

Ліва частина формули (1.22) відображає очікувану дохідність акції у степені n . Оскільки при нейтральному відношенню до ризику очікувана дохідність дорівнюватиме безризиковій дохідності, ліву частину можна записати як e^{rT} .

Права частина формули (1.22) є ймовірністю того, що настане певне число j сприятливих подій (виконання нерівності (1.16)), де p^* є ймовірністю зростання ціни акції. Таким чином, за аналогією з U_2 , U_1 можна записати:

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{np^* - \alpha}{\sqrt{np^*(1-p^*)}}\right) \quad (1.23)$$

Підставивши α , формула набуває вигляду:

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p^*(1-p^*)}} + \frac{\sqrt{n}(p^* - 0.5)}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}\right) \quad (1.24)$$

Підставивши у формулу (1.22) значення усіх параметрів, можна отримати:

$$p^* = \left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{rT/n}}\right) \quad (1.25)$$

Якщо розкласти експоненційні функції, можна побачити, що, коли n прямує до нескінченності, $p^*(1-p^*)$ прямує до 0.25, а $\sqrt{n}(p^* - 0.5)$ прямує до $\frac{(r + \sigma^2/2)\sqrt{T}}{2\sigma}$. В результаті отримано:

$$U_1 = e^{rT} N\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (1.26)$$

З формул (1.17), (1.21) та (1.27) можна обчислити вартість європейського опціону “колл” [8, с. 644].

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (1.27)$$

$$\text{де } d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Формула (1.27) є формулою Блека-Шоулза для оцінки європейського опціону «колл».

Модель Блека-Шоулза є найпоширенішою моделлю оцінки опціонів та активно використовується на фінансових ринках, хоч і має свої недоліки. Одним з найвідоміших обмежень формули є припущення про сталу волатильність. Для опціонів з коротким строком дії це припущення спричиняє незначну похибку при оцінці, проте зі збільшенням строку дії похибка зростає. Також модель припускає сталу безризикову дохідність, що не відповідає реальності. Насамкінець, логнормальний розподіл дохідності базового активу рідко спостерігається у ринкових даних, найчастіше розподіл має «товсті хвости».

На розвинених ринках ринкова вартість опціонів є первинною і найчастіше відрізняється від тої, що можна отримати у результаті використання моделі Блека-Шоулза. Ціни на опціони котуються у контексті вбудованої волатильності, а не грошовому вираженні. Поняття вбудованої волатильності виникає через невідповідність реальної динаміки ціни базового активу тій, що припускається у моделі Блека-Шоулза. Вбудована волатильність – це значення стандартного відхилення дохідності базового активу, за якого теоретична вартість за моделлю Блека-Шоулза відповідає ринковій вартості опціону [9, с.93].

На ринках, що розвиваються, первинною є історична чи інша оцінена волатильність, вартість опціону розраховується базується на оцінці волатильності.

З часом удосконалювалась як сама модель Блека-Шоулза, так і методи її використання. Варіант Гармана-Колхагена моделі Блека-Шоулза дозволяє оцінювати валютні опціони, де на вартість впливають одразу дві безризикові ставки [10]. Деякі види екзотичних опціонів також можна оцінити за допомогою розширень до моделі Блека-Шоулза.

1.3. Модель Дуана оцінки вартості опціону.

У намаганнях обійти відомі недоліки моделі Блека, Шоулза та Мертона, сінгапурський учений Джин Чуан Дуан у 1995 р. публікує статтю, де описує модель оцінки опціонів, що базується на дослідженому у 1986 р. Болерслев процесі GARCH [11]. Спільним у моделі Дуана та Блека-Шоулза є те, що припускається, що динаміка ціни базового активу слідує геометричному Броунівському руху. Проте, при цьому дисперсія моделюється за допомогою GARCH процесу. Таким чином, процес динаміки ціни базового активу можна описати:

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = r + \lambda \sigma - 0.5\sigma^2 + \varepsilon_t \quad (1.28)$$

де $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

r – безризикова ставка дохідності,

λ – премія за ризик,

q, p – порядок відповідно ARCH та GARCH компоненти.

У рівнянні (1.28) сума $(r + \lambda \sigma)$ є очікуваною дохідністю активу, яку досить важко оцінити. Тому необхідним є перейти до форми, де у рівнянні середнього була б присутня лише безризикова дохідність. Змінна дисперсія

дохідності виключає можливість повної нейтралізації ризику, яка застосовується у модель Блека-Шоулза. Тому у моделі Дуана використовується відношення локальної нейтралізації ризику (locally risk-neutral valuation relationship, LRNVR). Застосування цієї техніки дозволяє позбутись використання премії за ризик у рівнянні середнього та перенести її у рівняння змінної дисперсії.

Вимір Q називається таким, що задовольняє LRNVR, якщо:

1. Вимір Q є повністю та взаємно неперервним відносно фізичного виміру P.
2. Розподіл дохідності активу у цьому вимірі є логнормальним.
3.
$$E^Q\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = e^r.$$
4.
$$Var^Q\left(\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)\right) = Var^P\left(\ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)\right).$$

Якщо економічний агент максимізує свою корисність, Дуаном доведено що для справдження LRNVR має виконуватись будь-яка з наступних умов:

1. Функція корисності припускає сталий коефіцієнт відносного неприйняття ризику та розподіл змін у логарифмічному споживанні є нормальним зі сталим середнім та дисперсією.
2. Функція корисності припускає сталий коефіцієнт абсолютного неприйняття ризику та розподіл змін у споживанні є нормальним зі сталим середнім та дисперсією.
3. Функція корисності є лінійною.

Умови 1 та 2 вище дозволяють зробити припущення про сталу безризикову ставку дохідності.

LRNVR визначає, що у вимірі Q, процес (1.28) записується як [12, с. 17]:

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}} = r - 0.5\sigma^2 + \varepsilon_t \quad (1.29)$$

де $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \lambda \sigma_t)^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2.$$

З (1.29) можна побачити, що змінна дисперсія уже не слідує класичному процесу GARCH. Також можна помітити, що при нульових значеннях порядків q та p динаміка дохідності стає класичним ризико-нейтралізованим геометричним Броунівським рухом, що припускається у моделі Блека-Шоулза.

Невідомі параметри моделі Дуана оцінюються аналогічно до параметрів стандартної GARCH моделі методом максимальної правдоподібності (maximum likelihood estimation). Оскільки відомо, що величина ε_t розподілена нормально з відомими параметрами, можна використати функцію щільності нормального розподілу для того, щоб дізнатись правдоподібність виникнення конкретного значення величини за певного набору параметрів моделі. Для того, щоб оцінити параметри моделі необхідно максимізувати правдоподібність одночасного виникнення даних, які спостерігались на історичному періоді. Прологарифмувавши функцію щільності для ε_t , маємо, що при оптимальних параметрах максимізується значення:

$$\sum \ln \frac{1}{2\pi\sigma_t^2} - 0.5 \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \quad (1.30)$$

де
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \lambda \sigma_t)^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Таким чином, задавши початкові значення параметрів моделі та використавши алгоритм нелінійної оптимізації, оцінюються параметри моделі.

Метод Дуана не має аналітичного формульного рішення, тому для оцінки опціону, маючи параметри моделі, необхідно симулювати майбутні ціни базового активу. Відповідно до припущеної динаміки, ціна базового активу у будь-який момент часу буде визначатись:

$$X_T = X_0 \exp\left(rT - 0.5 \sum_{i=1}^T \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^T \varepsilon_i\right) \quad (1.31)$$

де $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \lambda \sigma_t)^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$

Симулювавши достатню кількість цін базового активу на дату погашення опціону, вартістю опціону буде дисконтована середня виплата за опціоном. Для опціону «колл»:

$$C = e^{-rT} E[\max(X_T - K, 0)] \quad (1.32)$$

Перевагою методу симуляцій Монте Карло є те, що, оскільки можливо дізнатись симульовані ціни базового активу на будь-який момент часу, можна оцінювати будь-які види опціонів, включаючи опціони американського стилю, арифметичні та геометричні азійські опціони та опціони з нестандартними виплатами. Такий метод гарно підходить для оцінки опціонів, що вбудовані у облігації з індексованою вартістю, оскільки виплати за ними є нестандартними.

Одним із недоліків методу Монте Карло є те, що цей метод не дає точне значення. Для того, щоб оцінити дериватив найточніше, необхідно проводити якнайбільше симуляцій. І навіть попри це, оцінені значення мають розкид. Іншим недоліком є витрати часу на симуляції. Краща точність потребує більшої кількості симуляцій. Більша кількість симуляцій потребує більшого часу на обробку.

Висновок до розділу 1.

У розділі проаналізовано причини виникнення боргових цінних паперів з вбудованими опціонами, їх користь для різних учасників ринку. Виділено

основні види опціонів, що вбудовуються в облігації. Також проаналізовано яким чином вбудований опціон у облігації внутрішньої державної позики з індексованою вартістю, виділено ключові характеристики цього опціону.

Розглянуто теоретичну базу щодо класичних моделей оцінки опціонних контрактів. Наведено принципи побудови біноміальної моделі оцінки опціонів. Виведено формулу моделі Блека-Шоулза за допомогою переходу з дискретного варіанту біноміальної моделі до неперервного. Проаналізовано ключові обмеження та сучасні принципи використання моделі Блека-Шоулза, такі як: припущення про сталу волатильність та безризикову дохідність, існування «посмішки волатильності».

Наведено ключові принципи побудови моделі Дуана як методу, що здатний обійти одне з обмежень моделі Блека-Шоулза – використання сталої волатильності. Розглянуто основний принцип на якому ґрунтується модель – принцип локальної нейтралізації ризику. Наведено методи, за допомогою яких оцінюється модель Дуана (метод максимальної правдоподібності) та відбувається власне оцінка опціону (Монте Карло симуляції).

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛІ ОЦІНКИ ОПЦІОНІВ

2.1. Історія та сучасні тенденції в побудові моделей оцінки опціонних контрактів.

Загальний розвиток ринку опціонних контрактів та розвиток моделей оцінки цих контрактів є досить взаємопов'язаними, оскільки розповсюдженість певного виду фінансових інструментів породжує потребу у його справедливій оцінці, а прогрес у методах оцінки фінансових інструментів створює додаткову мотивацію та знижує ризики для учасників ринку щодо використання цього інструменту. Опис перших інструментів, подібним опціонам, можна знайти на Месопотамських глиняних дощечках, проте, один з перших активних ринків, де обертались опціонні контракти виник у Нью-Йорку в 1870-х. [13, с. 471]

У березні 1900-го року французький математик Луї Башельє у своїй дисертації «Теорія спекуляцій» описав першу модель оцінки опціонних контрактів, що базується на використанні Броунівського руху. Таким чином, це була перша модель, що за своєю формою схожа на модель Блека-Шоулза. Вартість опціону «колл» за цією моделлю визначається формулою [14]:

$$c = (S - K)N(d_1) + \sigma\sqrt{T}n(d_1) \quad (2.1)$$

де
$$d_1 = \frac{S - X}{\sigma\sqrt{T}},$$

S – ціна базового активу на момент оцінки;

K – ціна виконання опціону;

T – час до виконання опціону;

σ – волатильність базового активу;

$N(x)$ – кумулятивна функція нормального розподілу;

$n(x)$ – функція щільності нормального розподілу.

Башельє також виводить тотожність, схожу на колл-пут тотожність, що демонструє, що купівля ф'ючерса та продаж опціону «колл» має однаковий профіль доходи-витрати.

Важливою розробкою в області оцінки опціонів є виведення тотожності колл-пут Вінценцем Бронзін у 1908-му році. Колл-пут тотожність описує взаємозв'язок між вартістю опціонів «колл» та «пут» та виглядає так [15, с. 282]:

$$c + Ke^{-rT} = p + S \quad (2.2)$$

де c – вартість опціону «колл»;

p – вартість опціону «пут»;

r – безризикова ставка дохідності.

Таким чином, з колл-пут тотожності (2.2), маючи вартість опціону «колл», можна визначити вартість опціону «пут», та навпаки. Також, з неї виходить те, що ринок закладає однакову волатильність базового активу у опціони «колл» та «пут», що мають однакову ціну виконання та термін до виконання. Якщо б ці волатильності були різними, на ринку існувала б можливість для арбітражу, відповідно до колл-пут тотожності (2.2). Бронзін також розробив декілька моделей оцінки опціонів, що базуються на різних припущеннях про розподіл ціни базового активу, а саме: трикутний розподіл, параболічний та експоненційний розподіл.

Спренкл вперше припустив, що ціна базового активу є лог-нормально розподіленою випадковою величиною та слідує геометричному Броунівському руху. Саме таке формулювання припущення виключає можливість від'ємної ціни на базовий актив, що було недоліком попередніх моделей. Також Спренкл зміг включити в свою модель дохідність активу, тобто його можливість зростати

у ціні з часом. Вартість опціону «колл» за цією моделлю обчислюється за формулою [16]:

$$c = Se^{uT} N(d_1) - (1 - k)KN(d_2), \quad (2.3)$$

де
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T};$$

k – коефіцієнт підлаштування;

μ – дохідність активу.

Подальший розвиток моделей відбувався навколо припущень та форми моделі Спренкла. Так, свої моделі з незначними змінами пропонували Джеймс Боунз у 1964 р. [17] та Пол Семюельсон у 1965 р. [18]. Особливістю моделі Семюельсона було врахування того факту, що очікувана дохідність опціону може бути більшою очікуваною дохідності базового активу.

Після років незначних змін та покращень моделей, проривом стала модель Блека, Шоулза та Мертона. Її опис наведено у першому розділі цієї роботи. За своєю суттю та припущеннями вона є ідентичною до моделі Боунза та Спренкла (2.3). Проте метод виведення моделі значно відрізнявся, він базувався на безперервному дельта-хеджуванні. Це дозволило прибрати з моделі очікувану дохідність базового активу, яка є досить неточним виміром та може різко змінюватись у часі. Натомість у модель було введено безризикову ставку дохідності, яка є більш стабільним виміром. Виведення цієї моделі сприяло збільшенню обсягів торгів опціонами та розвитку хеджування опціонів.

Відомим недоліком моделі Блека-Шоулза оцінки опціонів є припущення про постійну дисперсію дохідності базового активу. Оскільки стандартне відхилення дохідності базового активу є одним з основних факторів, що впливає на ціну опціону, таке припущення також значно впливає на його ціну. Ряд емпіричних досліджень виявляють, що насправді волатильність не є постійною.

До того ж, волатильності вбудовані у ринкову ціну опціонів часто відрізняються від історичних волатильностей базових активів. Це явище дістало назву «посмішка волатильності» (volatility smile) через форму графіка залежності вбудованої волатильності від ціни виконання. Такі неточності породжують помилки у оцінці справедливої вартості опціонів. Найбільш дослідженими такими зміщеннями оцінок є: недооцінка опціонів зі збитком [19], недооцінка опціонів на низьковолатильні базові активи [20] та недооцінка опціонів з коротким строком до погашення [21].

Саме тому, багато уваги сучасних дослідників присвячено тому щоб знайти можливість оцінити опціон без припущення про сталу волатильність, тобто описати цю волатильність модельно. Кокс намагався врахувати гетероскедастичність дохідності у моделі з постійною еластичністю дисперсії [22]. Мертон побудував модель зі скачком розсіювання [23]. Халл та Уайт, а також Хестон запропонували модель, де волатильність є стохастичним процесом.

Вартою уваги є модель Хестона, розроблена у 1993 р., що побудована на схожих припущеннях з моделлю Блека-Шоулза, проте волатильність у ній є стохастичним процесом, корельованим з дохідністю. Модель Хестона описується двома рівняннями [24]:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dz_{1t}; \\ d\sigma_t^2 &= k(\theta - \sigma_t^2)dt + V\sigma_t dz_{2t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

де V – волатильність стандартного відхилення σ ;

θ – довгострокова дисперсія дохідності;

k – коефіцієнт підлаштування;

z_1 та z_2 – корельовані випадкові процеси, що слідують Броунівському руху.

Для використання моделі Хестона необхідно задати матрицю коваріацій для змінних, що слідують Броунівському руху. Також певна невизначеність та

важкість у сприйнятті породжується змінною, що являє собою волатильність волатильності, яка є сталою. Таким чином, можна сказати, що модель Хестона лише частково вирішує проблему сталої волатильності, що наявна в моделі Блека-Шоулза.

Проблему врахування змінної волатильності повністю вирішує модель Дуана, розроблена сінгапурським вченим у 1995 р., вона описана у першому розділі цієї роботи. Модель базується на використанні GARCH процесу Болерслева та локальній нейтралізації ризику. І модель Хестона, і модель Дуана не мають аналітичного формульного рішення, тому оцінка опціонів за ними відбувається за допомогою Монте Карло симуляцій.

Іншим напрямом покращення результатів моделі Блека-Шоулза є урахування змінної відсоткової ставки. На відміну від моделей зі змінною волатильністю, такі моделі часто мають аналітичне формульне рішення. Прикладом такої моделі можна назвати модель Кіма та Кунітомо [25], де до класичного лог-нормального процесу, що припускається у моделі Блека-Шоулза, було додано модель стохастичної відсоткової ставки Кокса, Інгерсолла та Росса. [26]

2.2. Використання моделі GARCH Дуана для оцінки вбудованих опціонів.

Модель GARCH Дуана була імплементована, протестована та використана для оцінки вбудованих опціонів автором у програмному пакеті R. Далі наводиться опис загальної структури моделі та ключові моменти у її побудові.

Практичне застосування моделі Дуана для оцінки опціонів можна розділити на два фундаментальні етапи:

1. Оцінка параметрів моделі. Цей етап виконується з використанням історичних даних щодо ціни базового активу.
2. Симуляція теоретичних майбутніх шляхів ціни базового активу. Цей етап виконується на базі припущень про динаміку ціни базового активу та оцінених на першому етапі параметрів моделі.

Для проведення подальшого аналізу необхідно встановити та активувати у програмному забезпеченні R пакети «quantmod» та «tseries». Ці пакети дозволяють зручно працювати з часовими рядами. (Документація – джерела [27, 28].)

Для оцінки параметрів моделі потрібно спочатку підготувати дані. Для оцінки валютного опціону потрібно імпортувати історичні дані щодо курсу, безризикову відсоткову ставку національної валюти та безризикову ставку іноземної валюти, що є базовим активом опціону. Дані необхідно очистити від пропущених значень. Ці та подальші команди є лише прикладом вирішення локальних завдань аналізу:

```
S <- getSymbols("UAH=X", src = "yahoo", from = "2016-01-01",
               to = "2020-03-01", env = NULL)
S <- S[,4]
S <- na.omit(S)
rf_d <- 0
rf_f <- 0
rf = rf_d-rf_f
```

Необхідно порахувати логарифмічну дохідність курсу, графічно та за допомогою тесту Дікі-Фуллера дослідити її на стаціонарність:

```
ret <- diff(log(S))[2:length(S)]
plot(ret)
adf.test(ret)
```

Далі для подальшої зручності потрібно описати функцію, яка на основі вхідних даних (ряду дохідності, безризикової ставки та параметрів моделі) обчислюватиме ряд змінної варіації відповідно до моделі Дуана:

```
garch.filter_curr <- function(a0, a1, b1, l, ret, rf_d, rf_f) {
  iT <- length(ret)
  sigma_2 <- rep(NA, iT)
  rf <- rf_d - rf_f
  for (i in 1:length(ret)){
    if (i==1) {
      sigma_2[i] = var(ret)
    }
    else {
      sigma_2[i] = a0 + a1*(ret[i-1] - rf + .5*sigma_2[i-1]
                        - l*sqrt(sigma_2[i-1]))^2 +
b1*sigma_2[i-1]
    }
  }
  return(sigma_2)
}
```

Параметри моделі оцінюються методом MLE (Maximum Likelihood Estimation). Використання цього методу передбачає максимізацію функції одночасної вірогідності виникнення даних. Це є аналогічним максимізації суми логарифмів індивідуальних вірогідностей виникнення даних. За Дуаном, припускається, що інновації моделі є нормально розподіленими та їх можна виразити з моделі:

$$\begin{aligned}\xi_t &\sim N(0, \sigma^2); \\ \xi_t &= \ln \frac{X_t}{X_{t-1}} - rf + 0.5\sigma^2\end{aligned}\tag{2.5}$$

Тоді, якщо використати функцію щільності нормального розподілу до інновацій моделі та прологарифмувати її, величину, яку потрібно максимізувати для визначення параметрів моделі, можна записати так:

$$\sum \ln \frac{1}{2\pi\sigma_t^2} - 0.5 \frac{\xi_t^2}{\sigma_t^2} \quad (2.6)$$

де σ_t^2 – варіація, оцінена за моделлю Дуана.

У програмному забезпеченні R для обрахунку значення (2.6) необхідно описати, формулу. Ця формула посилається на раніше описану формулу, що обраховує змінну варіацію, а вхідні дані є ідентичними:

```
garch.LL_curr <- function (param, retu = ret, rf_d, rf_f) {
  a0 <- param[1]
  a1 <- param[2]
  b1 <- param[3]
  l <- param[4]
  rf <- rf_d - rf_f
  LL = rep(NA, length(retu))
  e = rep(NA, length(retu))
  sigma_2 <- garch.filter_curr(a0, a1, b1, l,
                              retu, rf_d, rf_f)
  for (i in 1:length(sigma_2)) {
    e[i] <- retu[i] - rf + .5*sigma_2[i]
    LL[i] <- log(1/sqrt(2*pi*sigma_2[i]))
    - 1/2*(e[i]^2/sigma_2[i])
  }
  Like <- sum(LL)
  return(-Like)
}
```

Для максимізації (2.6) можна скористатись вбудованою функцією нелінійної оптимізації. Вона мінімізує значення функції, тому функція, що повертає лог-вірогідність, робить це у від'ємному вигляді. Також для оптимізації необхідно вказати вектор початкових значень параметрів. У нашому випадку це будуть значення, отримані Дуаном у його роботі:


```
param <- c(0.00015, 0.1883, 0.8, 0.05)
res <- optim(param, garch.LL)
```

У результаті програма починає ітеративно підбирати значення параметрів так, щоб максимізувати цільову функцію (у цьому випадку, функцію лог-вірогідності).

Після завершення оцінки, якщо було знайдено стабільний оптимум, можна дізнатись оцінені параметри моделі та розрахувати довгострокову стаціонарну волатильність за моделлю:

```
coef <- res$par
a0 <- coef[1]
a1 <- coef[2]
b1 <- coef[3]
l <- coef[4]

sigma_lr <- sqrt(a0/(1 - a1*(1+l^2) - b1))*sqrt(365)
```

Одним із варіантів використання стаціонарної волатильності GARCH може бути її використання у контексті моделі Блека-Шоулза замість історичної волатильності. Дослідження Сімона Камінського свідчить про те, що такий метод може давати кращі результати, ніж модель Блека-Шоулза з історичною волатильністю [29].

Після оцінки параметрів моделі можна переходити до симуляції майбутньої динаміки базового активу та визначення вартості опціону. Для цього потрібно задати значення усіх необхідних змінних: ціна базового активу на дату оцінки, безризикова ставка дохідності, час до виконання опціону, ціна виконання, бажана кількість симуляцій. Варто пересвідчитись, що модель перетворює річні ставки на денні:

```

S_0 <- 26.6193
K <- 23.4221
t <- 120
arf_d <- 0
arf_f <- 0
arf <- arf_d - arf_f
rf_d <- (1+arf_d)^(1/365)-1
rf_f <- (1+arf_f)^(1/365)-1
rf <- rf_d - rf_f
nsim = 100000

```

Далі необхідно вказати оцінені раніше параметри моделі та стаціонарну волатильність:

```

a0 <- 2.1244e-06
a1 <- 0.0868
b1 <- 0.8566
l <- -0.2386

h0 <- a0/(1 - a1*(1+l^2) - b1)

```

Початковим значенням волатильності для симуляції можна брати стаціонарну волатильність або значення, що є більшими чи меншими за неї. Вплив різних початкових значень волатильності описано Дуаном. Для початку симуляції потрібно встановити початкові значення усіх необхідних змінних:

```

ret <- zt <- et <- ht <- S <- matrix(NA, nc=t+1, nr=nsim)
ht[,1] <- h0
S[,1] <- S_0
zt[,1] <- rnorm(nsim)
et[,1] <- zt[,1]*sqrt(ht[,1])

```

Далі описується процес, який симулює програма. Цим процесом є класична модель Дуана. Таким чином, команди для Монте Карло симуляції виглядають так:

```

for (i in 1:t){
  ht[,i+1] <- a0 + a1*(et[,i] - 1*sqrt(ht[i]))^2 + b1*ht[,i]
  zt[,i+1] <- rnorm(nsim)
  et[,i+1] <- zt[,i+1]*sqrt(ht[,i+1])
  ret[,i+1] <- rf - 0.5*ht[,i+1] + et[,i+1]
  S[,i+1] <- S[,i]*exp(ret[,i+1])
}

```

Результатом симуляції є визначена кількість шляхів базового активу. Для того, щоб дізнатись вартість опціону, необхідно обрахувати виплати по кожному зі сценаріїв, знайти середнє та дисконтувати. Для опціону «колл»:

```

payoff <- pmax(S[,ncol(S)]-K,0)*exp(-rf*t)]
Price <- mean(payoff)

```

Для опціону, що вбудований в облігації з індексованою вартістю:

```

MonAve <- matrix(NA,nrow = 1, ncol = nsim)
for(j in 1:nsim){
  MonAve[j] = mean(tail(S[j,]),30)
}
payoff <- pmax(MonAve-K,0)*exp(-rf_d*t)
Price <- mean(payoff)

```

Шляхом введення у програмному забезпеченні R команд, описаних раніше, з відповідними вхідними даними оцінюється опціон за моделлю Дуана. Наступним кроком є тестування моделі на даних, перевірка точності оцінок за моделлю та дослідження її характеристик.

Оскільки основною причиною розробки такої моделі є намагання уникнути помилок в оцінці, що виникають при використанні моделі Блека-Шоулза, а саме неможливість врахування «посмішки волатильності», важливим є протестувати наскільки розроблена модель відображає волатильність, що вбудована у вартість опціонів на ринку.

Одними із найбільш ліквідних є опціони на валютну пару британський фунт – долар США. Модель Дуана спочатку було оцінено для оцінки саме цього опціону, зважаючи на можливість порівняти результати оцінки зі спостережуваними цінами на опціони на ринку. Отримані параметри моделі відображено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Оцінені параметри моделі Дуана для валютної пари GBP/USD

Коефіцієнт	α_0	α_1	β_1	λ
Значення	$4.4278 \cdot 10^{-6}$	0.1449	0.7429	-0.1547

Параметри моделі було оцінено на даних щодо дохідності британського фунта до долара США за період з 1 січня 2016 р. по 28 лютого 2020 року.

На рис. 2.1. зображено графіки «посмішки волатильності», виведені з опціонів, що оцінені за моделлю Дуана.

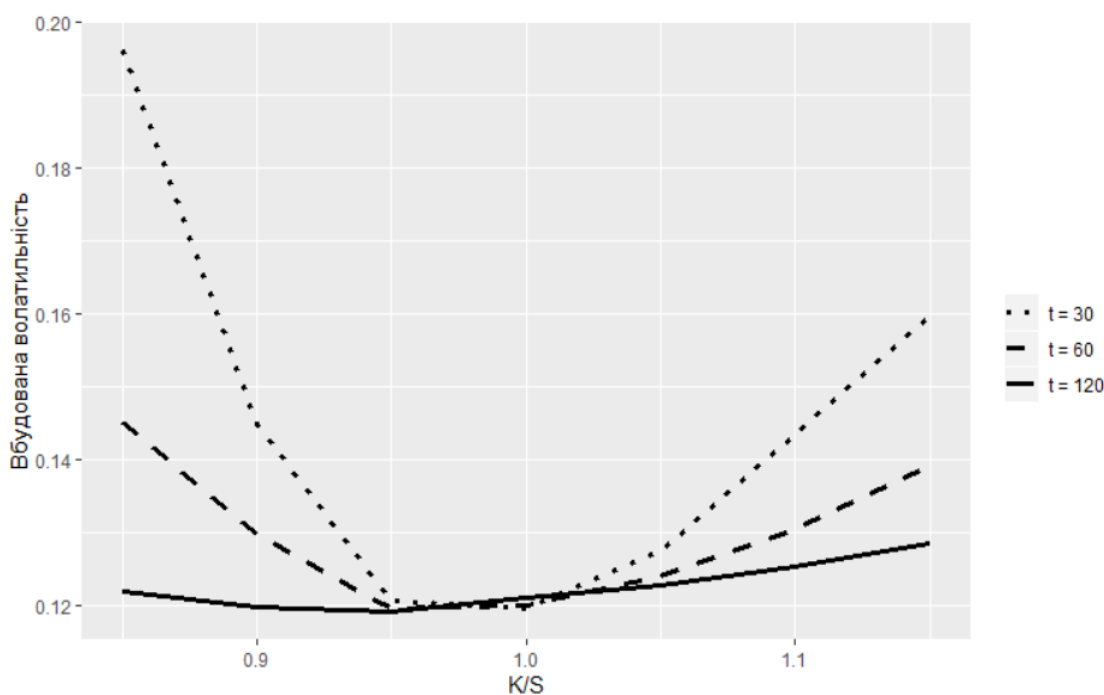


Рис. 2.1. Графік «посмішки волатильності» за оціненою моделлю Дуана для валютної пари GBP/USD та різних часових горизонтів (t)

Для цього було оцінено гіпотетичні опціони з різним рівнем відношення ціни виконання до сьогоднішньої ціни базового активу (K/S) та методом підбору визначено, яким вбудованим значенням волатильності за моделлю Блека-Шоулза відповідають оцінені вартості опціонів. Для кожної оцінки було використано 500000 Монте Карло симуляцій. Описану процедуру було проведено для опціонів з різним строком до виконання.

З рис. 2.1. видно, що як і для цін опціонів, отриманих з фінансових ринків, для оцінок моделі характерним є збільшення вбудованої волатильності з віддаленням відношення K/S від одиниці. На рисунку зображені «посмішки волатильності» для опціонів зі строком до виконання у 30, 60 та 120 днів. Як і для історичних «посмішок волатильності», зі збільшенням строку до виконання «посмішка» стає менш вираженою. У контексті GARCH моделі це можна пояснити тим, що умовна волатильність зі зростанням прогнозного горизонту більше наближається до стаціонарної волатильності.

Далі важливим є порівняти «посмішку волатильності», що є оціненою за моделлю з «посмішкою волатильності», що спостерігається на ринку. Для цього було оцінено іншу модель Дуана, яка побудована на даних, спостережуваних на ринку. Часовий проміжок для оцінки – з 1 січня 2018 р. по 28 лютого 2020 р. Безризикова ставка у доларі США становила 1.45%, у британському фунті – 0.91% (Джерело: [30, 31]) Аналіз проводився на 28 лютого 2020 р, строк до виконання опціону «колл» - 28 днів. Результати зображено на рис. 2.2.

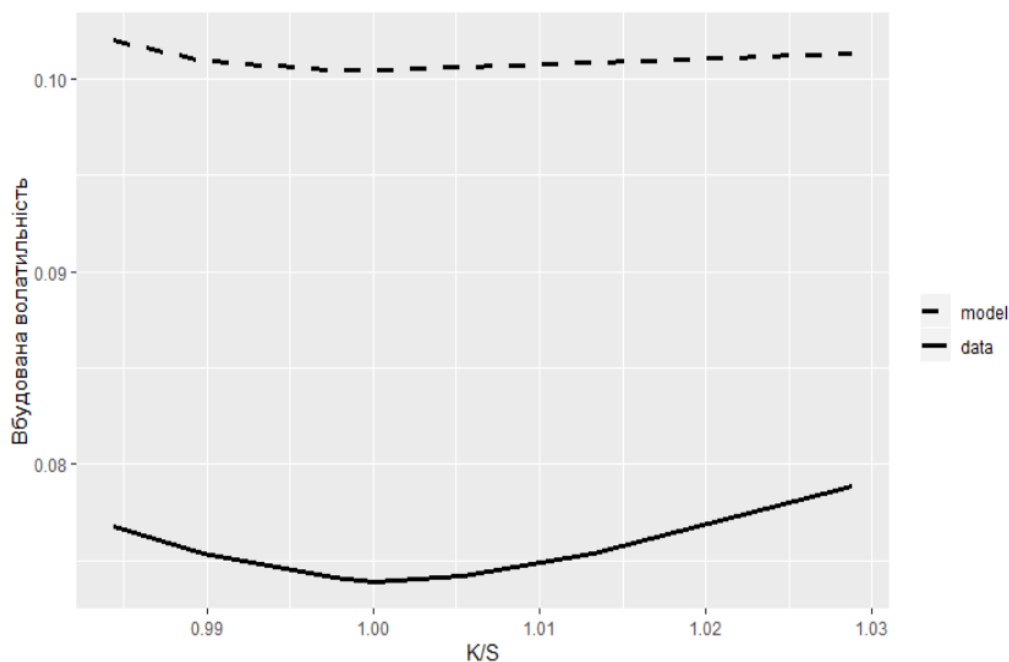


Рис. 2.2. Порівняння історичної «посмішки волатильності» зі змодельованою.

Джерело: аналіз автора; платформа Sentry Derivatives.

На рисунку можна побачити, що оцінки моделі є зміщеними у більшу сторону відносно історичних даних. Також історична «посмішка волатильності» є більш увігнутою. Причиною цього є те, що волатильності, вбудовані у ринкові ціни на опціони відображають ринкові очікування щодо волатильності базового активу у майбутньому, тоді як модель є побудованою на минулих даних, які можуть бути не актуальними для поточного стану ринку. У той же час, при зменшенні вибірки буде спостерігатись зниження точності оцінки коефіцієнтів.

Не зважаючи на зміщеність оцінених значень волатильності порівняно з історичними, модель частково відображає залежність вбудованої волатильності від відношення ціни виконання до ціни базового активу на дату оцінки. Важливим є зазначити, що історична річна волатильність, обчислена на даних, на яких побудовано модель становить 10%. Її використання у контексті моделі Блека-Шоулза може незначно зменшити помилку при оцінці опціону, проте така модель буде мати значні помилки при застосуванні її до опціонів з вкрай низьким чи великим значенням K/S .

Після того як модель протестовано на даних щодо опціонів, які торгуються на фінансових ринках, можна приступити до її тестування та використання для оцінки опціонів, які є вбудованими у облігації з індексованою вартістю. Це є опціон «колл», у якому ціна базового активу на момент виконання дорівнює середньому за місяць значенню курсу гривні до долара США. Такий опціон не торгується окремо на фінансових ринках. Також, індексовані облігації не є ліквідними на ринках. Тому з них неможливо дізнатись ринкову ціну опціону, відділивши з інструмента звичайну купонну облігацію.

Використання моделі Блека-Шоулза для оцінки таких опціонів вимагає зробити припущення, що середньомісячний курс володіє схожими статистичними характеристиками, що і звичайний ряд курсу. Це відбувається тому, що у контексті моделі Блека-Шоулза, по суті, базовим активом такого опціону є не долар США, а середньомісячна вартість долара США, виражена у гривні.

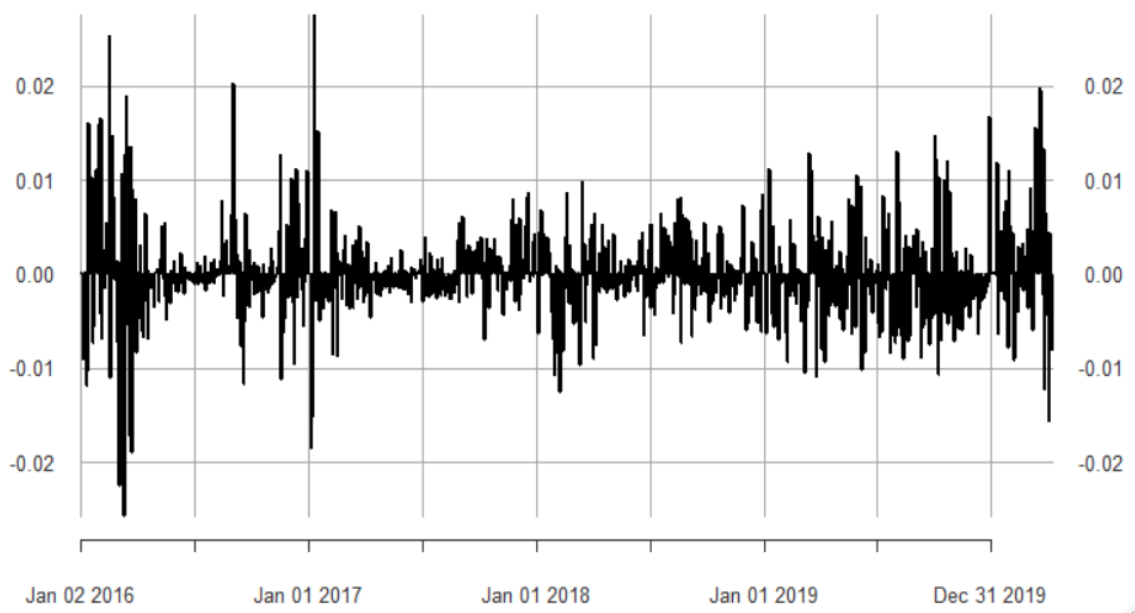


Рис. 2.3. Історична дохідність офіційного курсу НБУ валютної пари USD/UAH за період з 01.01.2016 р. по 28.02.2020 р.

Джерело: складено автором на основі джерела [32]

Перед побудовою та використанням будь-якої моделі необхідно дослідити ряди даних, на яких будуть оцінюватись параметри моделі. На рис. 2.3. зображено ряд дохідності курсу долара США, вираженого в українській гривні.

З рис. 2.3. видно, волатильність курсу не була стабільною у досліджуваний період. Можна чітко побачити період високої волатильності у першому півріччі 2016 р. та період низької волатильності у середині 2017 року.

Головним фактором, що впливає на волатильність курсу є зміна режиму курсоутворення. У грудні 2016 р. Рада НБУ офіційно підтвердила застосування монетарного режиму інфляційного таргетування в Україні, і як результат перехід до ринкового курсоутворення. Цьому передували три етапи підготовки, що почались до 2015 р. Можна зробити висновок, що період до повного впровадження режиму інфляційного таргетування не варто брати до уваги при оцінці параметрів моделі, оскільки це буде зміщувати оцінки, через що вони втратять здатність описувати актуальний стан ринку.

Також історично на курс української гривні впливають такі показники як: експортна виручка (на яку впливають ціни на міжнародних сировинних ринках), участь нерезидентів на українському ринку цінних паперів та внутрішній попит на іноземну валюту. Тож для моделювання оптимальним є брати до уваги історичний період, на якому перераховані фактори не змінювались різко, також цей період має включати найактуальніші дані (тобто, кінцем такого періоду буде дата аналізу).

Таким чином, модель було оцінено на трьох часових проміжках, які вказано у табл. 2.2. Кожен ряд дохідності було протестовано за допомогою розширеного тесту Дікі-Фулера, р-значення тесту наведено у таблиці (нуль-гіпотеза – нестационарність ряду). У таблиці вказано оцінені параметри моделі та стаціонарну волатильність моделі.

Таблиця 2.2

Результати оцінки моделі Дуана на різних часових проміжках

Період оцінки	ADF p-value	α_0	α_1	β_1	λ	Стаціонарна волатильність
01.01.2017 - 28.02.2020	0.01	$1.3516 \cdot 10^{-7}$	0.0712	0.9080	0.3620	6.56%
01.01.2018 - 28.02.2020	0.01	$7.2164 \cdot 10^{-7}$	0.0712	0.8660	0.3040	6.78%
01.01.2019 - 28.02.2020	0.01	$1.9619 \cdot 10^{-5}$	0.0589	-0.4393	-1.6278	7.64%

З табл. 2.2. видно, що при оцінці починаючи з 2017 р. та оцінці з 2018 р. параметри моделі та стаціонарна волатильність змінюються незначно. Проте, параметри моделі та стаціонарна волатильність, оцінені починаючи з 2019 р. значно відрізняються від параметрів, оцінених на інших проміжках, при цьому декілька параметрів стають від'ємними. Така зміна може бути спричинена фундаментальним фактором посилення іноземного попиту на український борг у національній валюті.

Важливим є оцінити роботу моделі на даних кризового періоду. Остання криза, що мала сильний ефект курс гривні – це криза 2013-2015 рр. Динаміку курсу долара США в період з середини 2013 р. по середину 2016 р. можна побачити на рис. 2.4.

З рисунку можна побачити, що вартість долара США у гривні зросла у близько 5 разів. Також у цей період спостерігався високий рівень волатильності, що є характерним для шоків періодів.

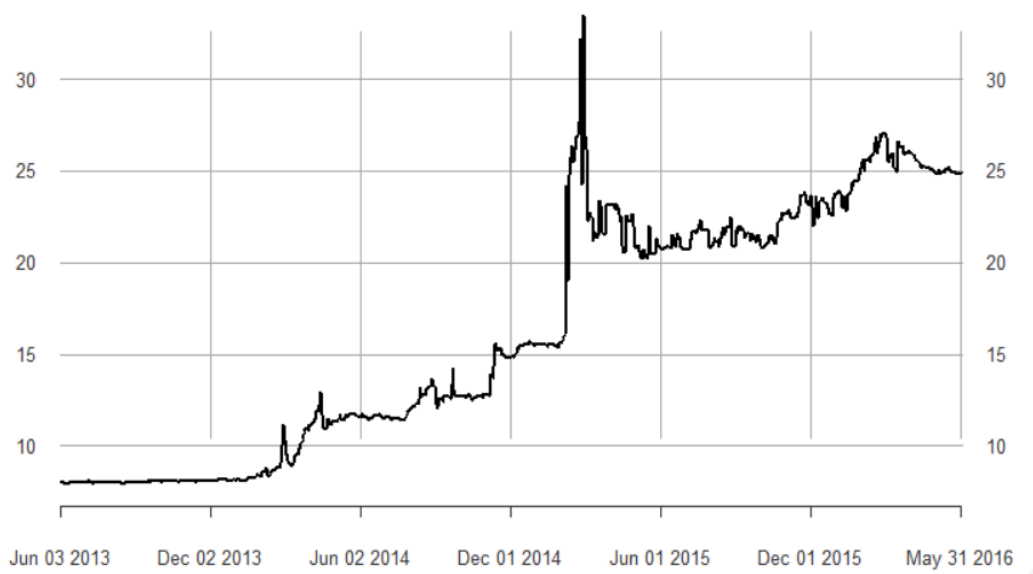


Рис. 2.4. Динаміка курсу USD/UAH у період кризи 2013-2015 рр.

На рис. 2. 5. Зображено динаміку дохідності курсу USD/UAH у період з середини 2013 р. по середину 2015 р. Можна побачити як часто змінювалась волатильність у цей період.

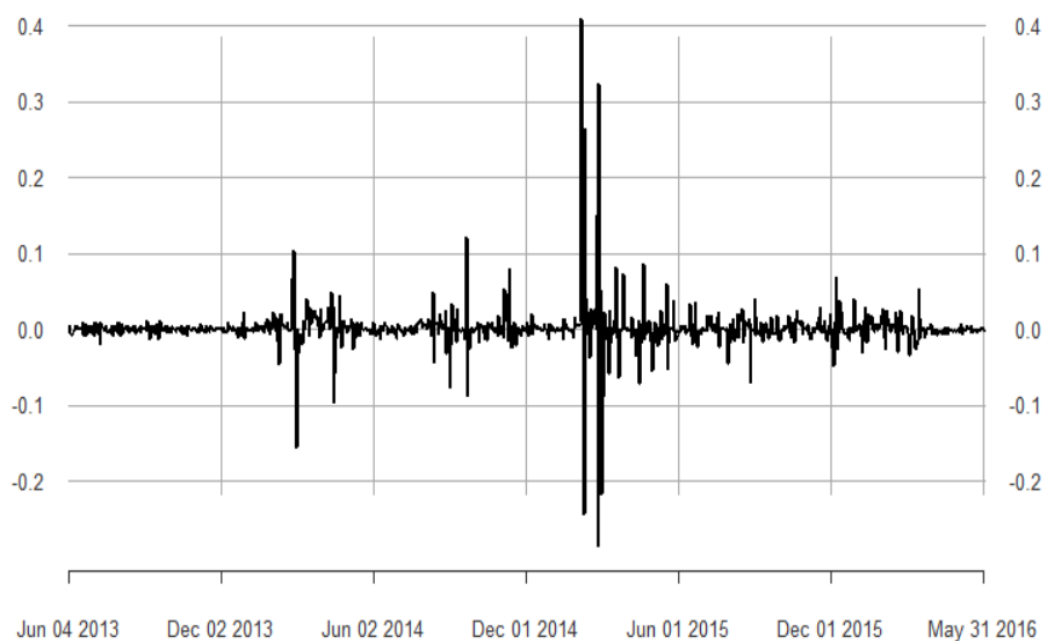


Рис. 2.5. Динаміка дохідності курсу USD/UAH у період кризи 2013-2015 рр.

Застосування розширеного тесту Дікі-Фулера до даних з рисунку 2.5. показало, що часовий ряд є стаціонарним із рівнем надійності 99%. Результати оцінки параметрів моделі Дуана зображено у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Результати оцінки моделі Дуана на кризовому періоді даних

Період оцінки	ADF p-value	α_0	α_1	β_1	λ	Стаціонарна волатильність
01.06.2013 - 01.06.2016	0.01	$1.0599 \cdot 10^{-5}$	0.6801	0.4482	-0.6350	-

З таблиці видно, що коефіцієнти, оцінені на кризовому проміжку даних значно відрізняються від тих, що наведено у табл. 2.2. Можна помітити більший вплив ARCH-компонента на змінну дисперсію, що є нетиповим для даного типу моделі. Але така модель не може бути використана для аналізу для оцінки, оскільки вона не є стаціонарною за умовою, описаною у роботі Дуана:

$$|\alpha_1(1 + \lambda^2) + \beta_1| \leq 1 \quad (2.7)$$

Значення (2.7) для оціненої моделі дорівнює 1.4, що не задовольняє нерівність. Тобто, модель, оцінена на кризовому періоді є нестаціонарною. Таким чином, оцінену на некризовому періоді даних стаціонарну модель недоцільно буде використовувати під час оцінки опціонів у кризовий період.

Для подальшого тестування коефіцієнтів моделі було обрано модель, оцінену починаючи з 1 січня 2017 р. На основі цієї моделі було оцінено інші 23 моделі, для оцінки яких по чергові з бази видалялись дані першого тижня. Таким чином, моделі було оцінено на часових проміжках, що зазначено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Діапазони даних для оцінки тестових моделей

Номер моделі	Початок діапазону даних	Кінець діапазону даних
1	1/1/2017	2/28/2029
2	1/8/2017	2/28/2029
3	1/15/2017	2/28/2029
4	1/22/2017	2/28/2029
...	...	2/28/2029
24	6/11/2017	2/28/2029

У результаті оцінки тестових моделей отримано 24 набори коефіцієнтів. Ці коефіцієнти можна проаналізувати, для того, щоб упевнитись що вони є стабільними та не мають високої варіації в залежності від часового періоду, на якому була оцінена модель. Усі тестові моделі є стаціонарними за умовою (2.7) На рис. 2.6. можна побачити коефіцієнти моделей.

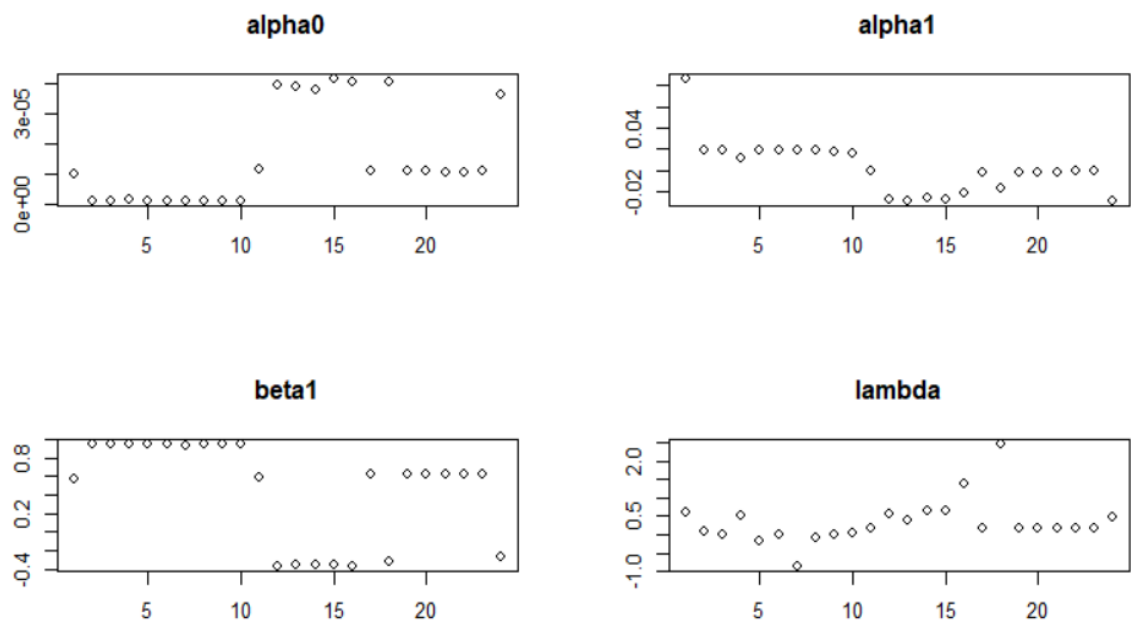


Рис. 2.6. Оцінені коефіцієнти тестових моделей.

З рисунка можна побачити три кластери коефіцієнтів, що змінюють один одного у залежності від часових проміжків, проте випадкової варіації

коефіцієнтів не спостерігається. Деякі відхилення можуть виникати як результат того, що ітеративний алгоритм оцінки коефіцієнтів досяг максимальної кількості ітерацій.

Важливим є також дослідити довгострокову стаціонарну волатильність, яка виводиться з параметрів, оскільки дослідивши її можна побачити чи варіація параметрів свідчить про фундаментальні зміни у результатах моделювання у результаті зміни часових проміжків. Гістограму рівноважних волатильностей (у річному вимірі) зображено на рис. 2.7.

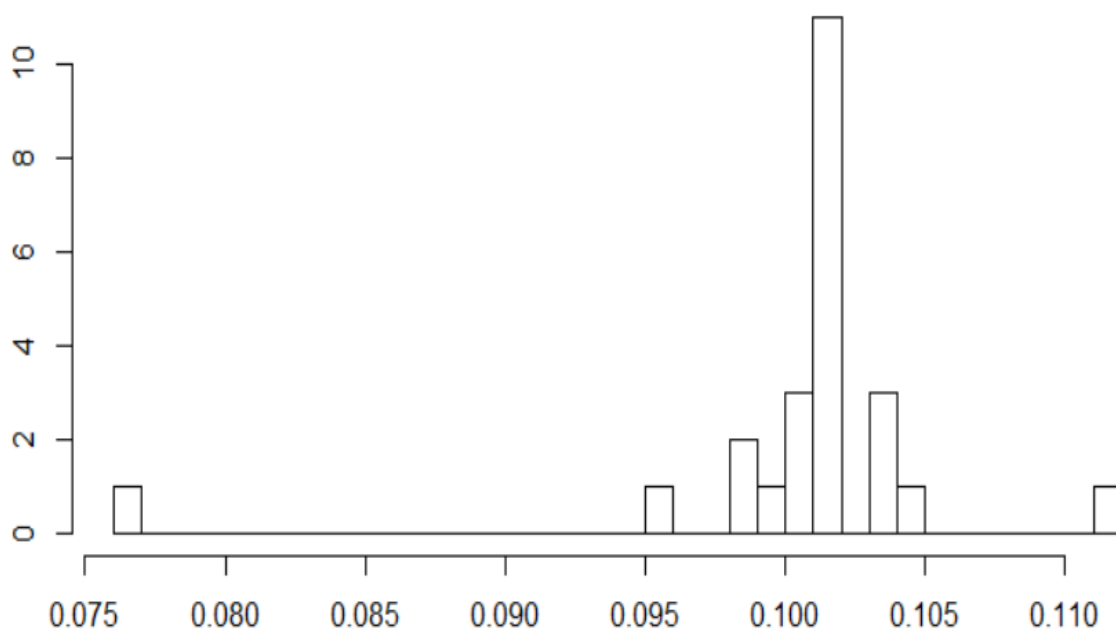


Рис. 2.7. Гістограма значень рівноважної волатильності тестових моделей

З гістограми можна побачити, що більшість значень рівноважної волатильності тестових моделей лежать на проміжку (9.5%;10.5%) із помітною модою 10.13% та близьким до неї середнім значенням. Стандартне відхилення значень рівноважної волатильності дорівнює 0.58%, що є вкрай малим. Деякі відхилення можуть виникати як результат того, що ітеративний алгоритм оцінки коефіцієнтів досяг максимальної кількості ітерацій, не досягши оптимальних

параметрів. Таким чином, можна сказати що коефіцієнти моделі є стабільними по своїй суті.

Після тестування можна застосувати модель, що оцінена на даних з 28 лютого 2017 р. по 28 лютого 2020 р. до оцінки опціонів, що вбудовані у облигації з індексованою вартістю. Далі наведено вхідні дані та результати оцінки опціонів, що вбудовані у три облигації з індексованою вартістю.

Таблиця 2.5

Вхідні дані для оцінки вбудованих опціонів [28, 29]

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S_BS	24.5978	24.5978	24.5978
S_Duan	24.5610	24.5610	24.5610
K	7.9987	24.8184	23.4221
sigma	0.1832	0.1832	0.1832
rUAH	9.71%	9.86%	9.99%
rUSD	0.91%	0.85%	0.94%
T	1.5068	3.3370	5.6767

Для розрахунку вартості вбудованих опціонів методом Дуана було використано 300 тисяч Монте Карло симуляцій для кожного опціону.

Таблиця 2.6

Результати оцінки вбудованих опціонів

ISIN	Розрахунок НБУ	Власний розрахунок за БШ	Модель Дуана
UA4000129241	2156.12	2156.12	2138.48
UA4000195150	262.17	262.17	230.62
UA4000192710	429.08	429.08	400.89

У результаті, стандартне відхилення значень, розрахованих за Монте Карло симуляціями, є меншим за 5%.

З таблиць видно, що результати власного розрахунку методом Блека-Шоулза збігаються з результатами оцінки НБУ. Оцінки за моделлю Дуана при цьому відрізняються від значень, оцінених моделлю Блека-Шоулза у сторону зменшення. Причиною цього може бути той факт, що рівноважна волатильність за Дуном є нижчою за історичне значення, що використовується у моделі Блека-Шоулза. Підтвердженням цього можуть слугувати коефіцієнти вега, розраховані у розділі 3. Вищим коефіцієнтам вега відповідають більші відсоткові відхилення вартості від моделі Блека-Шоулза.

Для порівняння на однаковому базисі було розраховано вартості за моделлю Блека-Шоулза з використанням історичної волатильності за останні три роки. Вони становлять 2156.11 грн, 234.81 грн та 415.42 грн.

2.3. Побудова та використання програмного забезпечення для оцінки вартості вбудованих опціонів.

Побудова та використання моделі Дуана потребує значних затрат часу та навичок обробки фінансових часових рядів для успішного використання. При цьому, у оцінці та аналізі ризику опціонів частими є випадки коли досягти результату потрібно якнайшвидше та якнайпростіше. Це породжує потребу в розробці програмного забезпечення з функціоналом оцінки опціонних контрактів методом Дуана, що буде зручно використовувати у повсякденній роботі торговому підрозділу фінансової установи.

Основними вимогами до програмного забезпечення було визначено:

1. Оцінка опціонних контрактів за моделлю Дуана.
2. Порівняння оцінок з моделлю Блека-Шоулза.
3. Широкий спектр опціонів, до яких можливе застосування.
4. Зручність у користуванні.
5. Можливість аналізу ризиків.

З огляду на вимоги до програмного забезпечення, було обрано використати мову програмування R, що є загально доступним програмним забезпеченням. На базі R було використано бібліотеку “shiny”, що дозволяє будувати повнофункціональні додатки з можливістю програмування графічного інтерфейсу [33].

Механізм роботи додатку зображено на рис. 2.8. У роботі беруть участь три файли:

- ui.R – відповідає за графічний інтерфейс, з яким взаємодіє користувач;
- server.R – відповідає за обчислення та перетворення даних, які задає користувач;
- func.R – зберігає функції, на які покликається server.R при обчисленнях.

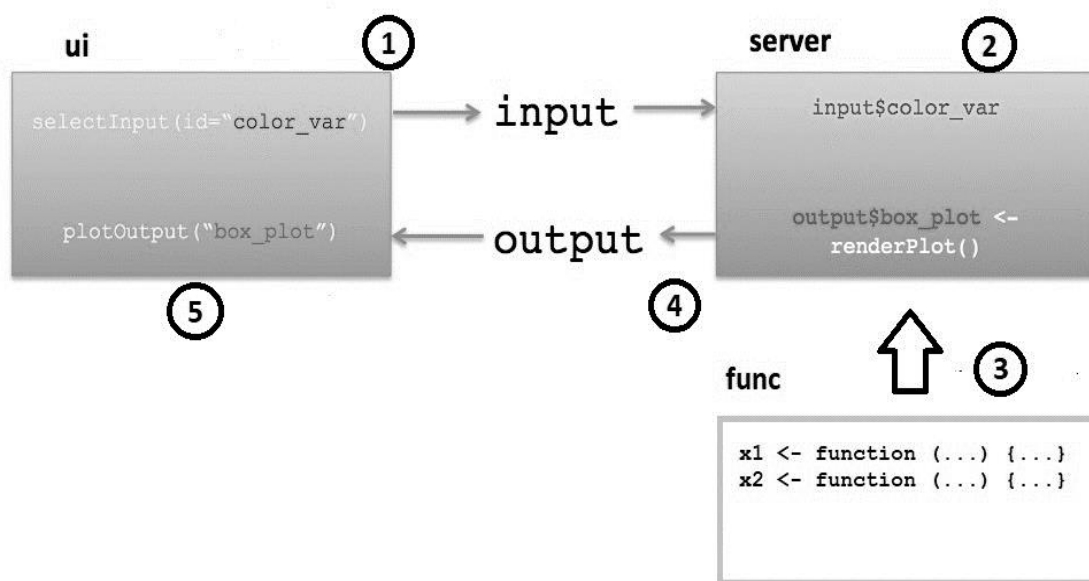


Рис. 2.8. Ілюстративна схема механізму роботи shiny-додатку.

На рис. 2.8. цифрами позначено такі кроки:

1. Графічний інтерфейс приймає дані від користувача та через змінну input передає їх до серверу.
2. Сервер зчитує змінну input.
3. Сервер зчитує функції для подальшої обробки даних.

4. Сервер обробляє дані та передає результати у графічний інтерфейс через змінну output.
5. Графічний інтерфейс зчитує змінну output та відображає результати користувачу.

Логіка роботи ключових функцій додатку пояснена у попередньому підрозділі. Повний програмний код наведено у Додатку 1.

Принципи роботи з додатком можна проілюструвати на прикладі оцінки вбудованого опціону у облігацію з індексованою вартістю UA4000129241. Спочатку необхідно за допомогою R та бібліотеки “shiny” запустити додаток, що відкривається під назвою “Option pricing with GARCH”.

Додаток виконує як оцінку параметрів моделі, так і Монте Карло симуляції, тому має два відповідні інтерфейси, зображені на рис. 2.9. За замовчуванням спочатку відкривається інтерфейс оцінки параметрів.

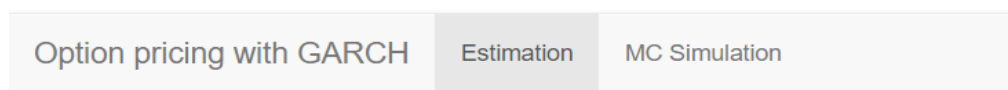


Рис. 2.9. Вибір інтерфейсу додатку.

Інтерфейс оцінки параметрів спочатку отримує часові ряди базового активу, а потім на їх основі оцінює параметри моделі. Передбачено два джерела даних у додатку: сервіс “Yahoo!Finance” та власні дані у форматі .csv. У відповідному полі необхідно вказати бажане джерело.

The image shows a web form with a light gray background. It contains several sections with bold labels and radio button options. The first section, 'Select data source', has two options: 'Yahoo!Finance' (selected) and 'Upload .csv'. The second section, 'Underlying asset', has two options: 'Stock' and 'Currency' (selected). Below these are three text input fields: 'Please enter the ticker of the asset' with the value 'UAH=X', 'Please specify start date for data load' with the value '2019-03-01', and 'Please specify end date for data load' with the value '2020-03-01'. At the bottom is a button labeled 'Get the data!'.

Select data source

☒ Yahoo!Finance
☐ Upload .csv

Underlying asset

☐ Stock
☒ Currency

Please enter the ticker of the asset

UAH=X

Please specify start date for data load

2019-03-01

Please specify end date for data load

2020-03-01

Get the data!

Рис. 2.10. Вибір джерела даних для аналізу “Yahoo!Finance”.

При виборі “Yahoo!Finance” програма потребує введення біржового тікеру базового активу. Для валютного курсу USD/UAH це “UAH=X”, як зображено на рис. 2.10. Також необхідно вказати часовий діапазон даних для загрузки.

При виборі власних даних, необхідно вказати шлях до файлу з даними. Файл має містити колонку дати у форматі “%d.%m.%Y”. Після цього, для загрузки даних до додатку необхідно натиснути на кнопку “Get the data!” Результат введення офіційних даних НБУ щодо курсу долара США зображено на рис. 2.11.

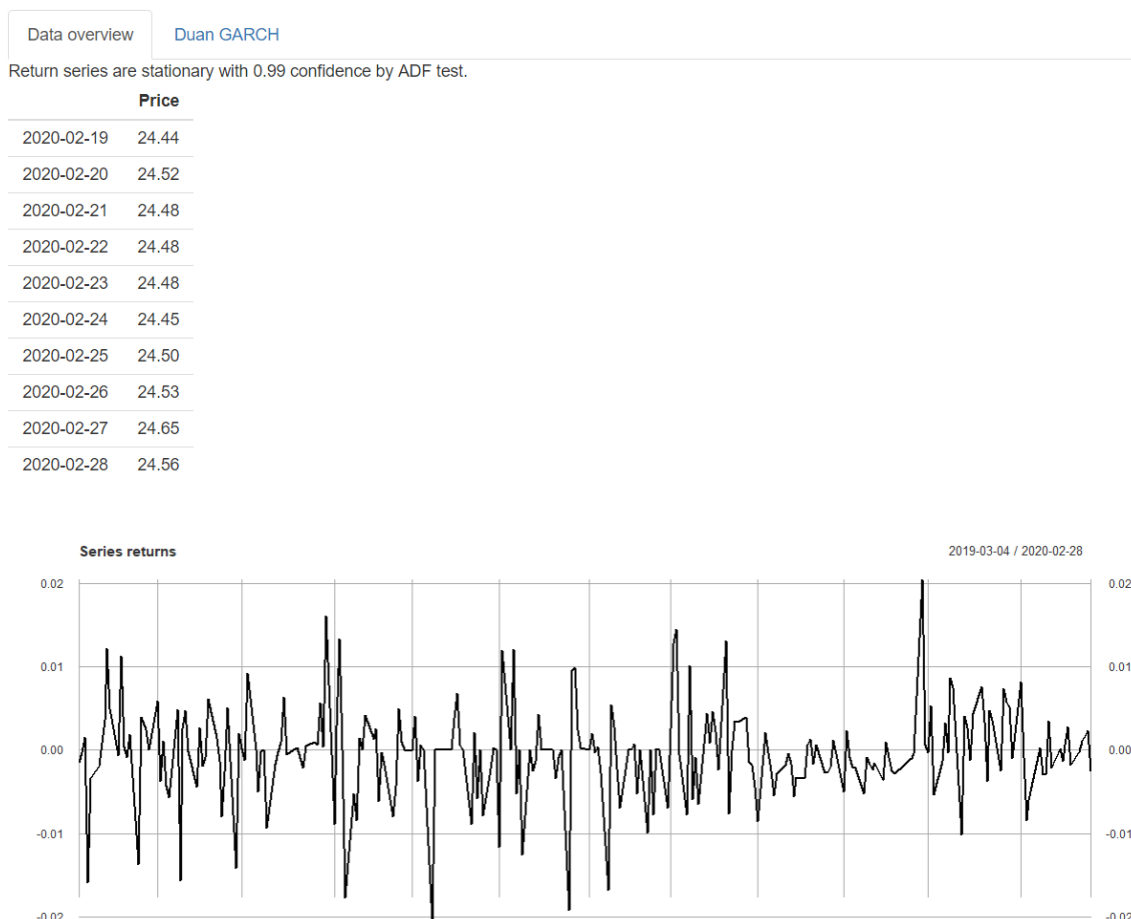


Рис. 2.11. Відображення даних у додатку.

Дані відображаються на вкладці “Data overview”. Найпершим відображається повідомлення щодо стаціонарності ряду дохідності. Далі подається таблиця з десятима найпізнішими цінами базового активу з введених даних. Останнім відображається графік історичної дохідності базового активу.

Для того, щоб перейти до оцінки параметрів моделі, необхідно вказати тип базового активу. Для базового активу, що є акцією, необхідно задати безризикову ставку дохідності. Для валютного курсу необхідно вказати безризикові ставки обох валют. Щоб оцінити параметри, потрібно перейти до вкладки “Duan GARCH” та натиснути “Estimate Duan GARCH based on data”. Після деякого часу на екрані з’являється таблиця з коефіцієнтами моделі та інформацією про оцінку, як на рис. 2.12.

Data overview		Duan GARCH
omega	0.00000	
alpha	0.06293	
beta	0.93541	
lambda	0.06513	

Successful completion
Stationary annual GARCH sigma is 0.1277

Рис. 2.12. Результати оцінки параметрів моделі у додатку.

Повідомлення “Successful completion” свідчить про те, що алгоритм досягнув оптимальних значень коефіцієнтів. У протилежному разі з’являється повідомлення “Log-likelihood function is not converging”. Також відображається стаціонарна волатильність за моделлю у річному вимірі.

Для того, щоб перейти до Монте Карло симуляцій та власне оцінки опціону, необхідно перейти в інтерфейс “MC Simulation”. Цей інтерфейс є незалежним від інтерфейсу оцінки параметрів, хоч і може використовувати попередньо оцінені параметри. Тому необхідно ще раз вказати базовий актив. Також потрібно вказати тип опціону: “колл”, “пут”, чи опціон, вбудований в облігації з індексованою вартістю (що є специфічним різновидом азійського опціону). Приклад зображено на рис. 2.13.

The image shows a web-based form for inputting data for a Monte Carlo simulation. The form is organized into sections with labels and radio buttons for selection, followed by text input fields for numerical values.

- Underlying asset:** Two radio buttons are present. "Stock" is unselected, and "Currency" is selected (indicated by a filled circle).
- Option type:** Three radio buttons are present. "Call" and "Put" are unselected, and "Ukrainian embedded call" is selected.
- Today price of the asset:** A text input field containing the value "24.561".
- Strike price:** A text input field containing the value "7.9983".
- Domestic risk free rate:** A text input field containing the value "0.097092855".
- Foreign risk free rate:** A text input field containing the value "0.012056736".
- Days to maturity:** A text input field containing the value "550".

Рис. 2.13. Ввід даних для Монте Карло симуляції.

Після введення усіх необхідних вхідних даних для оцінки та натиснення на кнопку “Start simulation” додаток відображає оцінену вартість опціону, вартість за моделлю Блека-Шоулза та деякі з симульованих шляхів ціни базового активу. Результати оцінки вбудованого опціону показано на рис. 2.14. Ціна за моделлю Блека-Шоулза є не актуальною для цього типу опціону. Також необхідно зважати на те, що оцінка відбувається на базі поставки одиниці базового активу, тому потребує корекції на обсяг поставки конкретного опціону.

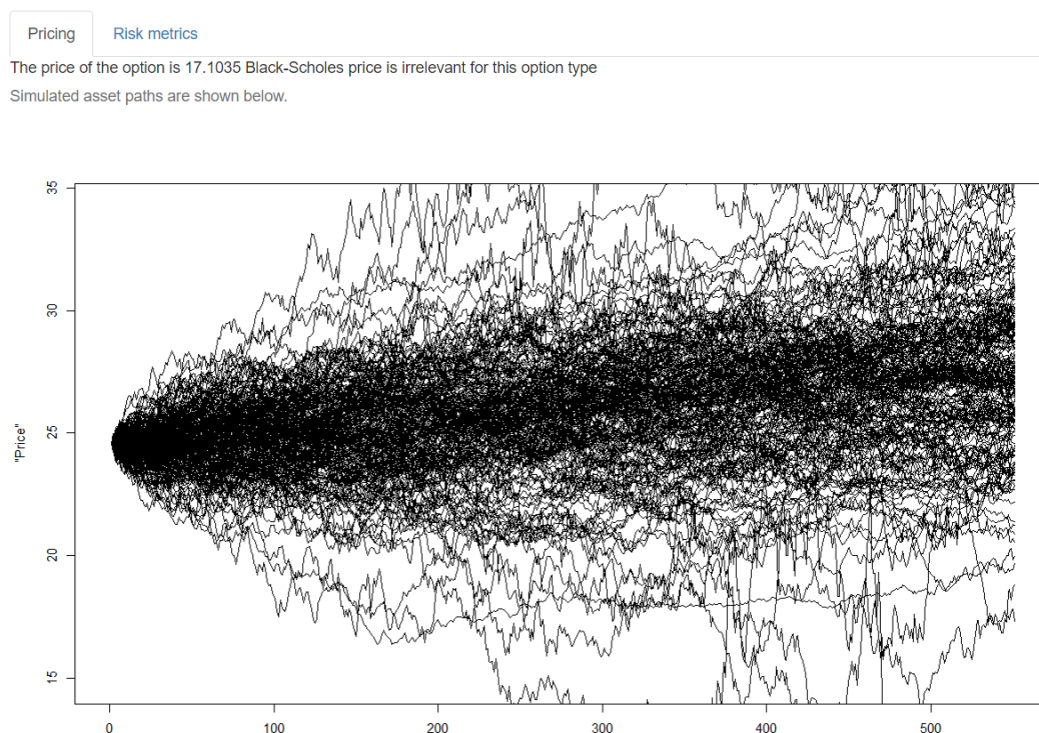


Рис. 2.14. Результат оцінки опціону в додатку.

Варто додати, що у додатку передбачена можливість оцінки у випадку, коли параметри моделі завчасно відомі. Для цього необхідно обрати “Own parameters” як джерело параметрів моделі. Приклад на рис. 2.15.

Parameters source:

☐ Previous estimation

☒ Own parameters

Omega

0.000015

Alpha

0.1883

Beta

0.7162

Lambda

0.007452

By default are given original Duan parameters.

Рис. 2.15. Введення власних параметрів моделі

Таким чином, використання інтерфейсу оцінки параметрів перед Монте Карло симуляціями не є обов'язковим.

Повний програмний код «Option pricing with GARCH» наведено у додатках А, Б та В.

Висновок до розділу 2.

Розглянуто історію розвитку моделей оцінки опціонів, наведено ключові моделі та їх вплив на функціонування ринку опціонних контрактів. Описано як найперші моделі, так і сучасні моделі, що мають за мету обійти обмеження моделі Блека-Шоулза.

Описано покроково практичну методологію оцінки опціонів за моделлю Дуана з використанням програмного забезпечення R. Наведено приклади програмного коду для вирішення ключових задач оцінки. Модель протестовано на даних опціонів, що активно торгуються на фінансових ринках. Визначено, що модель здатна враховувати «посмішку волатильності» – залежність вбудованої волатильності від ціни виконання. Оцінено модель Дуана для опціонів, вбудованих у облігації з індексованою вартістю, параметри моделі протестовано на стабільність. Визначено, що при оцінці на кризових періодах модель не відповідає вимозі стаціонарності. За допомогою моделі Дуана оцінено вбудовані опціони та порівняно з моделлю Блека-Шоулза.

Розроблено додаток, за допомогою якого можна зручно оцінити опціони методом Дуана у контексті фінансової організації, що тримає опціони або облігації з вбудованими опціонами. Додаток описано на прикладі використання для оцінки опціону, вбудованого у облігацію з індексованою вартістю.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІЗ РИЗИКУ ОПЦІОНІВ ВБУДОВАНИХ В ОБЛІГАЦІЇ З ІНДЕКСОВАНОЮ ВАРТІСТЮ

3.1. Аналіз грецьких літер вбудованих опціонів.

Основним інструментом для аналізу ризиків та хеджування опціонів є обчислення коефіцієнтів чутливості ціни опціону до основних показників, що впливають на його вартість. Ці коефіцієнти називають грецькими літерами, вони показують наскільки сильно зміниться ціна опціону у випадку мінімальної зміни параметру ціни базового активу (дельта), дельти (гамма), терміну до погашення (тета), волатильності (вега) та відсоткової ставки (ро).

Найбільш важливою складовою ціни опціону за будь-якою моделлю є ціна базового активу, саме від її динаміки залежить потенційна виплата по опціону. Чутливість вартості опціону до ціни базового активу вимірюється коефіцієнтом дельта. Коефіцієнт дельта можна розуміти як обсяг базового активу у портфелі, що складається з опціону і базового активу, необхідний для нейтралізації ризику. Тобто, той обсяг базового активу, за якого збитки за опціонним контрактом будуть компенсуватись прибутком за базовим активом, та навпаки.

Для неперервного випадку формула коефіцієнту дельта для європейського опціону «колл» запишеться:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \quad (3.1)$$

де c – вартість європейського опціону «колл»;

S – ціна базового активу;

$N(d_1)$ - компонент формули Блека-Шоулза.

З формули (3.1) видно, що дельта показує зміну вартості опціону при вкрай малій зміні ціни базового активу. Максимально можливим значенням коефіцієнту дельта є одиниця. Опціони “at the money”, у яких поточна вартість базового активу дорівнює

Коефіцієнт дельта широко використовується у хеджуванні опціонних контрактів. Наприклад, за наявності 100 опціонів «колл» з коефіцієнтом дельта, що дорівнює 0.5, придбання 50 одиниці базового активу убезпечить від втрат у ціні опціону при зменшенні вартості базового активу не невелику суму. Але, варто зазначити, що така стратегія також і нейтралізує можливий прибуток по опціону.

Оскільки для оцінки справедливої вартості вбудованих опціонів було використано дві моделі – Блека-Шоулза та Дуана, розрахунок грецьких літер необхідно провести за обидвома, щоб отримати якнайбільше інформації. Результат розрахунку грецьких літер для вбудованих опціонів методом Блека-Шоулза наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Результати розрахунків коефіцієнтів дельта для вбудованих опціонів за моделлю Блека-Шоулза.

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S	24.5978	24.5978	24.5978
K	7.9983	24.8184	23.4221
Коефіцієнт дельта	0.9820	0.8190	0.8756

З табл. 3.1 видно, що коефіцієнти дельта для вбудованих опціонів є досить високими, тобто затрати на хеджування ризику ціни базового активу також є значними. Також з таблиці видно, що зі зменшенням строку до погашення та збільшенням спреда між поточною ціною базового активу та ціною погашення, коефіцієнт дельта збільшується та прямує до одиниці, що є характерною особливістю цього коефіцієнту.

Важливо мати на увазі, що для розрахунку дельти вбудованого опціону за методом Блека-Шоулза, припускається, що базовим активом є середньомісячна ціна базового активу. Таким чином, практичного значення для хеджування така дельта не має, оскільки на ринку торгуються активи за поточною ціною, а не середньомісячною. Уникнути цього можна використавши модель Дуана для розрахунку дельти, оскільки входною у цю модель є поточна ціна базового активу.

Як і вартість опціону за методом Дуана, грецькі літери також обчислюються з використанням Монте Карло симуляцій. Розрахунок грецьких літер за методом Монте Карло відбувається за допомогою методу кінцевих різниць. Цей метод полягає у оцінці опціону симуляціями Монте Карло за умови незначних змін у параметрах, чутливість яких досліджується, та визначення впливу таких незначних змін на вартість опціону. Важливим у цьому підході є використання однакових значень випадкової величини, для запобігання варіації вартості опціону, не пов'язаної з досліджуваною чутливістю.

Для коефіцієнту дельта розрахунок можна представити таким чином [34, с. 84]:

$$\Delta = \frac{c(S_0 + \Delta S_0, T, r, \sigma) - c(S_0 - \Delta S_0, T, r, \sigma)}{2\Delta S_0}; \quad (3.2)$$

де c – функціональне вираження вартості опціону.

Аналогічним до формули (3.2) є розрахунок інших коефіцієнтів чутливості першого порядку (тета, ро). Коефіцієнти дельта для вбудованих опціонів, розраховані таким методом, подано у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

**Результати розрахунків коефіцієнтів дельта для вбудованих опціонів
за моделлю Дуана.**

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S	24.561	24.561	24.561
K	7.9983	24.8184	23.4221
Коефіцієнт дельта	0.9796	0.8919	0.9129

З таблиці видно, що значення, оцінені за моделлю Дуана, відрізняються від тих, що оцінені за моделлю Блека-Шоулза. Так, для одного вбудованого опціону дельта, розрахована за моделлю Дуана, є нижчою, для двох інших – вищою. Проте, загальна властивість збільшення дельти при збільшенні різниці між поточною ціною та ціною виконання зберігається. Коефіцієнти дельта, розраховані за допомогою такого підходу, можна використовувати на практиці при хеджуванні.

Іншим важливим компонентом, що впливає на вартість опціону є строк до погашення. З наближенням дати погашення опціони вартують менше, оскільки залишається все менше можливостей для зміни динаміки ціни базового активу в той чи той бік. Чутливість ціни опціону до строку до погашення вимірює коефіцієнт тета. У зв'язку з тим, що опціони з наближенням дати погашення дешевшають, цей коефіцієнт є завжди від'ємним. Він трактується як зміна ціни опціону у зв'язку з тим, що пройшов певний проміжок часу.

Коефіцієнт тета для опціону «колл» обчислюється за такою формулою:

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r K e^{-rT} N(d_2) \quad (3.3)$$

Цей коефіцієнт можна визначати для різних періодів. Формула (3.3) обчислює річне значення, поділивши його на 365, можна отримати значення

коефіцієнту за день. У табл. 3.3. наведено річні коефіцієнти тета, розраховані за моделлю Блека-Шоулза (БШ) та Дуана.

Таблиця 3.3

Результати розрахунків коефіцієнтів тета для вбудованих опціонів.

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S (БШ)	24.5978	24.5978	24.5978
S (Дуан)	24.561	24.561	24.561
K	7.9983	24.8184	23.4221
Коефіцієнт тета (БШ)	-0.3796	-1.3807	-1.0016
Коефіцієнт тета (Дуан)	-1.5695	-0.5475	-0.876

Можна побачити, що коефіцієнти тета, розраховані за різними моделями, сильно різняться. При цьому, коефіцієнти, розраховані за моделлю Дуана, не слідуєть типовим залежностям цього коефіцієнта. Наприклад, типовим є збільшення тети за модулем з наближенням поточної ціни базового активу до ціни виконання та прямування тети до нуля зі збільшенням строку до виконання.

Коефіцієнт тета не несе користі при хеджуванні. Якщо хеджувати актив до змін ціни базового активу є зрозумілим, то хеджування до плину часу є нелогічним та неможливим. Проте, цей показник дає ризик-менеджеру важливу інформацію щодо майбутнього знецінення активу чи портфеля без впливу інших факторів.

Хеджування за допомогою коефіцієнту дельта припускає лінійну залежність між ціною базового активу та вартістю опціону. Насправді, ця залежність не є лінійною. Тому, при незначних коливаннях ціни базового активу, дельта-хеджування є ефективним, але при значній зміні ціни базового активу такий хедж не дозволить нейтралізувати повністю ризик. Оскільки залежність вартості опціону від ціни базового активу не є лінійною, дельта не є константою, цей коефіцієнт також змінюється залежно від змін ціни базового активу.

Чутливість коефіцієнту дельта до змін у ціні базового активу вимірює коефіцієнт гамма. Значення цього коефіцієнту допомагає зрозуміти наскільки потрібно змінювати позицію, що хеджує, тобто робити ребалансування портфелю. Високе значення коефіцієнту гамма свідчить про те, що портфель потрібно ребалансувати часто, оскільки незначне коливання ціни базового активу може зробити дельта-хедж неефективним. Також можливим є зробити портфель гамма-нейтральним, тобто щоб при зміні ціни базового активу, коефіцієнт дельта залишався незмінним. Проте, гамма-нейтральність зазвичай робить портфель не дельта-нейтральним.

Розрахунок коефіцієнту гамма для європейського опціону «колл» відбувається за формулою [35, с. 379]:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \quad (3.4)$$

Зазвичай коефіцієнт гамма є найбільшим для опціонів, у який поточна ціна базового активу дорівнює ціні виконання. Чим більшим є прибуток чи збиток по опціону, тим меншим є коефіцієнт гамма. Зі збільшенням ціни базового активу коефіцієнт гамма прямує до нуля. Розраховані коефіцієнти гамма для вбудованих опціонів наведено у табл. 3.4.

Видно, що властивості розрахованих коефіцієнтів гамма зберігаються для вбудованих опціонів. Також можна помітити, що розраховані коефіцієнти гамма є досить малими, навіть для опціону із ціною виконання близькою до поточної ціни базового активу. Це свідчить про низьку чутливість коефіцієнтів дельта до змін у ціні базового активу. Таким чином, дельта-нейтральний портфель не потребує частого ребалансування.

Таблиця 3.4.

Результати розрахунку коефіцієнтів гамма для вбудованих опціонів.

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S (БШ)	24.5978	24.5978	24.5978
S (Дуан)	24.561	24.561	24.561
K	7.9983	24.8184	23.4221
Коефіцієнт гамма (БШ)	$1.95 \cdot 10^{-9}$	0.0283	0.0114
Коефіцієнт гамма (Дуан)	$5.30 \cdot 10^{-5}$	0.0231	0.0059

Вкрай важливим показником для оцінки вартості опціону є волатильність ціни базового активу. Вплив волатильності ціни базового активу на вартість опціону є тим більшим, чим ближче знаходиться поточна ціна базового активу до ціни виконання. Отже, зміни волатильності у часі можуть мати сильний вплив на вартість опціону. Чутливість вартості опціону до волатильності базового активу вимірюється коефіцієнтом вега. Коефіцієнт вега обчислюється за формулою:

$$v = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1) \quad (3.4)$$

Коефіцієнт вега набуває найбільшого значення коли поточна ціна базового активу дорівнює ціні виконання опціону. Для вега-хеджування довгої опціонної позиції підбирається опціон на ідентичний базовий актив з іншим коефіцієнтом вега. Наприклад, для хеджування довгої позиції зі 100 опціонів, для яких вега дорівнює мінус 2, потрібна коротка позиція з 200 опціонів на ідентичний базовий актив, для яких вега дорівнює 1. Результати розрахунку коефіцієнтів вега вбудованих опціонів наведено у табл. 3. 5.

Таблиця 3.5.

Результати розрахунку коефіцієнтів вега для вбудованих опціонів.

ISIN	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
S	24.5978	24.5978	24.5978
K	7.9983	24.8184	23.4221
Коефіцієнт вега	$3.12 \cdot 10^{-7}$	10.0579	6.8737

Можна побачити, що максимальний коефіцієнт вега для вбудованих опціонів дорівнює 10.0579. Таким чином, при збільшенні волатильності на 1 в.п. вартість опціону збільшується на приблизно 0.1 грн. Варто урахувати, що коефіцієнт розраховано на базі одиничної поставки. Тобто, для реального опціону зростання вартості становило б 4.02 грн або 1.5% вартості.

Оскільки модель Дуана включає змінну волатильність, яка попередньо не задається, розрахунок коефіцієнта вега для цієї моделі є неактуальним.

3.2. Аналіз показника VaR для вбудованих опціонів.

Корисним інструментом для аналізу ризику фінансових інструментів є обчислення показника VaR (Value at Risk). Цей показник використовується фінансовими організаціями для визначення максимально можливого збитку за певний період з певною імовірністю. За вимогами Базельських угод, банки зобов'язані розраховувати показник VaR щоденно для своїх портфелів фінансових інструментів.

VaR показує максимальний можливий збиток портфеля або актива, що може бути понесеним з заданим рівнем імовірності (X) для конкретного часового проміжку (N). Наприклад, VaR (N = 10, X = 95%) показує величину максимального збитку на десятиденному горизонті, що може спостерігатись з імовірністю 95%. Іншими словами, десятиденні збитки можуть перевищувати

величину VaR ($N = 10$, $X = 95\%$) лише у 5% випадків. Графічно це показано на рис. 3.1.

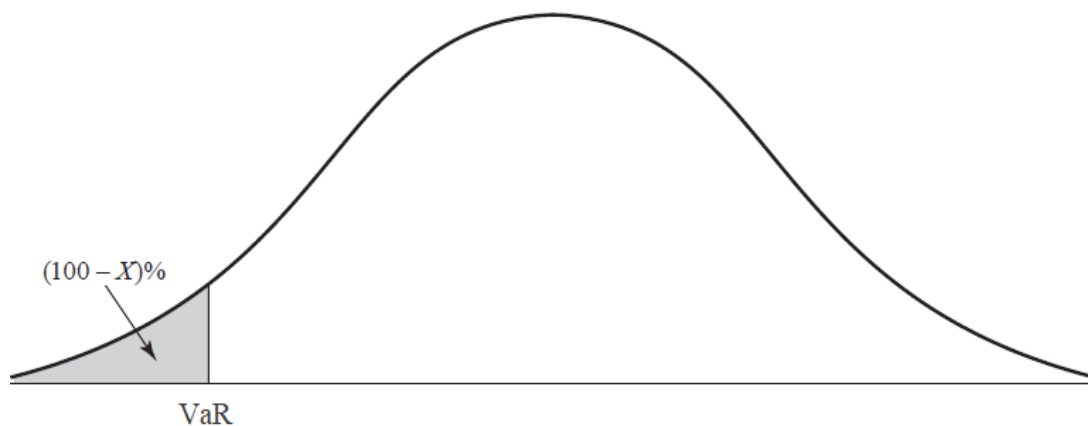


Рисунок 3.1. Зображення VaR на розподілі випадкової величини дохідності.

Величина VaR залежить як від заданого впевненості, так і від часового горизонту. При цьому типовим є зменшення VaR при зменшенні рівня впевненості. Графічна залежність показника VaR від рівня впевненості та часового горизонту називається поверхнею VaR.

Розрахунок VaR для опціонів є тісно пов'язаним з розрахунком VaR для базового активу. Оскільки залежність вартості опціону “колл” від ціни базового активу є постійно прямою, то VaR опціону буде дорівнювати збитку по ньому за умови реалізації VaR базового активу. Більш детально, спочатку з даних дохідності базового активу необхідно обрахувати VaR базового активу [36, с. 27]:

$$VaR_X = q_{100-X}(R) \quad (3.5)$$

Далі, за допомогою обраної моделі оцінити опціон “колл”. При цьому замість поточної ціни базового активу необхідно використати VaR базового активу, виражений у ціні:

$$VaR(Call)_x = f(S = VaR_x, K, r, t, \sigma) \quad (3.6)$$

Значення (3.6) і буде VaR опціону “колл”. Такий метод дає більш надійну оцінку у порівнянні з оцінкою на основі коефіцієнту дельта опціону [37, с. 251].

Для обчислення показника VaR вбудованих опціонів було обрано три методи:

1. Історична симуляція.
2. Монте Карло симуляції за моделлю Дуана.
3. Монте Карло симуляції за моделлю Блека-Шоулза.

Кожен з наведених методів має свої переваги та недоліки. Найбільш простим методом є історична симуляція. Для розрахунку VaR цим методом було взято дані щодо одноденної дохідності курсу долар-гривня за останні три та десять років, та використано у формулах (3.5) та (3.6). Для розрахунку вартості опціонів було використано модель Блека-Шоулза.

Для розрахунку VaR методом симуляції за моделлю Дуана було симульовано 50 тисяч варіантів одноденної дохідності базового активу з використанням параметрів, оцінених для моделі Дуана. Далі їх було використано у контексті формул (3.5) та (3.6). Для оцінки вартості опціону було використано модель Дуана. Результати оцінки VaR опціонів за історичним та симуляційним методами можна побачити на рис. 3.2., 3.3., 3.4. у вигляді поверхні VaR [38, с. 489].

Із рисунків можна побачити, що поверхні VaR відрізняються для двох методів. Історичний метод, розрахованих на 10-х роках показує більші VaR-збитки для більшого рівня довіри, симуляції Дуана оцінюють вище збитки при меншому рівні довіри та мають плавніший перехід на графіках. При цьому історичний метод за трьома роками повторює форму поверхні VaR за Дуаном. Це можна пояснити різницею у розподілі дохідності курсу на різних періодах. Параметри моделі Дуана ж розраховувались на горизонті трьох років.

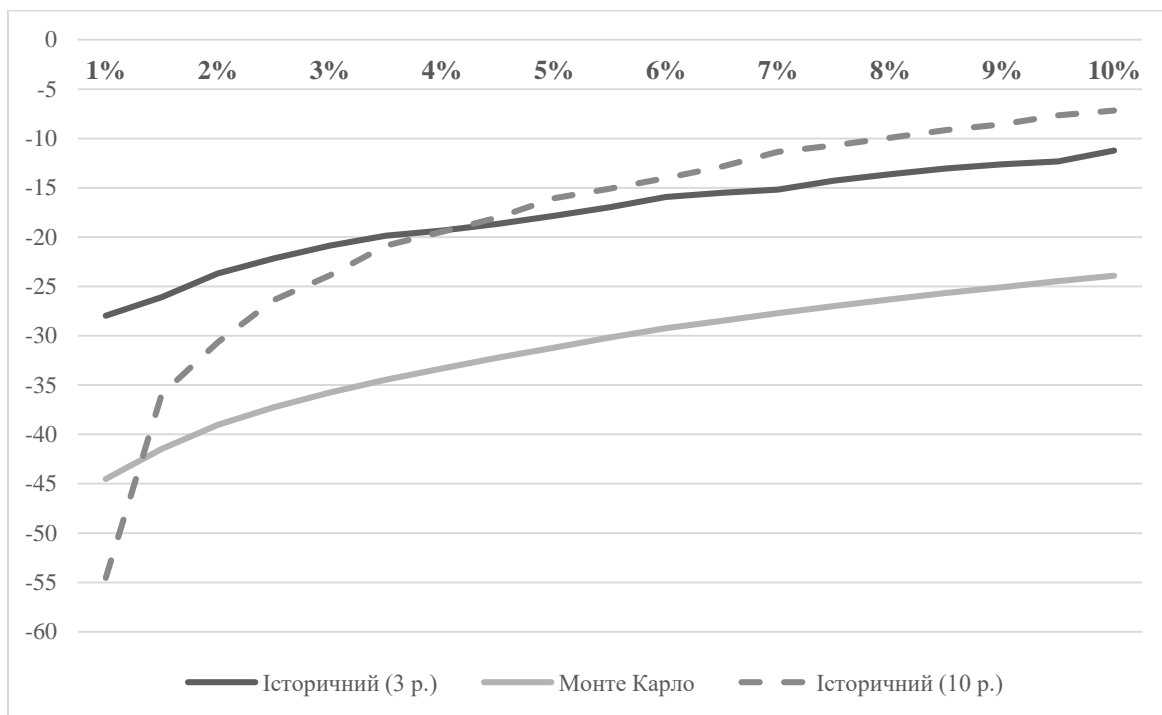


Рисунок 3.2. Поверхня одноденного VaR для опціону, вбудованого у облігацію UA4000129241 за різними методами.

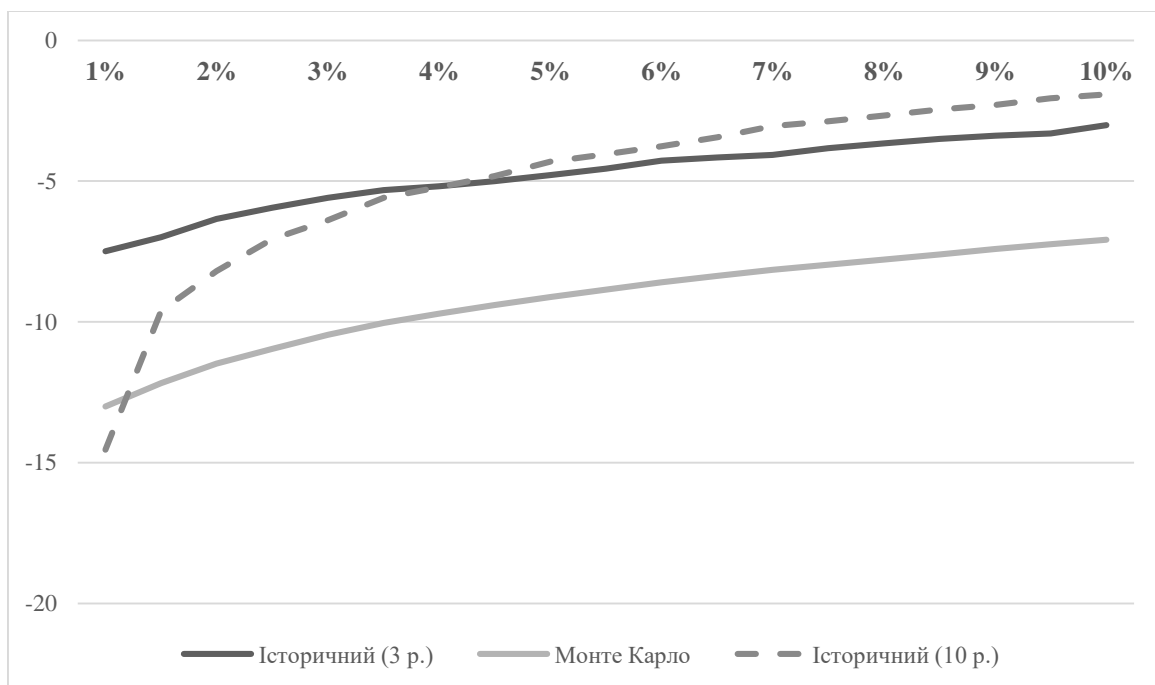


Рисунок 3.3. Поверхня одноденного VaR для опціону, вбудованого у облігацію UA4000195150 за різними методами.

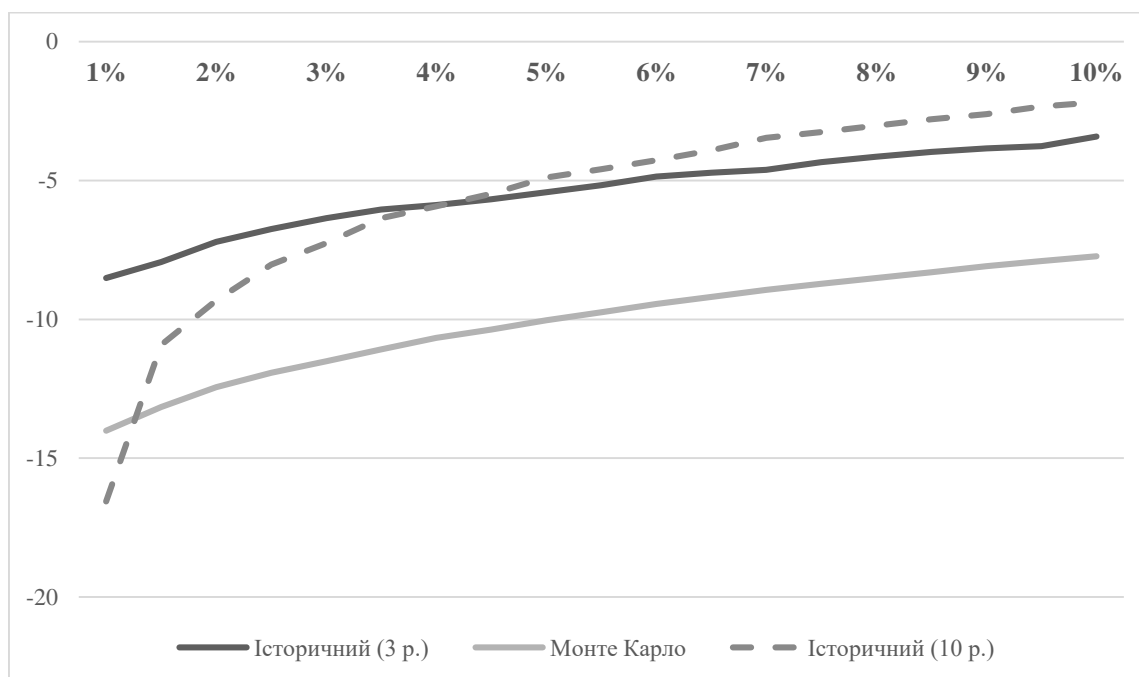


Рисунок 3.4. Поверхня одноденного VaR для опціону, вбудованого у облігацію UA4000192710 за різними методами.

Регуляції Базельського комітету вимагають оцінку банками VaR на десятиденному періоді з рівнем довіри 99% [39]. Для перетворення денного значення у десятиденне необхідно помножити денне значення на $\sqrt{10}$. Регулятивні значення VaR для вбудованих опціонів наведено у табл. 3.6.

Таблиця 3.6.

Результати розрахунку регулятивного VaR для вбудованих опціонів.

	у грн.		у %	
	Історичний (10 р.)	Монте Карло	Історичний (10р.)	Монте Карло
UA4000129241	-172.45	-140.74	-8.00%	-6.53%
UA4000195150	-45.99	-41.13	-17.54%	-15.69%
UA4000192710	-52.35	-44.31	-12.20%	-10.33%

Видно, що найбільший рівень ринкового ризику притаманний опціону, вбудованому в облігацію UA4000195150. Цікавим є те, що цей опціон має найменший показник дельта, проте найбільший показник гамма з

досліджуваних опціонів. На прикладі розрахунку VaR можна побачити нелінійність утворення вартості на опціонні контракти.

Перевагою історичного методу є те, що він використовує емпіричний розподіл дохідності. Тобто, не потрібно робити припущення щодо динаміки базового активу, втрачаючи при цьому відповідність реальним даним. Головним недоліком підходу є те, що VaR оцінюється на малій вибірці. Наприклад, при оцінці на даних десяти років дохідності VaR буде розраховуватись на “хвості” з лише 36 спостережень. При цьому не для кожного активу є доступними дані ціни за останні десять років.

Проблему недостатності даних вирішує метод Монте Карло симуляцій VaR, оскільки вибірка для розрахунку у цьому методі обмежена лише обчислювальними можливостями техніки. Проте, для Монте Карло симуляцій потребується припустити процес, якому слідує ціна базового активу.

Третім способом обчислення показника VaR є Монте Карло симуляції для моделі Блека-Шоулза. Загальною послідовністю дій під час цієї процедури є:

1. Оцінка опціону на дату аналізу.
2. На основі історичних даних визначення розподілу показників, що мають прямий вплив на вартість опціону.
3. Генерація з визначеного розподілу випадкових значень показників, що впливають на вартість опціону (у денному вимірі).
4. Оцінка опціону за допомогою згенерованих значень показників.
5. Повтор попередніх кроків достатню кількість разів для формування розподілу вартості опціону.
6. Визначення за допомогою розподілу вартості опціону максимально можливий збиток для заданого рівня довіри.

Для аналізу було використано 10000 симуляцій на денному горизонті. Для визначення VaR для інших проміжків, обчислене значення можна перетворювати.

У найпростішому випадку VaR для опціонів обчислюється для різних можливих варіантів ціни базового активу. Але у даному методі можливим є також включити у аналіз рівень безризикової ставки дохідності.

Припущення щодо ціни базового активу описується її дохідністю. Середньоденна історична логарифмічна дохідність курсу долар-гривня за останні десять років становила 0.03% зі стандартним відхиленням 0.0078. Для аналізу припускається що дохідність курсу має нормальний розподіл.

Щодо безризикової ставки, припущення щодо неї визначаються експертно. Було обрано трикутний розподіл з найімовірнішим значенням, що дорівнює поточному значенню безризикової ставки, та максимальним денним відхиленням у 0.1 в.п.

Також у аналіз було включено зміну волатильності. Припускається, що її середнє значення дорівнює поточному значенню волатильності середньомісячного курсу, максимальна денна зміна – 0.1 в.п.

Результатом таких симуляцій є розподіл вартості опціону, з якого можна обчислити VaR. Графік розподілу для одного з опціонів зображено на рис. 3.5. Темним на графіку позначено інтервал, що відповідає одноденному VaR з рівнем довіри 5%. Сам показник VaR ($N = 1$, $X = 95\%$) для цього опціону дорівнює 37.7 грн.

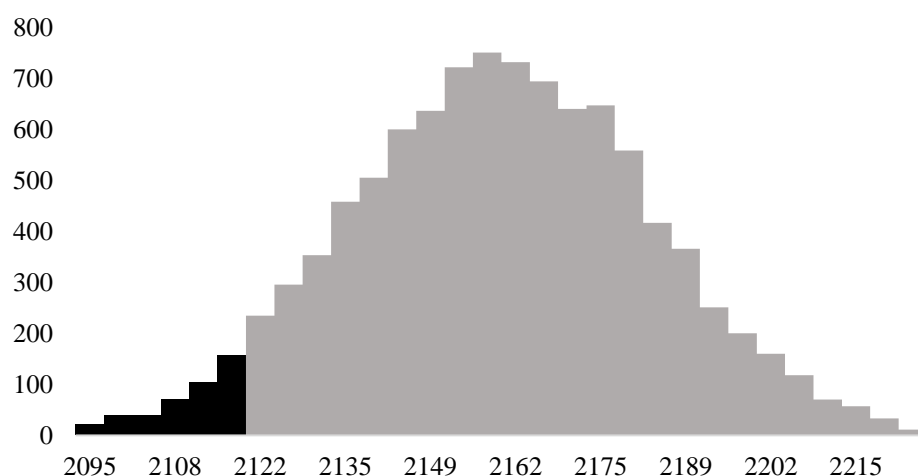


Рисунок 3.5. Розподіл вартості опціону, вбудованого в облігацію UA4000129241.

Описану вище процедуру було застосовано до усіх раніше проаналізованих вбудованих опціонів. Результатом є поверхні VaR, зображені на рис. 3.6.

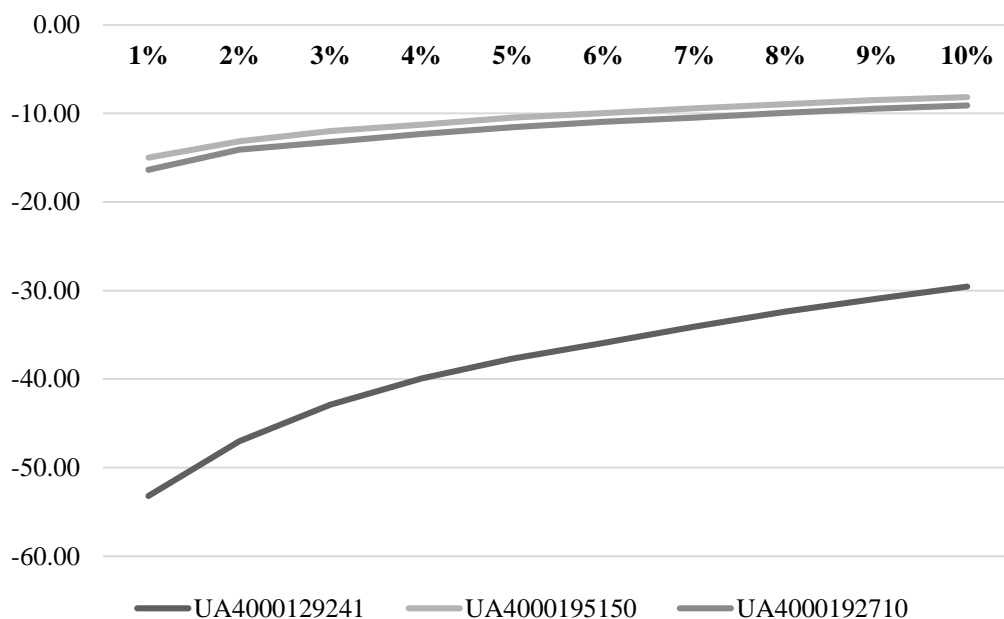


Рисунок 3.6. Поверхні VaR вбудованих опціонів, розраховані методом Монте Карло за моделлю Блека-Шоулза.

Розраховані регулятивні значення VaR для цього методу подано у табл. 3.7. З таблиці можна побачити, що регулятивні значення VaR розраховані останнім методом є ближчими до результатів історичного методу, розрахованого на десятирічному горизонті. Це можна пояснити тим, що у обох методах для кінцевої оцінки опціонів використовується модель Блека-Шоулза.

Таблиця 3.7.

Результати розрахунку регулятивного VaR для вбудованих опціонів.

	VaR, грн	VaR, %
UA4000129241	-168.23	-7.80%
UA4000195150	-47.38	-18.07%
UA4000192710	-51.74	-12.06%

3.3. Аналіз альтернативних метрик ризику для вбудованих опціонів.

Не дивлячись на те, що VaR є зручною та інформативною метрикою ризику, цей показник не є послідовним. Теорію послідовних ризик-метрик запропонував Артзнер у 1999 р. Мотивацією для появи такої теорії стало те, що, хоч аналітик і може інтуїтивно описати суть фінансового ризику та користь конкретної метрики ризику, проте математично оцінити чи є ризик-метрика корисною важко.

За теорією послідовних ризик-метрик метрика називається послідовною, якщо вона задовольняє вимогам монотонності, субаддитивності, позитивної гомогенності та трансляційної симетрії. Важливим у контексті VaR є розгляд вимоги субаддитивності. Якщо конкретну ризик-метрику позначити за $p(\cdot)$, вимогу субаддитивності можна записати [40, с. 209]:

$$p(X + Y) \leq p(X) + p(Y) \quad (3.7)$$

Випадки, коли VaR не відповідає вимозі субаддитивності описані Даудом [36, с. 34]. Несубаддитивні метрики ризику можуть спонукати учасників ринку звітувати величину ризику за інструментами окремо для того, щоб зменшити показувану загальну величину ризику. Це, наприклад, може призводити до применшених вимог до капіталу банків.

Окрім вищеприведеного, показник VaR показує лише максимальні збитки за нормальних часів, при цьому не відображаючи інформацію про шоківі часи. Тому корисно розглянути інші метрики ризику, як WCS (worst case scenario, найгірший сценарій) та ES (expected shortfall, очікувані втрати). Саме ці показники відповідають на питання: що буде, якщо найгірший сценарій відбудеться? Ці метрики також залежать від заданого рівня довіри та часового горизонту.

WCS показує розподіл збитків за умови, що відбулась шокова подія, ймовірність настання якої дорівнює $(1 - X)$ у контексті VaR. WCS також можна назвати VaR від VaR [41, с. 111]. ES є математичним сподіванням WCS, тобто найімовірнішим збитком, який понесе тримач інструменту у випадку настання шокової події.

Для вбудованих опціонів було розраховано одноденні WCS та ES з рівнем довіри 97.5% історичним методом на горизонті 10 днів. Результати розрахунку подано у табл. 3.8. 10% квантиль WCS означає: якщо відбудеться шокова подія, ймовірність якої 2.5%, збитки не перевищать певне значення з імовірністю 10%. При цьому найімовірніший обсяг збитків дорівнює ES.

Таблиця 3.8.

Результати розрахунку метрик WCS та ES для вбудованих опціонів.

	UA4000129241	UA4000195150	UA4000192710
$q_{5\%}(WCS)$	-160.38	-42.05	-48.38
$q_{7.5\%}(WCS)$	-143.28	-37.68	-43.27
$q_{10\%}(WCS)$	-129.48	-34.12	-39.13
$q_{15\%}(WCS)$	-100.14	-26.52	-30.32
<i>ES</i>	-62.44	-16.53	-18.91

З таблиці видно, що опціони, що є більш ризиковими за VaR, є також більш ризиковими і за показниками WCS та ES. Варто зазначити, що ES є послідовною метрикою ризику, квантилі WCS – ні. Проте обидві метрики дають багато інформації щодо ризику інструменту.

ES було розраховано для різних рівнів довіри та за методом Монте Карло моделі Дуана. Поверхні ES для вбудованих опціонів зображено на рис. 3.7., 3.8. та 3.9.

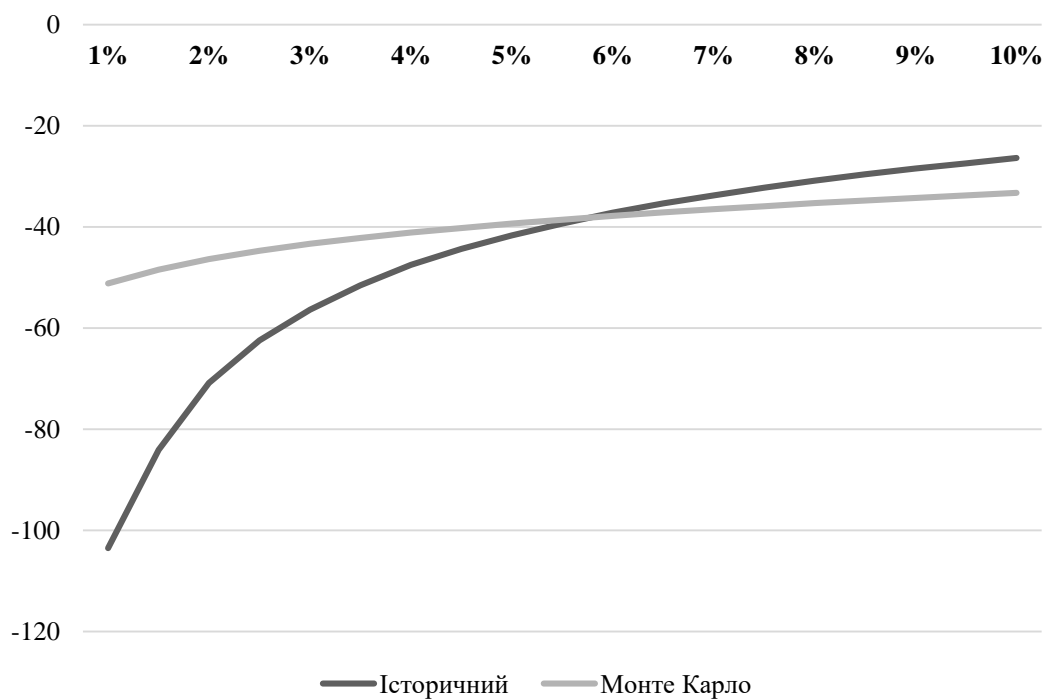


Рисунок 3.7. Поверхні ES для опціону, вбудованого у облігацію UA4000129241

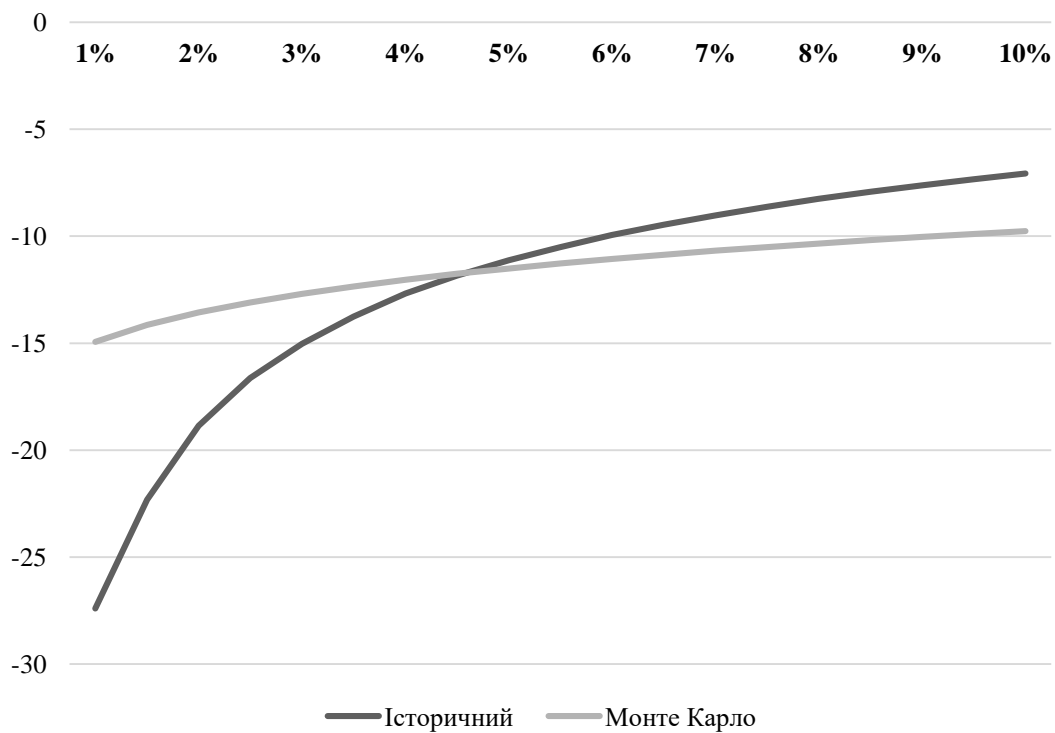


Рисунок 3.8. Поверхні ES для опціону, вбудованого у облігацію UA4000195150

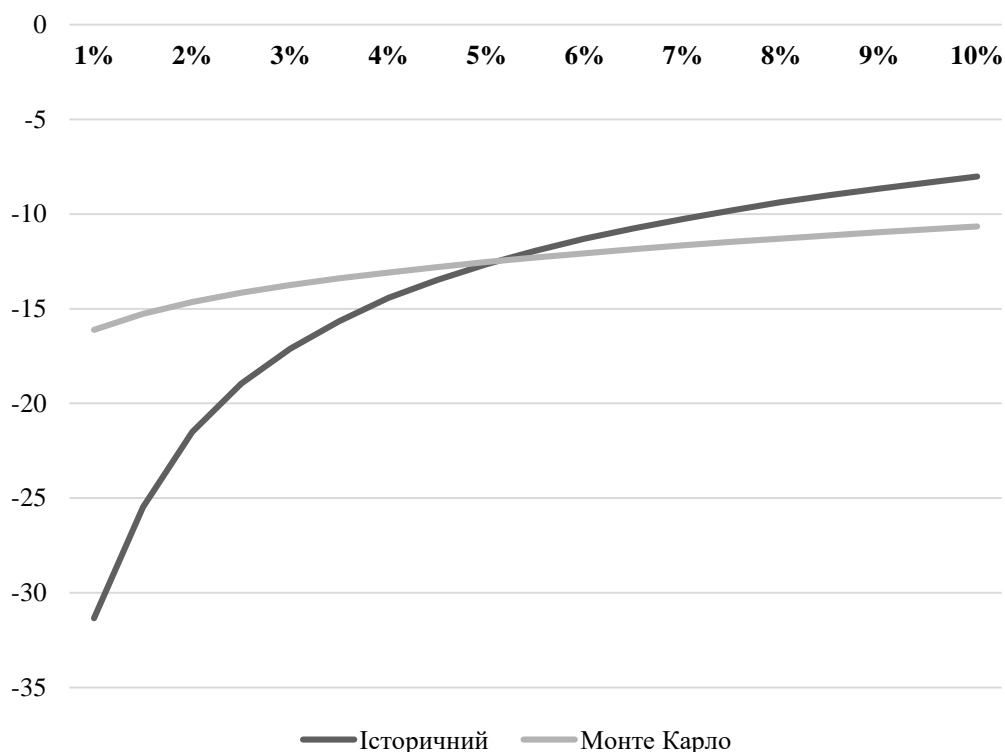


Рисунок 3.9. Поверхні ES для опціону, вбудованого у облігацію UA4000192710

З рисунків видно, що ES поводить себе схожим чином до VaR, проте ES з рівнем довіри 97.5% показує більші збитки ніж VaR з рівнем довіри 99%. Також з огляду на поверхні VaR та ES можна побачити наскільки відрізняється емпіричний розподіл ряду курсу від того, що припускається при симуляціях Монте Карло.

Висновок до розділу 3.

У розділі проаналізовано ризик вбудованих опціонів за допомогою різних показників: грецьких літер, VaR та альтернативних ризик-метрик. Усі показники розраховано як базуючись на моделі Блека-Шоулза, так і на моделі Дуана за допомогою Монте Карло симуляцій.

Визначено, що VaR, розрахований на десятирічному історичному періоді найконсервативніше оцінює ризик опціонів. Згідно з цим методом

проаналізовані вбудовані опціони на десятиденному горизонті можуть втратити максимально від 8% до 12% вартості з рівнем довіри 99%. Монте Карло метод применшує ризики для високого рівня довіри та збільшує для малого рівня довіри. При цьому, у порівнянні з історичним методом, розрахованим на трьох роках історичних даних, метод Монте Карло за Дуаном оцінює ризик вище.

Проаналізовано основні недоліки VaR та розраховано послідовну метрику ризику – ES (очікувані втрати). ES має схожий профіль до профілю VaR, при цьому ES для рівня довіри 97.5% є більшим за VaR з рівнем довіри 99%. Це є результатом того, що ES краще враховує ефект «товстих хвостів» розподілу дохідності. Також розраховано показник WCS, що концентрується на збитках, які несе тримач активу у випадку коли шокова подія відбулась.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено теоретичну базу оцінки справедливої вартості опціонних контрактів. Проаналізовано доробки як найперших вчених, що присвятили свої праці цій тематиці, так і сучасні тенденції в оцінці опціонів. Виявлено основні принципи використання, переваги та недоліки класичної моделі Блека-Шоулза. Одним з найвагоміших недоліків визначено припущення про сталу волатильність базового активу. Відповідно наведено теоретичні переваги використання моделі Дуана, що може частково обійти обмеження моделі Блека-Шоулза. Це можливо зробити за допомогою вбудови GARCH процесу у логнормальну динаміку базового активу та використання принципу локальної нейтралізації ризику, запропонованого Дуаном. Використаний процес не є стандартною формою GARCH, тому потребує програмування алгоритмів оцінки параметрів для свого використання.

Описано покроково використання моделі Дуана для оцінки опціонів за допомогою програмного забезпечення R. Процедuru можна розділити на два етапи: оцінка параметрів та Монте Карло симуляції. Виведено функцію максимальної правдоподібності для процесу Дуана, максимізація якої дає змогу оцінити параметри моделі. Наведено приклади ключових команд, що дозволяють прийти до вартості конкретного опціону. Методика оцінки є такою, що дозволяє оцінювати опціони з нестандартними виплатами без будь-яких обмежень, на відміну від моделі Блека-Шоулза, за допомогою якої можливо оцінити лише певні види екзотичних опціонів.

Побудовано модель Дуана для оцінки опціонів, вбудованих у облігації внутрішньої державної позики з індексованою вартістю. Для цього проаналізовано історичну динаміку курсу гривні до долара США та ключові фактори впливу на нього. Визначено історичний діапазон даних для оцінки параметрів моделі. Оцінено тестову модель на кризовому періоді та визначено,

що на цьому проміжку модель не є стабільною. Це відповідає логіці моделі, адже вона передбачає оцінку стаціонарної волатильності, що не можна визначити за умови значних вибухових змін базового активу. З огляду на цю особливість для обраного періоду було додатково проведено оцінку стабільності параметрів основної моделі. Для цього побудовано тестові моделі, що оцінені на різних часових проміжках. Визначено, що попри незначні коливання коефіцієнтів у тестових моделях, стаціонарна волатильність моделей змінюється неістотно і має схожий до нормального розподіл з чітким середнім значенням. Таким чином, коефіцієнти моделі є стабільними за своєю суттю.

Додатково було оцінено здатність моделі Дуана відтворити особливості поведінки вартості опціонів, зокрема «посмішку волатильності». Для перевірки відображення моделлю «посмішки волатильності» модель Дуана оцінено та використано для визначення справедливої вартості опціонів з базовим активом курсу фунту до долара США. Визначено, що модель здатна відобразити залежність між ціною виконання та вбудованою волатильністю. При цьому «посмішки волатильності» зі збільшенням терміну до виконання стають більш пологими, що відповідає даним, що спостерігаються на фінансових ринках. Таким чином, модель Дуана здатна обійти одне з обмежень моделі Блека-Шоулза.

Опціони, вбудовані у облігації з індексованою вартістю оцінено за двома моделями: Дуана та Блека-Шоулза. Правильність оцінок за моделлю Блека-Шоулза підтверджується їх збігом з оцінками Національного банку України. Справедлива вартість опціонів, оцінена за моделлю Дуана є дещо нижчою у порівнянні з моделлю Блека Шоулза і для оцінених опціонів дорівнює 2 138.48 грн, 230.62 грн та 400.89 грн для трьох різних випусків, що було проаналізовано.

З одного боку, це може бути частково спричиненим тим, що стаціонарна волатильність за моделлю Дуана є меншою, ніж історична, що використовується для оцінки за моделлю Блека-Шоулза. Проте, оцінки за моделлю Блека-Шоулза,

що базуються на трирічній волатильності є все ще більшими за оцінки за моделлю Дуана. З іншого боку, це може свідчити про те, що опціони, оцінені відповідно до нормативів НБУ є переоціненими і насправді не несуть тієї вартості, що банки відображають у своїх фінансових звітах. Останнє може призводити до збільшення ризиків як на мікрорівні у контексті банку, так і на макрорівні у контексті завищення показників капіталізації та стійкості фінансової системи.

У рамках дослідження розроблено застосунок, що дозволяє провести зручну та швидку оцінку вартості опціонів методом Дуана та порівняти з оцінкою за моделлю Блека-Шоулза. Застосунок є універсальним, оскільки може оцінювати опціони як на акції, так і на валюту. У ньому імплементовано одразу дві частини оцінки за методом Дуана: оцінка параметрів та Монте Карло симуляції. Тобто, відсутня потреба у застосуванні іншого програмного забезпечення, додаток є незалежним. При цьому, за наявності попередньо оцінених параметрів, можна відразу приступити до Монте Карло симуляцій. Важливим є те, що в додатку наявна можливість оцінити опціон вбудований у облігації з індексованою вартістю, який є екзотичною формою азійського опціону. Додаток також дає можливість оцінити фінансовий ризик опціону за допомогою метрик VaR (value at risk, вартість під ризиком) та ES (expected shortfall, очікувані збитки).

Значну увагу у роботі приділено аналізу ризику, що притаманний опціонам, вбудованим у облігації з індексованою вартістю. Для цього було розраховано грецькі літери опціонів за моделлю Блека-Шоулза та за моделлю Дуана, показник VaR, ES та WCS (worst case scenario, найгірший сценарій). Аналіз грецьких літер показав, що усі проаналізовані опціони є дуже чутливими до змін ціни базового активу. Тобто, важливим фактором ризику вбудованих опціонів є зміна валютного курсу. Іншим важливим фактором ризику є відсоткова ставка. При цьому, для опціонів з більшим терміном до виконання цей фактор є більш вагомим. Для вбудованого опціону з терміном виконання

5.68 років збільшення безризикової ставки на 1 в.п. збільшує вартість на 0.66 грн на базисі одиничної поставки.

Аналіз VaR показав, що на десятиденному горизонті найризикованіший з опціонів може втратити не більше 17.5% з імовірністю 99% за історичним методом, що базується на даних десяти років. Метод Монте Карло за моделлю Дуана, що оцінена на історичних даних трьох років оцінює ризики нижче для більших рівнів довіри та менше – для менших рівнів довіри. При цьому, у порівнянні з історичним методом, що базується на даних трьох років, метод Монте Карло стабільно оцінює ризик як вищий за статистично визначений.

У зв'язку з недоліками показника VaR, було проаналізовано рівень очікуваних втрат при настанні шокової події, що відбувається з імовірністю 2.5%. Для найбільш ризикового опціону з проаналізованих рівень очікуваних втрат при настанні такої події становить 22% від вартості.

З огляду на оцінку ризиків, можна сказати, що вбудовані опціони є помірно ризиковими. Проте, з огляду на нелінійність утворення вартості на ці фінансові інструменти та численність факторів, що впливають на вартість, необхідною є постійна оцінка ризиків. Наприклад, при інших рівних умовах, скорочення терміну до виконання проаналізованих опціонів до 30 днів призводить до збільшення показників VaR та ES у близько десять разів.

Список використаних джерел

1. Fabozzi F. J. The handbook of fixed income securities / Frank J. Fabozzi. – New York: McGraw-Hill, 2012. – 1809 с.
2. Martellini L. Fixed-income securities: valuation, risk management, and portfolio strategies / L. Martellini, P. Priaulet, S. Priaulet. – London: Wiley, 2003. – 664 с.
3. Choudhry M. Fixed-Income securities and derivatives / Moorad Choudhry. – Hoboken: Bloomberg press, 2010. – 475 с.
4. Кабінет Міністрів України. Постанова про ОСНОВНІ УМОВИ випуску та порядок розміщення середньострокових та довгострокових державних облігацій з індексованою вартістю / Кабінет Міністрів України. – 2011.
5. Cox J. Option pricing: A simplified approach / J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein. // Journal of Financial Economics. – 1979. – №7. – С. 229–263.
6. Damodaran A. Applied Corporate Finance / Aswath Damodaran. – New York: Wiley, 2014. – 654 с.
7. Hull J. C. OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVES / J. C. Hull. – Toronto: Prentice Hall, 2012. – 841 с.
8. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes. – 1973. – №3. – С. 637–654.
9. Reuters: An Introduction to Derivatives – Toronto: John Wiley & Sons, 1999. – 208 с.
10. Garman M. Foreign Currency Option Values / M. Garman, S. Kohlhagen. // Journal of International Money and Finance. – 1983. – №2. – С. 231–237.
11. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity / T. Bollerslev. // Journal of Econometrics. – 1986. – №31. – С. 307–327.
12. Duan J. THE GARCH OPTION PRICING MODEL / Jin-Chuan Duan. // Mathematical Finance. – 1995. – №5. – С. 13–32.

13. Hafner W. Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models: Exposition and Appraisal / W. Hafner, H. Zimmermann., 2009. – 548 c.
14. Bachelier L. Theorie de la Speculation / Louis Bachelier. // Annales scientifiques de l'É.N.S. – 1900. – №3. – C. 21–86.
15. Cuthbertson K. Derivatives: Theory and Practice / K. Cuthbertson, D. Nitzsche, N. O'Sullivan. – Chichester: Wiley, 2019. – 912 c.
16. Sprenkle C. M. Warrant prices as indicators of expectations and preferences / Case M. Sprenkle. // Yale Economics Essays. – 1961. – №1. – C. 178–231.
17. Boness J. Elements of a theory of stock-option value. / James Boness. // Journal of Political Economy. – 1964. – №72. – C. 163–175.
18. Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing. / Paul A. Samuelson. // Industrial Management Review. – 1965. – №6. – C. 13–32.
19. Gultekin B. Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results / B. Gultekin, R. Rogalski. // Financial Management. – 1982. – C. 58–96.
20. Whaley R. Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks / R. Whaley. // Journal of Financial Economics. – 1982. – №10. – C. 29–58.
21. Black F. Fact and Fantasy in the Use of Options / F. Black. // Financial Analysis Journal. – 1975. – №31. – C. 61–72.
22. Cox J. Notes on Option Pricing. I: Constant Elasticity of Variance Diffusions / J. Cox. // Stanford University. – 1975.
23. Merton R. Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous / R. Merton. // Journal of Financial Economics. – 1976. – №3. – C. 125–144.
24. Heston S. L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. / Steven L. Heston. // Review of Financial Studies. – 1993. – №6. – C. 327–343.
25. Kim Y. Pricing Options under Stochastic Interest Rates: A New Approach / Y. Kim, N. Kunitomo. // Asia-Pacific Financial Markets. – 1999. – №6. – C. 49–70.
26. Cox J. A theory of the term structure of interest rates / J. Cox, S. Ross, J. Ingersoll. // Econometrica. – 1985. – №53. – C. 385–408.

27. Package "quantmod" documentation [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: <https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf>.
28. Package "tseries" documentation [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: <https://cran.r-project.org/web/packages/tseries/tseries.pdf>.
29. Kaminski S. The pricing of options on WIG20 using GARCH models / Szymon Kaminski. // University of Warsaw. Working papers. – 2013. – №6. – С. 1–30.
30. Bank of England. UK yield curve data [Електронний ресурс] / Bank of England. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.bankofengland.co.uk/statistics/yield-curves>.
31. US Treasury. US yield curve data [Електронний ресурс] / US Treasury. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/textview.aspx?data=yield>.
32. Статистика Національного банку України [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://bank.gov.ua/ua/statistic>.
33. Package "shiny" documentation [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: <https://cran.r-project.org/web/packages/shiny/shiny.pdf>.
34. Gracianti G. Computing Greeks by Finite Difference using Monte Carlo Simulation and Variance Reduction Techniques [Електронний ресурс] / Giovanni Gracianti. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: <https://jurnal.ugm.ac.id/bimipa/article/download/27151/20233>.
35. McDonald R. L. Derivatives markets / Robert L. McDonald. – New York: Pearson, 2013. – 948 с.
36. Dowd K. Measuring Market Risk / Kevin Dowd. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005. – 390 с.
37. Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk / Philippe Jorion. – New York: McGraw-Hill, 2006. – 596 с.
38. Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering / Paul Glasserman. : Springer, 2004. – 596 с.

39. Revisions to the Basel II market risk framework [Электронный ресурс] // Bank for International Settlements. – 2009. – Режим доступа до ресурсу: <https://www.bis.org/publ/bcbs158.pdf>.
40. Coherent Measures of Risk / P.Arznr, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath. // Mathematical Finance. – 2001. – №9. – С. 203–228.
41. Allen L. Understanding market, credit, and operational risk : the value at risk approach / L. Allen, J. Boudoukh, A. Saunders. – Oxford: Blackwell Publishing, 2004. – 284 с.

Додаток А

Програмний код додатку «Option pricing with GARCH». Файл «ui.R»

```
library(shiny)

estim_ui <- function() {
  fluidPage(
    sidebarLayout(
      sidebarPanel(
        radioButtons("source", "Select data source", choices =
c("Yahoo!Finance" = 1, "Upload .csv" = 2)),
        radioButtons("under1", "Underlying asset", choices = c("Stock" =
1, "Currency" = 2)),
        conditionalPanel(
          condition = "input.source == 1",
          textInput("symbol", "Please enter the ticker of the asset"),
          dateInput("startDate", "Please specify start date for data
load", value = "2019-03-01"),
          dateInput("endDate", "Please specify end date for data load",
value = "2020-03-01"),
          actionButton("start", "Get the data!"),
          conditionalPanel(condition = "input.under1 == 1",
            numericInput("rf", "Risk free rate", value =
0)),
          conditionalPanel(condition = "input.under1 == 2",
            numericInput("rf_d", "Domestic risk free
rate", value = 0),
            numericInput("rf_f", "Foreign risk free
rate", value = 0)),
          actionButton("estimate", "Estimate Duan GARCH based on data")
        ),
        conditionalPanel(
          condition = "input.source == 2",
          fileInput("path", "File path"),
          helpText("Separator - comma, must include Date (%d.%m.%Y) as
the first column"),
          checkboxInput("header", "Header", value = TRUE),
          actionButton("start1", "Get the data!"),
          conditionalPanel(condition = "input.under1 == 1",
            numericInput("rf", "Risk free rate", value =
0)),
          conditionalPanel(condition = "input.under1 == 2",
            numericInput("rf_d", "Domestic risk free
rate", value = 0),
            numericInput("rf_f", "Foreign risk free
rate", value = 0)),
          actionButton("estimate", "Estimate Duan GARCH based on data")
        )
      ),
      mainPanel(
        tabsetPanel(
```

```

        tabPanel("Data overview", textOutput("adf"),
tableOutput("data"), plotOutput("plot")),
        tabPanel("Duan GARCH", tableOutput("GARCH"),
textOutput("conv"), textOutput("sigma_lr"))
    )
  )
}

mc_ui <- function() {
  fluidPage(
    sidebarLayout(
      sidebarPanel(
        radioButtons("under", "Underlying asset", choices = c("Stock" =
1, "Currency" = 2)),
        radioButtons("type", "Option type", choices = c("Call" = "c",
"Put" = "p", "Ukrainian embedded call" = "u")),
        numericInput("S_0", "Today price of the asset", value = 100),
        numericInput("K", "Strike price", value = 100),
        conditionalPanel(
          condition = "input.under == 1",
          numericInput("r", "Risk free rate", value = 0)
        ),
        conditionalPanel(
          condition = "input.under == 2",
          numericInput("r_d", "Domestic risk free rate", value = 0),
          numericInput("r_f", "Foreign risk free rate", value = 0)
        ),
        numericInput("t", "Days to maturity", value = 30),
        numericInput("nsim", "Number of simulations", value = 1000),
        actionButton("simulate", "Start simulation"),
        radioButtons("parsource", "Parameters source:", choices =
c("Previous estimation" = 1, "Own parameters" = 2)),
        conditionalPanel(
          condition = "input.parsource == 2",
          numericInput("omega", "Omega", value = 0.000015),
          numericInput("alpha", "Alpha", value = 0.1883),
          numericInput("beta", "Beta", value = 0.7162),
          numericInput("lambda", "Lambda", value = 0.007452),
          helpText("By default are given original Duan parameters.")
        ),
        numericInput("sigma", "Enter annual sigma for B/S", value =
0.2413)
      ),
      mainPanel(
        tabsetPanel(
          tabPanel("Pricing", textOutput("price"),
###          textOutput("imp_vol"),
          helpText("Simulated asset paths are shown below."),
          plotOutput("paths")
        ),
          tabPanel("Risk metrics")
        )
      )
    )
  )
}

```

```
main_ui <- shinyUI(  
  navbarPage("Option pricing with GARCH",  
    tabPanel("Estimation", estim_ui()),  
    tabPanel("MC Simulation", mc_ui()))  
)
```

Додаток Б

Програмний код додатку «Option pricing with GARCH». Файл «server.R»

```

library(shiny)
library(quantmod)
library(tseries)
library(readr)
library(fOptions)
library(PerformanceAnalytics)
source("func.R")

shinyServer(

  function(input, output) {

    data <- reactive({
      if (input$source == 1) {
        input$start
        isolate(
          na.omit(getSymbols(input$symbol, src = "yahoo", from =
input$startDate, to = input$endDate, env = NULL)[,4]))}
        else if (input$source == 2 & is.null(input$path) == FALSE) {
          input$start1
          isolate({
            file1 = input$path
            S = read_csv(file = file1$datapath, col_names = input$header,
col_types = cols(Date = col_date(format = "%d.%m.%Y"))
            xts(S[,2], order.by = as.Date(S$Date)))
          }
        else {NULL}
      })

    ret <- reactive({
      input$start
      isolate(
        diff(log(data()))[2:length(data())]
      )
    })

    adf <- reactive({
      input$start
      isolate(
        adf.test(ret())
      )
    })

    param1 <- c(0.000015, 0.1883, 0.7162, 0.007452)

    rf <- reactive({input$rf})

    rf_d <- reactive({input$rf_d})
  }
)

```

```

rf_f <- reactive({input$rf_f})

model <- reactive({
  input$estimate
  mydata = data()
  ret = diff(log(mydata))[2:length(mydata)]
  rf <- (1+rf())^(1/365)-1
  rf_d <- (1+rf_d())^(1/365)-1
  rf_f <- (1+rf_f())^(1/365)-1
  input$estimate
  isolate(
    if (input$under1 == 1) {
      optim(param1, ret = ret, rf = rf, garch.LL)
    }
    else if (input$under1 == 2) {
      optim(param1, ret = ret, rf_d = rf_d, rf_f = rf_f, garch.LL_curr)
    }
  )
})

sigma_lr <- reactive({
  coef <- model()$par
  sqrt(coef[1]/(1 - coef[2]*(1+coef[4]^2) - coef[3]))*sqrt(365)
})

sigma_h <- reactive({
  r <- ret()
  sqrt(var(r))*sqrt(365)
})

sim <- reactive({
  param <- as.vector(0)
  S_0 <- input$S_0
  K <- input$K
  t <- input$t
  nsim <- input$nsim
  if (input$under == 1) {rf <- (1+input$r)^(1/365)-1}
  else if (input$under == 2) {rf <- (1+(input$r_d -
input$r_f))^(1/365)-1}
  if (input$parsource == 1) {
    param <- model()$par
  }
  else if (input$parsource == 2) {
    param[1] <- input$omega
    param[2] <- input$alpha
    param[3] <- input$beta
    param[4] <- input$lambda
  }
  input$simulate
  isolate(garch.MC(S_0, K, param, rf, nsim, t))
})

price <- reactive({
  nsim <- input$nsim
  t <- input$t
  K <- input$K

```



```

rf <- (1+input$r)^(1/365)-1
rf_d <- (1+input$r_d)^(1/365)-1
rf_f <- (1+input$r_f)^(1/365)-1
S <- sim()
if (input$type == "c") {
  if (input$under == 1) {
    payoff <- pmax(S[,ncol(S)]-K,0)*exp(-rf*t)
  }
  else if (input$under == 2) {
    payoff <- pmax(S[,ncol(S)]-K,0)*exp(-rf_d*t)
  }
}
else if (input$type == "p") {
  if (input$under == 1) {
    payoff <- pmax(K-S[,ncol(S)],0)*exp(-rf*t)
  }
  else if (input$under == 2) {
    payoff <- pmax(K-S[,ncol(S)],0)*exp(-rf_d*t)
  }
}
else if (input$type == "u") {
  if (input$under == 1) {
    MonAve = matrix(NA,nrow = 1, ncol = nsim)
    for(j in 1:nsim){
      MonAve[j] = mean(tail(S[j,], 30))
    }
    payoff = pmax(MonAve-K,0)*exp(-rf*t)
  }
  else if (input$under == 2) {
    MonAve = matrix(NA,nrow = 1, ncol = nsim)
    for(j in 1:nsim){
      MonAve[j] = mean(tail(S[j,], 30))
    }
    payoff = pmax(MonAve-K,0)*exp(-rf_d*t)
  }
}
mean(payoff)
})

price_BS <- reactive({
  S_0 <- input$S_0
  K <- input$K
  t <- input$t/365
  rf <- input$r
  rf_d <- input$r_d
  rf_f <- input$r_f
  sigma <- input$sigma
  type <- input$type
  if (type != "u") {
    Option <- GBSOption(TypeFlag = type, S = S_0, X = K, Time = t, r
=
      if (input$under == 1) {rf}
      else if (input$under == 2) {rf_d},
    b =
      if (input$under == 1) {0}
      else if (input$under == 2) {rf_d - rf_f},

```

```

        sigma = sigma
      )
      Option@price }
    else {"irrelevant for this option type"}
  })

results <- reactive({
  Duan <- price()
  BS <- price_BS()
  data.frame(c(Duan, BS), row.names = c("Duan", "Black-Scholes"))
})

risk <- reactive({
  p <- seq(from = 0.01, to = 0.1, by = 0.01)
  var_u <- quantile(ret(), p)
  prices <- input$S_0*(1+var_u)
  S_0 <- input$S_0
  K <- input$K
  t <- input$t/365
  rf <- input$r
  rf_d <- input$r_d
  rf_f <- input$r_f
  sigma <- input$sigma
  type <- input$type
  options <- GBSOption(TypeFlag = type, S = prices, X = K, Time = t,
r =
      if (input$under == 1) {rf}
    else if (input$under == 2) {rf_d},
    b =
      if (input$under == 1) {0}
    else if (input$under == 2) {rf_d - rf_f},
    sigma = sigma
  )
  BS <- GBSOption(TypeFlag = type, S = S_0, X = K, Time = t, r =
      if (input$under == 1) {rf}
    else if (input$under == 2) {rf_d},
    b =
      if (input$under == 1) {0}
    else if (input$under == 2) {rf_d - rf_f},
    sigma = sigma)
  a <- data.frame((options@price/BS@price)-1)

  es_u <- vector()
  for (i in 1:length(p)){
    es_u[i] <- ES(ret(), p = (1-pr[i]), method = "historical")
  }
  prices_es <- S_0*(1+es_u)
  options_es <- GBSOption(TypeFlag = type, S = prices_es, X = K, Time
= t, r =
      if (input$under == 1) {rf}
    else if (input$under == 2) {rf_d},
    b =
      if (input$under == 1) {0}
    else if (input$under == 2) {rf_d - rf_f},
    sigma = sigma
  )
  a[,2] <- (options_es@price/BS@price)-1

```

```

    colnames(a) <- c("VaR", "ES")
    a
  })

output$data <- renderTable({

  if (is.null(data())) {return()}
  else {tail(as.data.frame(data()),10)}
}, rownames = TRUE)

output$adf <- renderText({
  if (is.null(data())) {return()}
  else {paste("Return series are stationary with", 1-adf()$p.value,
"confidence by ADF test.")}
})

output$plot <- renderPlot({
  if (is.null(data())) {return()}
  else {plot(ret(), main = "Series returns")}})

output$returns <- renderTable({
  if (is.null(ret())) {return()}
  else {head(as.data.frame(ret()),30)}
}, rownames = TRUE)

output$GARCH <- renderTable(
  if (is.null(as.data.frame(model())$par)) {return()}
  else {data.frame(model()$par, row.names = c("omega", "alpha",
"beta", "lambda"))},
  rownames = TRUE,
  colnames = FALSE,
  digits = 5
)

output$conv <- renderText(
  if (is.null(as.data.frame(model())$convergence)) {return()}
  else if (model()$convergence == 0) {"Successful completion"}
  else {"Log-likelihood function is not converging"}
)

output$sigma_lr <- renderText(
  if (is.null(sigma_lr())) {return()}
  else {paste("Stationary annual GARCH sigma is", round(sigma_lr(),
digits = 4))}
)

output$sigma_h <- renderText(
  if (is.null(sigma_h())) {return()}
  else {paste("Historical annual sigma is", round(sigma_h(), digits =
4))}
)

output$paths <- renderPlot({
  K <- vector(length = input$t)
  K[] <- input$K

  if (is.null(sim())) {return()}

```

```

        else {plot("Price", type = "n", xlab = "t",
xlim=c(1,input$t),ylim=c(input$S_0*0.6,input$S_0*1.4))

        for (i in 1:200){
            lines(sim()[i,], type = "l")
        }
        lines(K, type = "l", col = "red", lwd = 3)
    }, height = 600)

output$price <- renderText(
    if (is.null(price())) {return()}
    else {paste("The price of the option:")}
)

output$results <- renderTable(
    if (is.null(results())) {return()}
    else {results()},
    rownames = TRUE,
    colnames = FALSE
)

output$risk <- renderTable(
    if (is.null(data())) {return("Please import historical data.")}
    else {risk()},
    digits = 4,
    rownames = TRUE,
    colnames = TRUE)
}
)

```

Додаток В

Програмний код додатку «Option pricing with GARCH». Файл «func.R»

```

garch.filter <- function(a0, a1, b1, l, ret, rf) {
  iT <- length(ret)
  sigma_2 <- rep(NA, iT)

  for (i in 1:length(ret)){
    if (i==1) {
      sigma_2[i] = var(ret)
    }
    else {
      sigma_2[i] = a0 + a1*(ret[i-1] - rf + .5*sigma_2[i-1] -
1*sqrt(sigma_2[i-1]))^2 + b1*sigma_2[i-1]
    }
  }
  return(sigma_2)
}

garch.filter_curr <- function(a0, a1, b1, l, ret, rf_d, rf_f) {
  iT <- length(ret)
  sigma_2 <- rep(NA, iT)
  rf <- rf_d - rf_f

  for (i in 1:length(ret)){
    if (i==1) {
      sigma_2[i] = var(ret)
    }
    else {
      sigma_2[i] = a0 + a1*(ret[i-1] - rf + .5*sigma_2[i-1] -
1*sqrt(sigma_2[i-1]))^2 + b1*sigma_2[i-1]
    }
  }
  return(sigma_2)
}

garch.LL <- function (param, retu = ret, rf) {
  a0 <- param[1]
  a1 <- param[2]
  b1 <- param[3]
  l <- param[4]

  LL = rep(NA, length(retu))
  e = rep(NA, length(retu))
  sigma_2 <- garch.filter(a0, a1, b1, l, retu, rf)
  for (i in 1:length(sigma_2)) {
    e[i] <- retu[i] - rf + .5*sigma_2[i]
    LL[i] <- log(1/sqrt(2*pi*sigma_2[i])) - 1/2*(e[i]^2/sigma_2[i])
  }
  Like <- sum(LL)
  return(-Like)
}

garch.LL_curr <- function (param, retu = ret, rf_d, rf_f) {

```

```

a0 <- param[1]
a1 <- param[2]
b1 <- param[3]
l <- param[4]
rf <- rf_d - rf_f
LL = rep(NA, length(retu))
e = rep(NA, length(retu))
sigma_2 <- garch.filter_curr(a0, a1, b1, l, retu, rf_d, rf_f)
for (i in 1:length(sigma_2)) {
  e[i] <- retu[i] - rf + .5*sigma_2[i]
  LL[i] <- log(1/sqrt(2*pi*sigma_2[i])) - 1/2*(e[i]^2/sigma_2[i])
}
Like <- sum(LL)
return(-Like)
}

garch.MC <- function(S_0, K, param, rf, nsim, t) {

  a0 <- param[1]
  a1 <- param[2]
  b1 <- param[3]
  l <- param[4]

  h0 <- a0/(1 - a1*(1+l^2) - b1)

  ret <- zt <- et <- ht <- S <- matrix(NA, nc=t+1, nr=nsim)
  ht[,1] <- h0
  S[,1] <- S_0
  zt[,1] <- rnorm(nsim)
  et[,1] <- zt[,1]*sqrt(ht[,1])

  for (i in 1:t){
    ht[,i+1] <- a0 + a1*(et[,i] - l*sqrt(ht[i]))^2 +b1*ht[,i]
    zt[,i+1] <- rnorm(nsim)
    et[,i+1] <- zt[,i+1]*sqrt(ht[,i+1])
    ret[,i+1] <- rf - 0.5*ht[,i+1] + et[,i+1]
    S[,i+1] <- S[,i]*exp(ret[,i+1])
  }

  return(S)
}

garch.MC_curr <- function(S_0, K, param, rf_d, rf_f, nsim, t) {

  a0 <- param[1]
  a1 <- param[2]
  b1 <- param[3]
  l <- param[4]
  rf <- rf_d - rf_f

  h0 <- a0/(1 - a1*(1+l^2) - b1)

  ret <- zt <- et <- ht <- S <- matrix(NA, nc=t+1, nr=nsim)
  ht[,1] <- h0
  S[,1] <- S_0
  zt[,1] <- rnorm(nsim)
  et[,1] <- zt[,1]*sqrt(ht[,1])

```

```

for (i in 1:t){
  ht[,i+1] <- a0 + a1*(et[,i] - 1*sqrt(ht[i]))^2 + b1*ht[,i]
  zt[,i+1] <- rnorm(nsim)
  et[,i+1] <- zt[,i+1]*sqrt(ht[,i+1])
  ret[,i+1] <- rf - 0.5*ht[,i+1] + et[,i+1]
  S[,i+1] <- S[,i]*exp(ret[,i+1])
}

return(S)
}

```

Додаток Г

Інтерфейс додатку «Option pricing with GARCH».

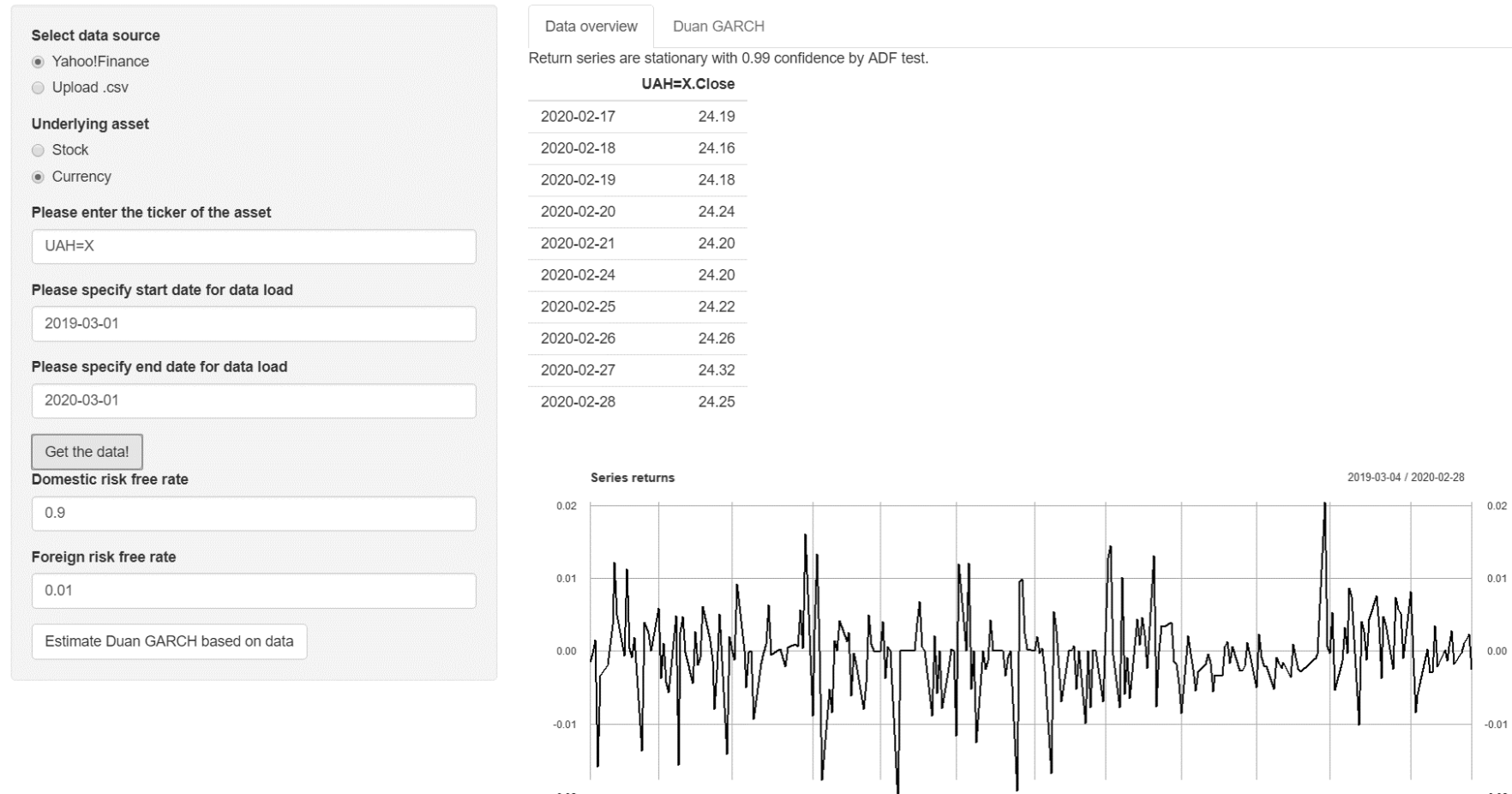


Рисунок Г.1. Інтерфейс оцінки параметрів моделі. Огляд даних.

Select data source
☒ Yahoo!Finance
☐ Upload .csv

Underlying asset
☐ Stock
☒ Currency

Please enter the ticker of the asset

Please specify start date for data load

Please specify end date for data load

Domestic risk free rate

Foreign risk free rate

[Data overview](#)

Duan GARCH

omega	0.00001
alpha	-0.02041
beta	1.06233
lambda	3.32718

Log-likelihood function is not converging
Stationary annual GARCH sigma is 0.1273
Historical annual sigma is 0.1065

Рисунок Г.2. Інтерфейс оцінки параметрів моделі. Результати оцінки.

Underlying asset

☐ Stock

☒ Currency

Option type

☒ Call

☐ Put

☐ Ukrainian embedded call

Today price of the asset

Strike price

Domestic risk free rate

Foreign risk free rate

Days to maturity

Number of simulations

Parameters source:

☒ Previous estimation

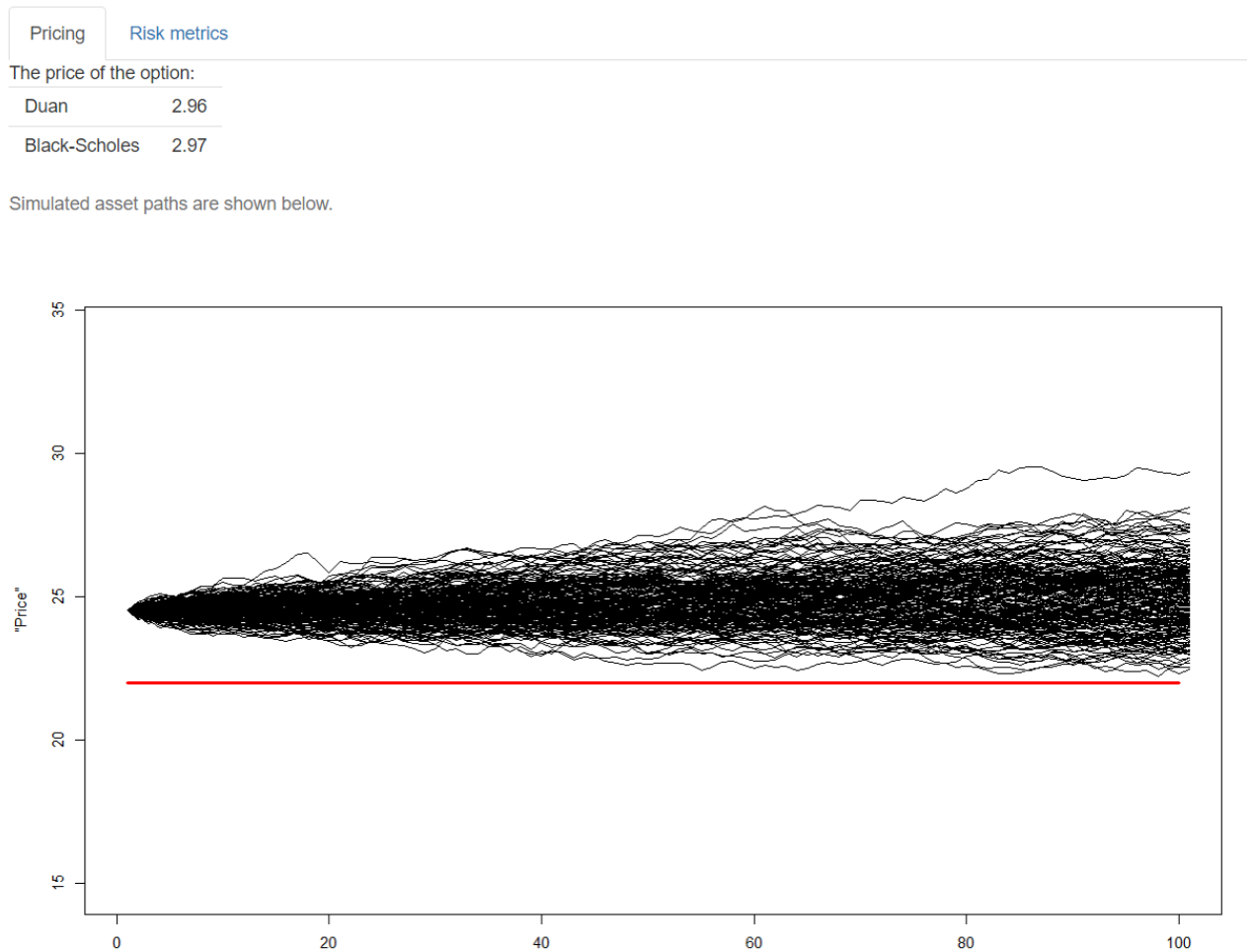


Рисунок Г.3. Інтерфейс Монте Карло симуляцій. Оцінка вартості опціону.

Underlying asset

☐ Stock
 ☒ Currency

Option type

☒ Call
 ☐ Put
 ☐ Ukrainian embedded call

Today price of the asset

24.5

Strike price

22

Domestic risk free rate

0.09

Foreign risk free rate

0.01

Pricing

Risk metrics

	VaR	ES
1%	-0.1351	-0.1725
2%	-0.1146	-0.1588
3%	-0.0875	-0.1499
4%	-0.0782	-0.1421
5%	-0.0693	-0.1370
6%	-0.0647	-0.1293
7%	-0.0629	-0.1230
8%	-0.0570	-0.1174
9%	-0.0510	-0.1126
10%	-0.0467	-0.1098

Рисунок Г.4. Інтерфейс Монте Карло симуляцій. Оцінка ризику.