

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

КОСПЕКТРАЛЬНІ РЕГУЛЯРНІ ГРАФИ

Текстова частина до курсової роботи
за спеціальністю «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Керівник курсової роботи:

Ст. викладач, канд. ф.-м. наук
Лебідь Вікторія Олександрівна

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала студентка:

Гришко Надія Вадимівна

“ ____ ” _____ 2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,

проф. Олійник Б. В.

 (підпис)
 „____” _____ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на курсову роботу

студентці Гришко Н.В. факультету інформатики 4 курсу

ТЕМА «Коспектральні регулярні графи»

Вихідні дані:

- Haemers W.H. Cospectral pairs of regular graphs with different connectivity. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 40(2), 2020, 577-584.
- Zoltán L. Blázsik, Jay Cummings, Willem H. Haemer Cospectral regular graphs with and without a perfect matching. *Discrete Mathematics*, 338(3), 2015, 199-201.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Зміст

Вступ

1. Основні означення та твердження

1.1 Основні означення

1.2 Спектри деяких спеціальних типів графів

2. Спектральні характеристики регулярних графів

3. Коспектральні регулярні графи з та без досконалого парування

Висновки

Список літератури

Дата видачі „____” _____ 2020 р. Керівник _____
 (підпис)

Завдання отримала _____
 (підпис)

Календарний план виконання роботи

Тема: Коспектральні регулярні графи

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	22.10.2019	
2.	Огляд наукових статей за темою роботи.	28.10.2019	
3.	Ознайомлення з основними поняттями.	10.11.2019	
4.	Знаходження спектру графів.	30.11.2019	
5.	Створення малюнків та ілюстрацій.	15.12.2019	
6.	Формулювання тверджень та теорем.	23.12.2019	
7.	Доведення теорем.	07.01.2020	
8.	Знаходження спектру кожної з пар коспектральних графів.	20.01.2020	
9.	Написання курсової роботи.	22.02.2020	
10.	Оформлення малюнків, ілюстрацій та посилань.	19.03.2020	
11.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	03.04.2020	
12.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	15.04.2020	
13.	Остаточна перевірка курсової роботи науковим керівником.	19.04.2020	
14.	Захист курсової роботи.	24.04.2020	

Студент _____

Керівник _____

“ ”

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1: Основні означення та твердження.....	8
1.1 Основні означення	8
1.2 Спектри деяких спеціальних типів графів.....	11
РОЗДІЛ 2: Спектральні характеристики регулярних графів	14
РОЗДІЛ 3: Коспектральні регулярні графи з та без досконалого парування ...	233
ВИСНОВКИ.....	311
Список використаної літератури	322

ВСТУП

Дана курсова робота присвячена дослідженню теорії коспектральних регулярних графів, їх властивостей та пов'язаних з ними теорем і доведень. Вона складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

Спектральна теорія графів має довгу історія та бере свій початок у далеких 1950-х – 1960-х роках, саме в той час, коли активно почали досліджувати взаємозв'язок між структурними та спектральними властивостями графів, що дало поштовх новому напрямку в галузі математики, такому як спектральна теорія графів. В ті часи теорія матриць та лінійна алгебра використовувалися для аналізу матриць суміжності графів. Крім того, алгебраїчні методи особливо ефективні при обробці регулярних та симетричних графів.

За останні десять років багато розробок в теорії спектральних графів часто мали геометричний характер. З'явилося чимало нових спектральних методів, які добре підходять для роботи із загальними графами. Можна сказати, що теорія спектральних графів увійшла в нову еру.

Так само, як астрономи вивчають спектри зірок для визначення складу далеких зірок, так математики досліджують зв'язок виведення головних властивостей та структури графа з його спектру. Спектральний підхід для загальних графів є важливим кроком у цьому напрямку. Ми побачимо, що власні значення тісно пов'язані майже з усіма основними інваріантами графа, пов'язуючи одне екстремальне значення з іншим. Немає сумніву, що власні значення відіграють центральну роль у фундаментальному розумінні графів.

Актуальність обраної мною теми обумовлена наступними факторами:

- Спектральна теорія графів тісно пов'язана з багатьма галузями людської діяльності, такими як: програмування, медицина, хімія.

- Спектри графів природнім шляхом виникають в різних проблемах теоретичної фізики та квантової механіки.
- Нещодавній розвиток спектральної теорії графів мав вагомий внесок у процес наукових досліджень, що стосуються загальної математики.

Виходячи із тенденції дослідження, метою даної курсової роботи є дослідити спектри коспектральних регулярних графів, встановити взаємозв'язок між власними значеннями матриці суміжності та матриці Лапласа, а також сформулювати та довести теореми, пов'язані з коспектральними парами графів, що мають досконале парування і тими, які такого парування не мають.

У роботі розглянуто та доведено наступні теореми:

- Теорема про спектр регулярного графа
- Теорема про граф, коспектральний заданому відносно матриці суміжності
- Теорему про пару коспектральних зв'язних k - регулярних графів, де один із графів має досконале парування, а інший – ні
- Теорему про зв'язний k -регулярний граф на n вершинах, який має досконале парування.

Робота складається з трьох розділів.

У першому розділі наведені основні означення та початкові відомості зі спектральної теорії графів, а також розглянуті спектри спеціальних типів графів.

Другий розділ присвячений спектральним характеристикам регулярних графів. В ньому дано визначення основних матриць, що розглядаються в роботі, а також сформульовані твердження про спектр регулярного графа і теорема про побудову графа, коспектрального заданому відносно матриці суміжності.

У третьому розділі дано визначення графів з та без досконалого парування, наведено приклади таких графів. Сформульовані теореми про пару коспектральних зв'язних k - регулярних графів, де один із графів має досконале

парування, а інший – ні, теорему про зв'язний k -регулярний граф на n вершинах, який має досконале парування. Також сформульовано наслідок про зв'язний кубічний граф на n вершинах, де n – парне, який має досконале парування.

РОЗДІЛ 1: Основні означення та твердження

1.1 Основні означення

Теорія спектральних графів вивчає відношення між структурою графа та власними значеннями (спектром) асоційованих матриць, таких як: матриця суміжності A та матриця Лапласа L .

Варто пояснити деякі важливі терміни.

Означення 1.1.1

Неорієнтованим графом G називається впорядкована пара (V, E) , в якій V – це деяка непорожня множина (множина вершин) і E – це множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів (множина ребер).

Означення 1.1.2

Дві вершини v_1, v_2 називаються **суміжними**, якщо вони з'єднані ребром, тобто існує ребро $e \in E$: $e = (v_1, v_2)$, причому говорять, що ребро e є інцидентним, як вершині v_1 так і вершині v_2 .

Означення 1.1.3

Матриця суміжності графа G зі скінченною кількістю вершин n (пронумерованих числами від 1 до n) – це квадратна матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ розміру $n \times n$, в якій значення елементу a_{ij} рівне числу ребер з i -ї вершини графа в j -у вершину. Для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі.

Означення 1.1.4

Матриця Лапласа (позначається як L) для кінцевого неорієнтованого графа Γ , що не має циклів – це матриця, індексована набором вершин графа Γ з нульовими сумами рядків, яку можна записати в загальному вигляді як

$$L_{xy} = D_{xx} - A_{xy}$$

Або L_{xy} дорівнює

- $-A_{xy}$, якщо $x \neq y$
- D_{xx} , якщо $x = y$,

де $D = \{D_{xx}\}$ – діагональна матриця, що містить інформацію про степені кожної вершини, елемент D_{xx} дорівнює кількості ребер, що виходять із вершини x ;

$A = \{A_{xy}\}$ – матриця суміжності.

Означення 1.1.5

Характеристичний поліном квадратної матриці A розміру $n \times n$ – це многочлен степені n від змінної θ , що дорівнює

$$p_A(\theta) = \det(\theta I_n - A), \text{ де } I_n \text{ – це одинична матриця порядку } n.$$

Означення 1.1.6

Власні числа (власні значення) графа визначаються як власні числа його матриці суміжності. Якщо існує вектор $X \in \mathbb{R}^n \neq 0$, такий що

$$AX = \lambda X$$

для деякого скаляра λ , то λ називається власним значенням матриці A з відповідним власним вектором X .

Означення 1.1.7

Спектр графа – це сукупність усіх власних значень його матриці суміжності разом з їх кратністю.

Означення 1.1.8

Шлях – впорядкований набір вершин, де всі ребра орієнтовані в напрямку руху від початкової до кінцевої вершини цього набору.

1.2 Спектри деяких спеціальних типів графів

Перш ніж перейти до графів наступного виду, варто дати означення доповнення до графа.

Означення 1.2.1

Доповнення до графа G (обернений граф) – це граф H , який має ту ж саму множину вершин, що і заданий граф G , але в якому дві вершини, що не співпадають, суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в G .

Теорема 1.2.1 [1]

Нехай G – регулярний граф степеня k на n вершинах, тоді

$$P_{\bar{G}}(\theta) = (-1)^n \cdot \frac{\theta - n + k + 1}{\theta + k + 1} \cdot P_G(-\theta - 1)$$

Іншими словами, якщо спектр графа G містить $\theta_1 = k, \theta_2, \dots, \theta_n$, то спектр графа G містить $n - 1 - k, -\theta_2 - 1, \dots, -\theta_n - 1$.

Доведення

Оскільки маршрут може починатися з будь-якої із n вершин графа G і може бути продовжений з довільної вершини точно k способами, то число N_p маршрутів довжини p в графі G дорівнює $N_p = nk^p$. Відповідно, для похідної функції $H_G(t)$ маємо

$$H_G(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} N_p t^p = \sum_{p=0}^{+\infty} nk^p t^p = \frac{n}{1 - kt} \cdot \left(|t| < \frac{1}{k} \right).$$

Тоді згідно з Теоремою 1.11 (див. [1] с.44) число маршрутів між двома фіксованими вершинами графа має вираз:

$$\frac{1}{t} \cdot \left[(-1)^n \cdot \frac{P_{\bar{G}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{P_G\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right] = \frac{n}{1 - kt}$$

Якщо в цій рівності покласти, що $-\frac{t+1}{t} = \lambda$, отримуємо твердження Теорема 1.2.1.

Розглянемо спектри графів деяких відомих типів. Почнемо з графів, що не мають ребер.

- 1) Для графа G з n вершинами без ребер (або петель) характеристичний многочлен має наступний вигляд:

$$P_G(\theta) = \theta^n,$$

тобто спектр складається з n чисел, що дорівнюють 0.

Це не складно довести, адже матриця суміжності A для графа G з n вершинами – це квадратна матриця розміру $n \times n$, заповнена нулями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & & \dots & & \\ \dots & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді характеристичний поліном такої матриці можна знайти наступним чином:

$$P_G(\theta) = \det(\theta I - A) = \theta^n.$$

- 2) Тепер розглянемо повний граф K_n з n вершинами. Оскільки він є доповненням до графа, що не має ребер, то за допомогою теореми 1.2.1 отримуємо $P_{K_n}(\theta) = (\theta - n + 1)(\theta + 1)^{n-1}$, тобто спектр графа K_n складається з числа $(n - 1)$ та $(n - 1)$ чисел, що дорівнюють -1 .

Наглядно проілюструємо використання теореми при знаходженні спектру повного графа. У теоремі 1.2.1 замість $P_{\bar{G}}(\theta)$ підставимо θ^n , а також

скористаємося властивістю, що степінь кожної вершини повного графа дорівнює $(n-1) = k$. Отже, отримуємо наступне рівняння:

$$\theta^n = (-1)^n \frac{\theta - n + (n-1) + 1}{\theta + (n-1) + 1} \cdot P_G(-\theta - 1)$$

$$\theta^n = (-1)^n \cdot \frac{\theta}{\theta + n} \cdot P_G(-\theta - 1)$$

З цього рівняння виразимо $P_G(-\theta - 1)$

$$P_G(-\theta - 1) = \frac{(\theta)^n \cdot (\theta + n)}{(-1)^n \cdot \theta}$$

$$P_G(-\theta - 1) = \frac{(\theta)^{n-1} \cdot (\theta + n)}{(-1)^n}$$

$$P_G(-\theta - 1) = (-1)^n \cdot (\theta)^{n-1} \cdot (\theta + n)$$

$$P_G(-\theta - 1) = (-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot (\theta)^{n-1} \cdot (\theta + n) \quad (1.2.1)$$

Зробимо заміну $(-\theta - 1) = \lambda$, тоді

$$-\theta = \lambda + 1$$

$$\theta = -\lambda - 1$$

Підставимо в рівняння (1.2.1):

$$P_G(\lambda) = (-1) \cdot (\lambda + 1)^{n-1} \cdot (-\lambda - 1 + n)$$

$$P_G(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-1} \cdot (\lambda - n + 1)$$

Тепер, замінюючи λ на θ , отримаємо спектр повного графа K_n ,

вказаного у пункті 2:

$$P_G(\theta) = (\theta + 1)^{n-1} \cdot (\theta - n + 1).$$

РОЗДІЛ 2: Спектральні характеристики регулярних графів

Надалі у роботі будуть розглядатися лише регулярні графи. Наведемо означення регулярного графа та його основних властивостей.

Означення 2.1

Граф Γ називається **регулярним** степеня k , якщо кожна його вершина суміжна точно з k вершинами. Тобто, для регулярного графа Γ степеня k його матриця суміжності має суму рядків k .

Властивості регулярних графів:

- Для кожного власного значення θ маємо: $|\theta| \leq k$
- Виконується рівність: $L = kI - A$, де L – матриця Лапласа;

I – одинична матриця;

A – матриця суміжності графа Γ .

- Якщо Γ має власні значення матриці суміжності $k = \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ та власні значення матриці Лапласа $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, тоді $\theta_i = k - \mu_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Властивості, які характеризуються спектром як для A , так і для L , – це число вершин, кількість ребер та регулярність. Якщо граф регулярний, знаючи спектр A , можемо знайти спектр L , і навпаки. Це означає, що для A і L властивості регулярності та дводольності, а також регулярності та зв'язності характеризуються спектром.

Якщо властивість не характеризується спектром, то існує пара коспектральних графів, де один має властивість, а інший – ні. Для багатьох властивостей графа та декількох типів матриць, асоційованих з графом, такі пари не важко знайти. Однак, якщо обмежитись регулярними графами, це стає складніше і цікавіше, оскільки пара регулярних коспектральних графів, де один має задану властивість, а інший – ні, є контрприкладом для спектральної характеристики відносно A , L та декількох інших видів матриць. Така пара регулярних коспектральних графів була знайдена для ряду властивостей, наприклад, графи можуть бути регулярними за відстанню, мати заданий діаметр.

Надалі в курсовій роботі будемо розглядати такі матриці:

- A – матриця суміжності
- $\bar{A}$ – матриця суміжності доповнення; вона дорівнює $\bar{A} = J - A - I$,

де J – матриця, що складається тільки з одиниць;

I – одинична матриця, тобто така, що містить на головній діагоналі одиниці, а інші значення дорівнюють 0.

- L – матриця Лапласа, $L = D - A$, де D – діагональна матриця, тобто така, що містить на головній діагоналі степінь кожної вершини, всі інші значення заповнені нулями.
- $|L|$ – беззнакова матриця Лапласа, $|L| = D + A$.

Твердження 2.1

Регулярний граф визначений спектром тоді і тільки тоді, якщо він визначається своїм спектром відносно матриць $A, \bar{A}, L, |L|$.

Усі регулярні графи менш, ніж на 10 вершинах, визначаються своїм спектром. Всього на 10 вершинах існують 4 пари коспектральних графів. Одну із них ми будемо надалі розглядати.

Теорема 2.1 [1]

Нехай Γ – граф, X та Y – розбиття множини вершин Γ на два класи таким чином, що кожна вершина $y \in Y$ є суміжною або з 0, або $\frac{1}{2}|X|$, або з усіма вершинами X .

Утворимо граф Γ' наступним чином:

- 1) Для кожної вершини $y \in Y$, яка є суміжною з $\frac{1}{2}|X|$ вершин в X , видалимо $\frac{1}{2}|X|$ ребер між y та відповідними вершинами класу X ;
- 2) Вставимо $\frac{1}{2}|X|$ ребер між y та іншими вершинами в X .

Тоді отриманий граф Γ' коспектральний графу Γ відносно матриці суміжності.

Даний спосіб побудови коспектральної пари графів запропонували Годзіл та Маккей [5]. Таке перетворення, при якому для заданого графа можна знайти новий граф, коспектральний заданому, має назву **перемикання Godsil-МакКей**. Тоді набір вершин X називається **множиною перемикання GM**, і перша умова теореми означає, що підграф X графа Γ є регулярним.

Приклад 2.1 (до теореми 2.1)

Нехай маємо регулярний граф Γ степеня $k = 4$ на десятих вершинах (Рисунок 2.1). Розіб'ємо множину вершин Γ на два класи X та Y наступним чином:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $Y = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$
- $|X| = 4$

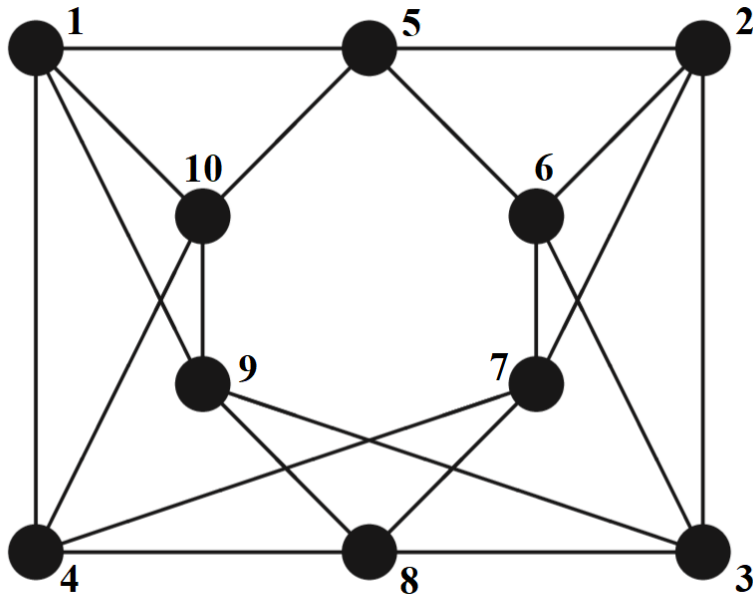


Рисунок 2.1 – Граф Γ

За умовою теореми для кожної вершини y , яка має $\frac{1}{2}|X|$ суміжних вершин з X , треба видалити $\frac{1}{2}|X|$ ребер, що з'єднують y та відповідні вершин з X .

Вершина з класу Y	Початкове з'єднання з вершинами класу X	Отримане з'єднання з вершинами класу X
x_5	x_1, x_2	x_3, x_4
x_6	x_2, x_3	x_1, x_4
x_7	x_2, x_4	x_1, x_3
x_8	x_3, x_4	x_1, x_2
x_9	x_1, x_3	x_2, x_4
x_{10}	x_1, x_4	x_2, x_3

В результаті виконання умов алгоритму утвориться граф Γ' наступного вигляду:

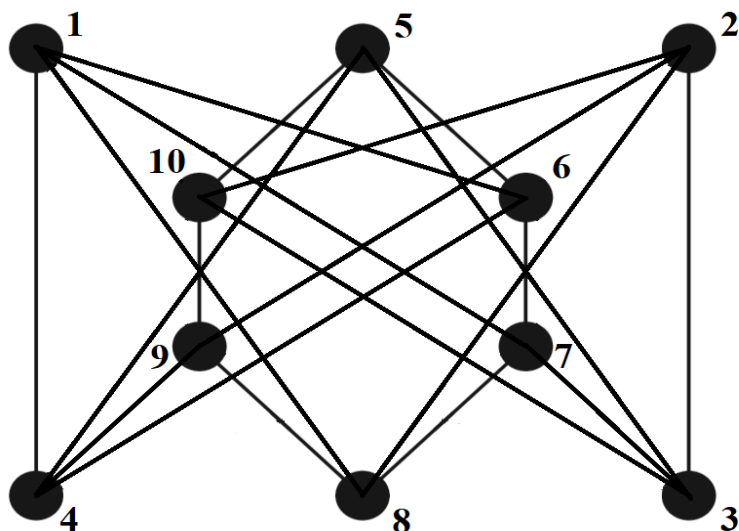


Рисунок 2.2 – Граф Γ'

Як бачимо, граф, що утворився, є складним для сприйняття, тому перенумеруємо вершини графа Γ' наступним чином:

$1 \leftrightarrow 4$
$2 \leftrightarrow 3$
$3 \leftrightarrow 2$
$4 \leftrightarrow 1$
$5 \leftrightarrow 5$
$6 \leftrightarrow 10$
$7 \leftrightarrow 9$
$8 \leftrightarrow 8$
$9 \leftrightarrow 7$
$10 \leftrightarrow 6$

Це допоможе отримати граф Γ'' (Рисунок 2.3), що є коспектральним графу Γ (Рисунок 2.1) та ізоморфним графу Γ' (Рисунок 2.2).

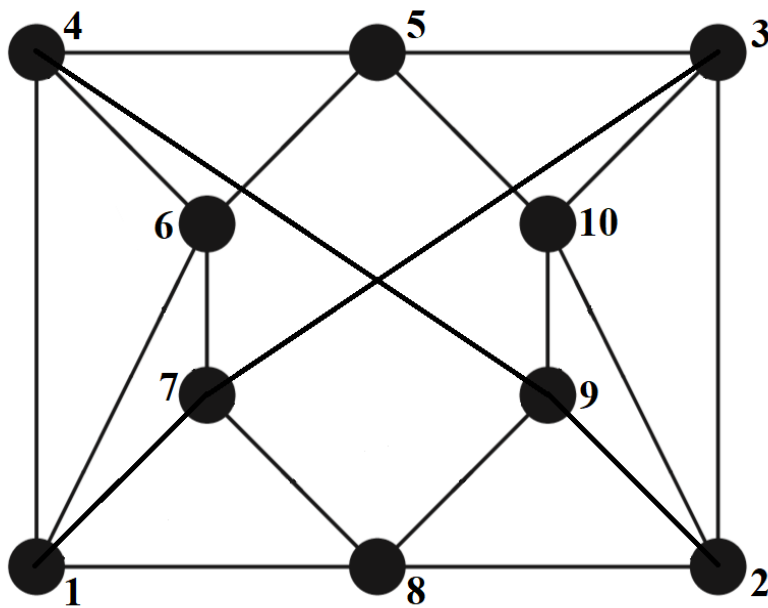


Рисунок 2.3 – Граф Γ''

Щоб довести, що графи Γ та Γ'' дійсно коспектральні, знайдемо їх власні числа та переконаємося в тому, що вони мають однаковий спектр.

Матриця суміжності A для графа Γ :

0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Характеристичний многочлен:

$$P(\theta) = \theta^{10} - 20\theta^8 - 16\theta^7 + 110\theta^6 + 136\theta^5 - 180\theta^4 - 320\theta^3 + 9\theta^2 + 200\theta + 80$$

Власні числа матриці суміжності A для графа Γ , які є нулями характеристичного многочлена:

$$\theta_1 = 4 = k$$

$$\theta_2 = \sqrt{5}$$

$$\theta_3 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$\theta_4 = 1$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = -1$$

$$\theta_9 = -\sqrt{5}$$

$$\theta_{10} = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$$

За властивістю регулярних графів (якщо Γ має власні значення матриці суміжності $k = \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ та власні значення матриці Лапласа $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, тоді $\theta_i = k - \mu_i$ для $i = 1, \dots, n$.) знайдемо власні числа матриці Лапласа L , керуючись наступною формулою:

$$\mu_i = 4 - \theta_i, \text{ де } i = 1, \dots, 10.$$

$$\mu_1 = 4 - 4 = 0$$

$$\mu_2 = 4 - \sqrt{5}$$

$$\mu_3 = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

$$\mu_4 = 4 - 1 = 3$$

$$\mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 4 + 1 = 5$$

$$\mu_9 = 4 + \sqrt{5}$$

$$\mu_{10} = 4 - \frac{-\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Матриця суміжності А для графа Γ'' :

0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0

Характеристичний многочлен:

$$P(\theta) = \theta^{10} - 20\theta^8 - 16\theta^7 + 110\theta^6 + 136\theta^5 - 180\theta^4 - 320\theta^3 + 9\theta^2 + 200\theta + 80$$

Власні числа матриці суміжності А для графа Γ'' , які є нулями характеристичного многочлена:

$$\theta_1 = 4 = k$$

$$\theta_2 = \sqrt{5}$$

$$\theta_3 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$\theta_4 = 1$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = -1$$

$$\theta_9 = -\sqrt{5}$$

$$\theta_{10} = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$$

Власні числа матриці Лапласа L для графа Γ'' :

$$\mu_i = 4 - \theta_i, \text{ де } i = 1, \dots, 10.$$

$$\mu_1 = 4 - 4 = 0$$

$$\mu_2 = 4 - \sqrt{5}$$

$$\mu_3 = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

$$\mu_4 = 4 - 1 = 3$$

$$\mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 4 + 1 = 5$$

$$\mu_9 = 4 + \sqrt{5}$$

$$\mu_{10} = 4 - \frac{-\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Як бачимо, власні числа обох матриць суміжності однакові, отже можна зробити висновок, що графи Γ і Γ'' – коспектральні.

РОЗДІЛ 3: Коспектральні регулярні графи з та без досконалого парування

Перш, ніж почати цей розділ, варто дати визначення деяких термінів, які знадобляться для подальшого розуміння.

Означення 3.1

Нехай маємо граф $G = (V, E)$, тоді паруванням M в G називається множина попарно несуміжних ребер, тобто таких, що не мають спільних вершин.

Наведемо деякі приклади парування:

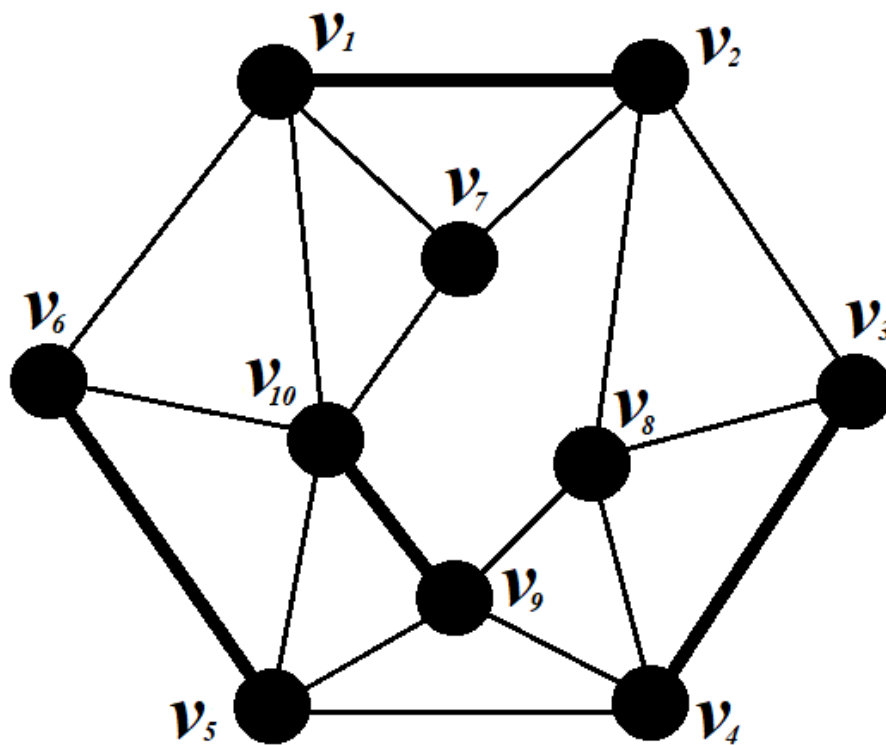


Рисунок 3.1

$$M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_9v_{10}\}$$

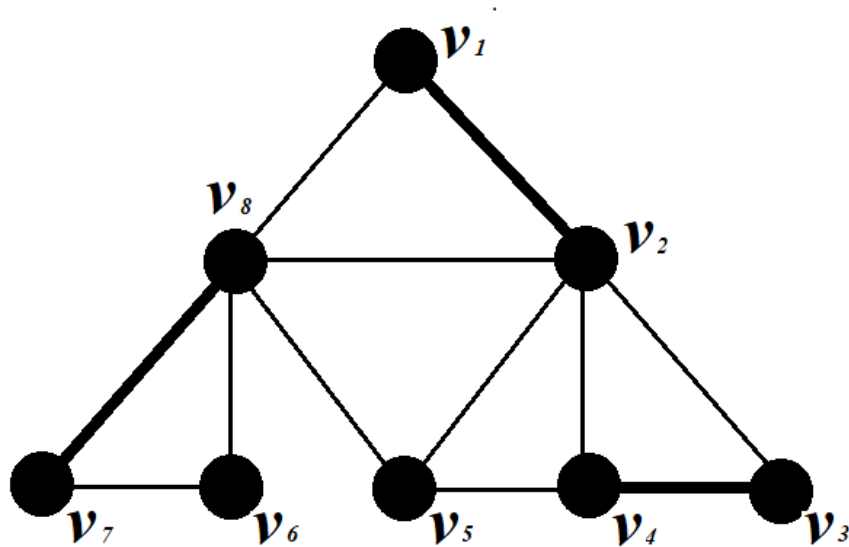


Рисунок 3.2

$$M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_7v_8\}$$

Означення 3.2

Досконале парування – це парування, яке покриває всі вершини графа. Тобто кожна з вершин графа інцидентна одному з ребер в паруванні.

У прикладах, зазначених вище, можна побачити, що існують вершини, які не є інцидентними ребрам з множини M , отже таке парування не буде досконалим. Наведемо приклади досконалого парування:

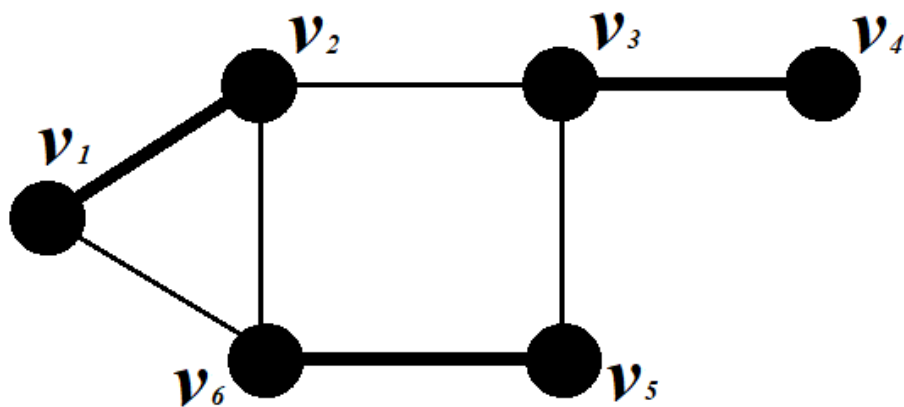


Рисунок 3.3

$$M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$$

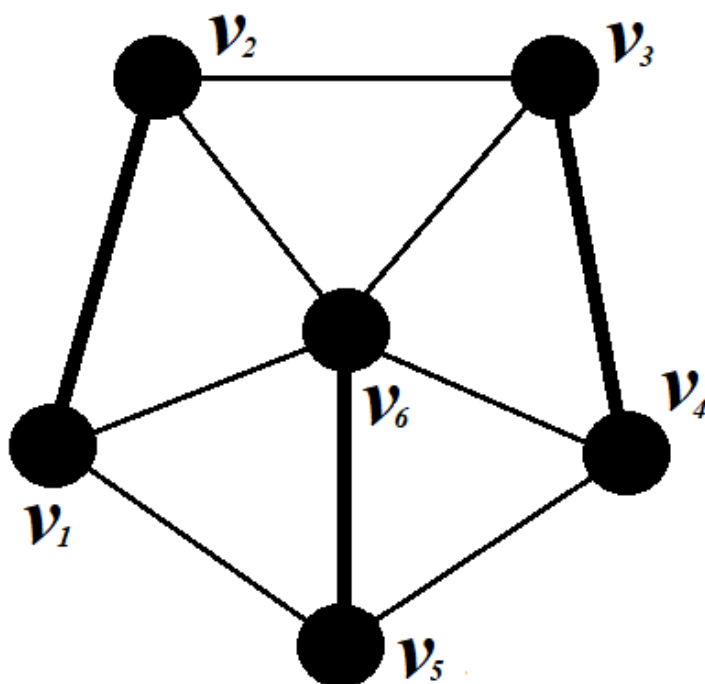


Рисунок 3.4

$$M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$$

Як бачимо, всі вершини графа G інцидентні одному із ребер парування, отже, таке парування є досконалим. Надалі в цьому розділі ми будемо розглядати пари коспектральних регулярних графів, де один граф буде мати досконале парування, а інший – ні.

Теорема 3.1 [4]

Для кожного $k \geq 5$ (де k – степінь вершин графа) існує пара коспектральних зв'язних k -регулярних графів, де один із графів має досконале парування, а інший – ні.

Граф називається **зв'язним**, якщо він містить тільки одну компоненту зв'язності, тобто між будь-якою парою вершин цього графа існує шлях.

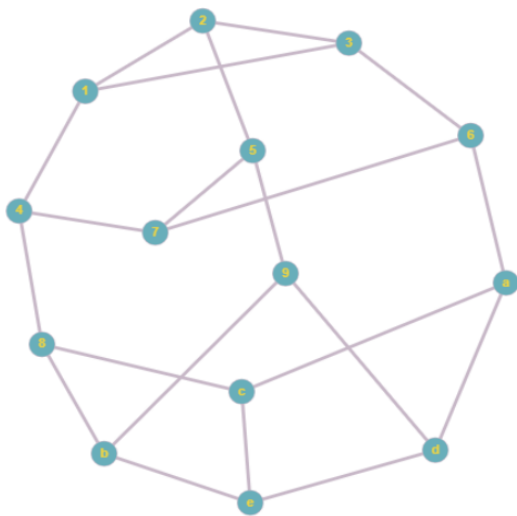
Варто зазначити, що в деяких випадках краще використовувати саме регулярні графи вищих степенів на множині X . Але що робити, якщо $k \leq 4$?

Насправді, якщо $k \leq 2$ не існує неізоморфних коспектральних графів. Якщо $k=3$, можна побачити, що не існує *перемикання Годзіл – Маккея* між графом, що має ідеальне парування та графом, що такого парування не має. Окрім того, Стівеном Хартке за допомогою комп'ютера було перевірено усі 3-регулярні пари коспектральних графів на більш ніж 20 вершинах і не знайдено жодного прикладу. Отже, не виключено, що для ступеня $k = 3$ такої пари графів не існує.

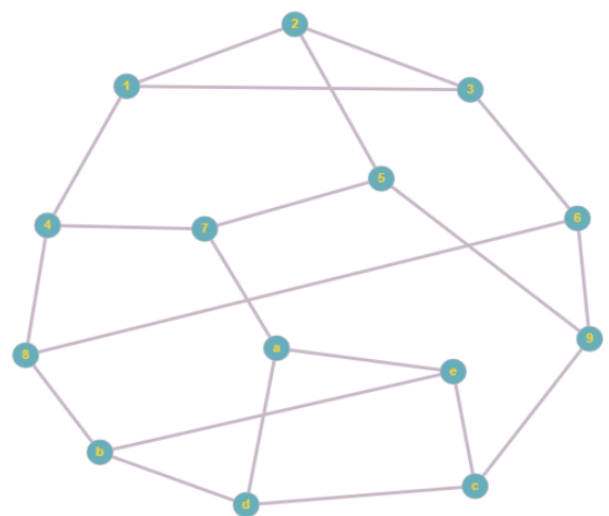
Важливим є той факт, що на 14 вершинах з'являються перші три пари коспектральних кубічних графів. Продемонструємо ці три пари графів і покажемо, що не існує таких пар, де в одному графі є досконале парування, а в іншому – немає.

Для $i = 1, 2, 3$ графи L_i та L_i' – коспектральні. Позначення Σ_i означає спектр графа L_i .

Перша пара графів:



Граф L_1

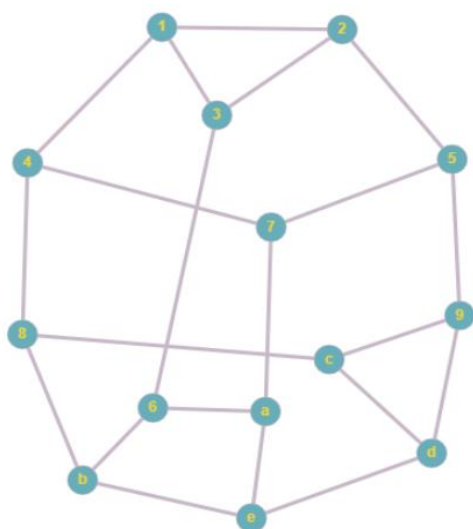
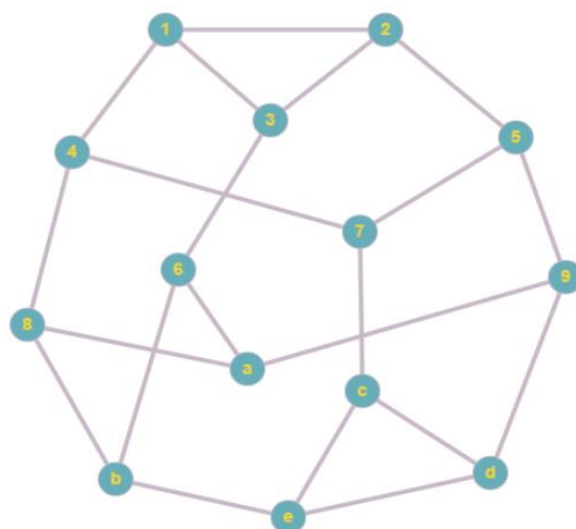


Граф L_1'

Спектр першої пари графів:

$$\Sigma_1 = \{ 3, 2.4329, 1.5321, 1.5321, 1.2555, 0.3473, 0.3473, 0, -1, -1, -1.8372, -1.8794, -1.8794, -2.8512 \}$$

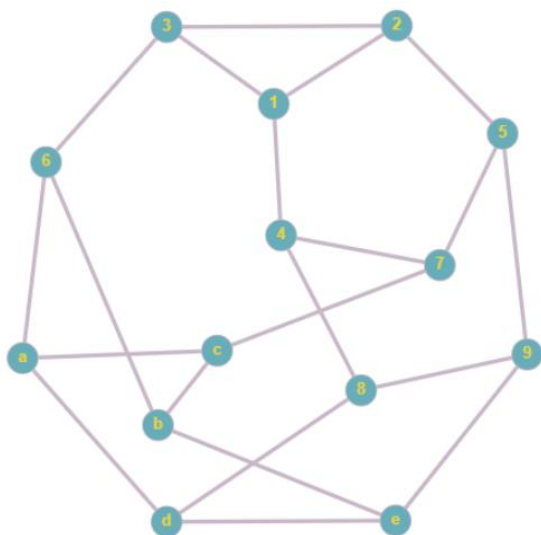
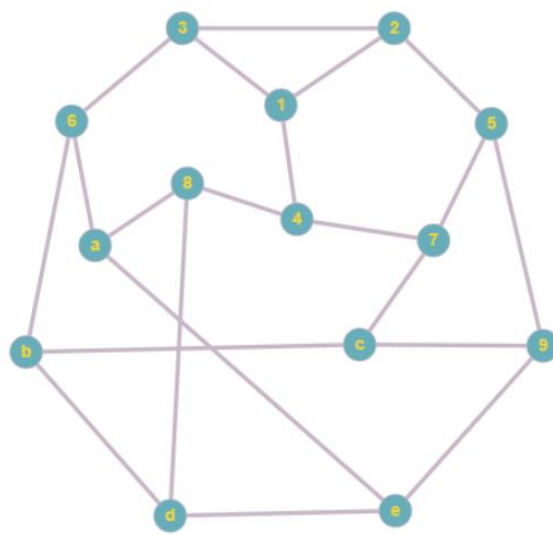
Друга пара графів:

Граф L_2 Граф L_2'

Спектр другої пари графів:

$$\Sigma_2 = \{3, 2.2863, 1.9319, 1.4142, 1.4142, 0.5176, 0.2627, -0.5176, -1, -1.4142, -1.4142, -1.8521, -1.9319, -2.6970\}$$

Третя пара графів

Граф L_3 Граф L_3'

Спектр третьої пари графів:

$$\Sigma_3 = \{ 3, 2.2245, 1.9276, 1.4598, 1.1701, 0.6180, 0.1743, -0.4352, -0.6889, -0.8319, -1.6180, -2.0569, -2.4621, -2.4812\}$$

Теорема 3.2 [4]

Зв'язний k -регулярний граф на n вершинах, де n – парне, з власними значеннями матриці суміжності $k = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, які задовольняють умові

$$\lambda_3 \leq \begin{cases} k - 1 + \frac{3}{k + 1}, \text{ якщо } k - \text{ парне} \\ k - 1 + \frac{4}{k + 2}, \text{ якщо } k - \text{ непарне} \end{cases}$$

має досконале парування.

Сформулюємо наслідок цієї теореми для кубічних графів.

Наслідок 3.2

Зв'язний кубічний граф на n вершинах, де n – парне, із власними числами матриці суміжності $3 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, який задовольняє умові

$$\lambda_3 \leq 2.8$$

має досконале парування.

Чому в наслідку 3.2 фігурує саме така умова, нескладно побачити з теореми 3.2. Отже, при $k = 3$ маємо:

$$\lambda_3 \leq k - 1 + \frac{4}{k + 2} = 3 - 1 + \frac{4}{3 + 2} = 2 + \frac{4}{5} = 2.8$$

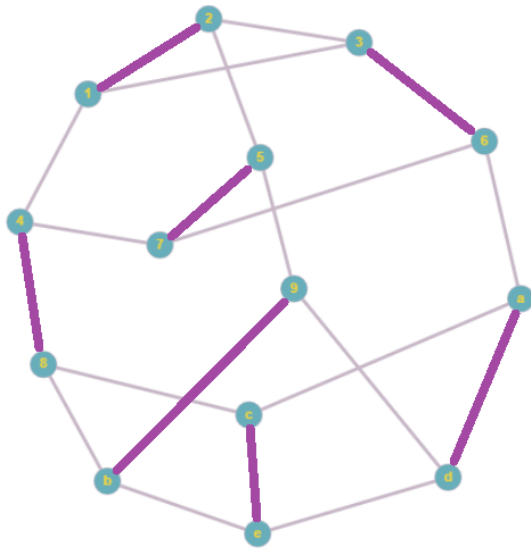
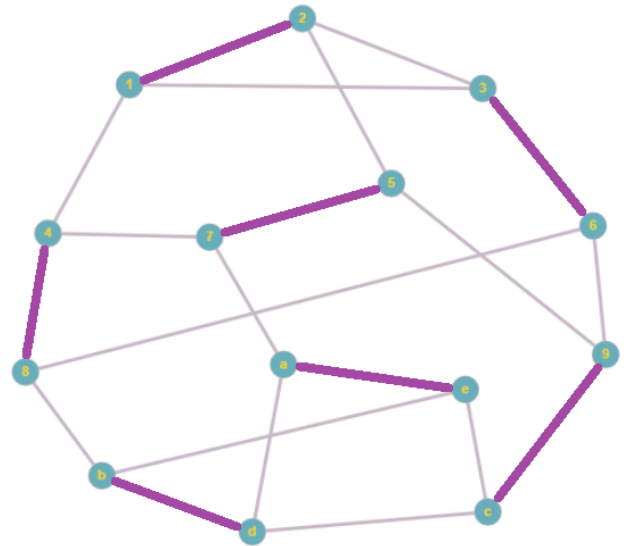
Застосуємо цей наслідок для перевірки вказаних графів на 14 вершинах.

Для першої пари графів маємо:

$$\Sigma_1 = \{3, 2.4329, 1.5321, 1.5321, 1.2555, 0.3473, 0.3473, 0, -1, -1, -1.8372, -1.8794, -1.8794, -2.8512\}$$

$$\lambda_3 = 1.5321 < 2.8$$

Отже, згідно з теоремою 3.2 обидва графи L_1 та L_1' мають досконале парування. Покажемо, що це справді так. Зауважимо, що жирними лініями позначено ребра, які відповідають досконалому паруванню.

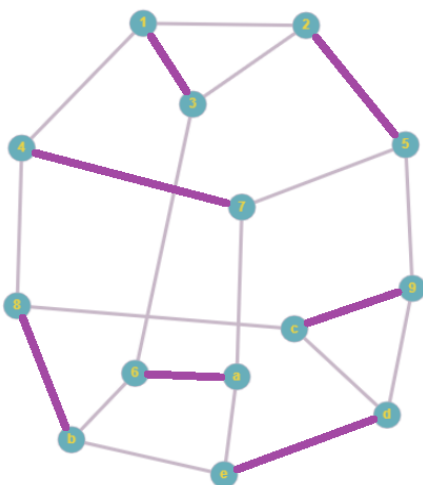
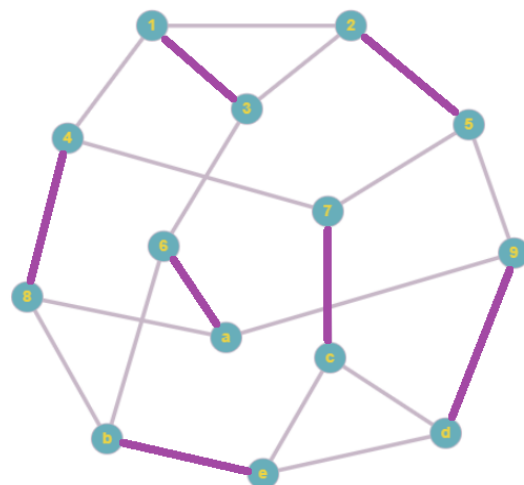
Граф L_1 Граф L_1'

Для другої пари графів маємо:

$$\Sigma_2 = \{3, 2.2863, 1.9319, 1.4142, 1.4142, 0.5176, 0.2627, -0.5176, -1, -1.4142, -1.4142, -1.8521, -1.9319, -2.6970\}$$

$$\lambda_3 = 1.9319 < 2.8$$

Отже, друга пара графів також має досконале парування. Переконаємось в цьому таким самим чином.

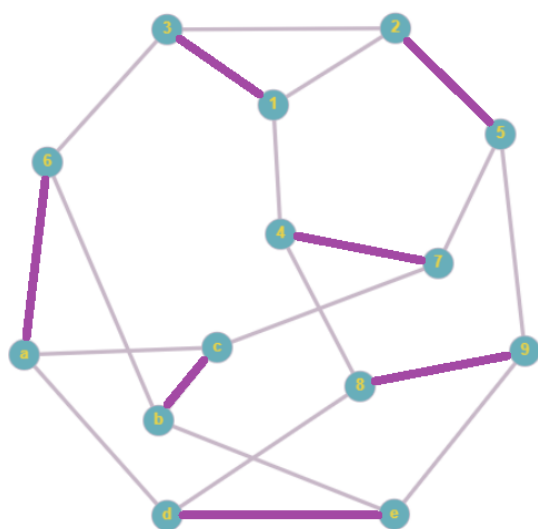
Граф L_2 Граф L_2'

Для третьої пари графів маємо:

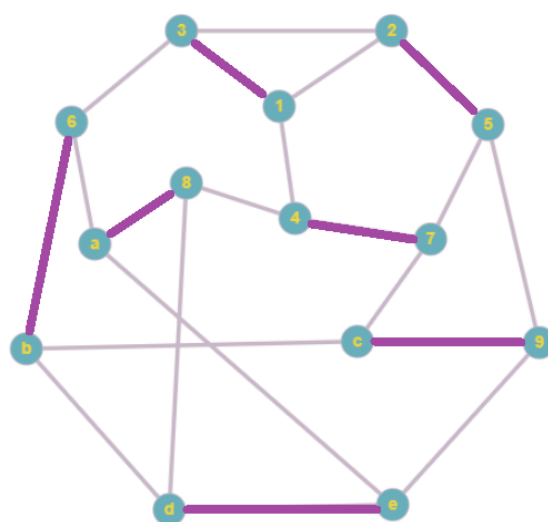
$$\Sigma_3 = \{3, 2.2245, 1.9276, 1.4598, 1.1701, 0.6180, 0.1743, -0.4352, -0.6889, -0.8319, -1.6180, -2.0569, -2.4621, -2.4812\}$$

$$\lambda_3 = 1.9276 < 2.8$$

Відповідно третя пара графів також має досконале парування.



Граф L_3



Граф L_3'

Як бачимо, усі три пари графів мають досконале парування. Варто також зазначити, що це лише один із можливих варіантів множин досконалого парування, тобто, графи можуть мати інші досконалі парування.

ВИСНОВКИ

Теорія спектральних графів тісно пов'язана з усіма сферами людської діяльності, такими як: хімія, біологія, медицина. Вона виникла декілька десятиріч тому, але набула широку популярність відносно нещодавно.

В даній курсовій роботі було зроблено наступні важливі результати:

- Сформульована теорема Годзіл-Маккея для часткового випадку, застосування якого було наочно розглянуто на прикладі.
- Детально вивчено властивості регулярних графів та виявлено, що перші пари коспектральних регулярних графів з'являються на 10 вершинах, а кубічних коспектральних графів – на 14 вершинах.
- За допомогою спеціальної комп'ютерної програми було згенеровано 3 пари коспектральних регулярних графів на 14 вершинах та виписано їх спектри.
- Особливий інтерес викликали графи, що мають досконале парування. В процесі роботи було виявлено спеціальні спектральні характеристики регулярного графа, який має досконале парування.
- Зокрема сформульовано наслідок з теореми про властивість спектру k -регулярного графа для кубічних графів з власним числом $\lambda_3 \leq 2.8$, які має досконале парування.
- Застосовано цей наслідок для кубічних графів на 14 вершинах та показано, що серед них не існує графів без досконалого парування.

Загалом застосування власних значень графів відбувається у численних сферах людської діяльності та багатьох галузях науки, і у даній курсовій роботі це наочно продемонстровано.

Список використаної літератури

1. Цветкович Д. Спектры графов. Теория и применение / Д.Цветкович, М.Дуб, Х.Захс // Киев – Наукова думка, 1984, 384 с.
2. Chung Fan R.K. Lectures on Spectral Graph Theory / Conference Board of the mathematical sciences, 1996, 212p.
3. Godsil C. Some computational results on the spectra of graphs / G. Godsil, B. McKay // in:L.R.A. Casse, W.D. Wallis (Eds.), Combinatorial Mathematics IV (Proceedings of the Fourth Australian Conference on Combinatorial Mathematics, Adelaide), Lecture Notes in Mathematics, vol. 560, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 73-92.
4. Haemers W.H. Cospectral pairs of regular graphs with different connectivity / Discussiones Mathematicae Graph Theory, 40(2), 2020, 577-584.
5. Haemers H. Spectra of graphs / A.E. Brouwer, W.H. Haemers // Monograph – February 1, 2011.
6. Haemers H. Which graphs are determined by their spectrum? / E.R. van Dam, W.H. Haemers // LinearAlgebra Appl. 373, 2003, 241 – 272.
7. Meringer M. Fast Generation of Regular Graphs and Construction of Cages / M. Meringer // Journal of Graph Theory 30(2) February 1999.
8. Ramezani F. Spectral characterization of some cubic graphs / F.Ramezani, B.Tayfeh-Rezaie // Graphs and Combinatorics 28, 2012, 869–876.
9. Zoltán L. Cospectral regular graphs with and without a perfect matching / Z.L.Blázsik, J. Cummings, W.H. Haemer // Discrete Mathematics, 338(3), 2015, 199-201.