

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

КОСПЕКТРАЛЬНІ РЕГУЛЯРНІ ГРАФИ

Текстова частина до курсової роботи
за спеціальністю «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Керівник курсової роботи:

Ст. викладач, канд. ф.-м. наук

Соломко Вікторія

Олександрівна

(підпис)

“ ____ ” _____ 2021 р.

Виконав студент:

Соболев Владислав

Олександрович

“ ____ ” _____ 2021 р.

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,

проф. Олійник Б. В.

_____ (підпис)

„_____” _____ 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на курсову роботу

студенту Соболеву В.О. факультету інформатики 3 курсу

ТЕМА «Коспектральні регулярні графи»

Вихідні дані:

- Blázsik L. Z. Cospectral regular graphs with and without a perfect matching. Discrete Mathematics, 2014
- E. R. van Dam, W. H. Haemers. Which graphs are determined by their spectrum? Linear Algebra and its Applications. 2003.
- Zoltán L. Blázsik, Jay Cummings, Willem H. Haemer Cospectral regular graphs with and without a perfect matching. Discrete Mathematics, 338(3), 2015, 199-201.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Зміст

Вступ

1. Основні означення та початкові відомості з теорії графів

1.1 Основні означення

1.2 Приклад знаходження спектральних характеристик графа

2. Властивості регулярних графів

3. Пари коспектральних регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні

4. Побудова коспектральної пари 5-регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні

Список використаної літератури

Дата видачі „_____” _____ 2021 р. Керівник _____ (підпис)

Завдання отримав _____ (підпис)

Календарний план виконання роботи

Тема: Коспектральні регулярні графи

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	30.10.2020	
2.	Ознайомлення з основними поняттями.	19.11.2020	
3.	Огляд наукових статей за темою роботи.	07.12.2020	
4.	Опрацювання основних матеріалів.	15.12.2020	
5.	Формулювання властивостей та теорем.	20.12.2020	
6.	Створення малюнків та ілюстрацій.	21.12.2020	
7.	Знаходження спектрів отриманих коспектральних графів.	14.01.2021	
8.	Додання альтернативних ілюстрацій.	01.02.2021	
9.	Написання курсової роботи	22.02.2021	
10.	Оформлення ілюстрацій та посилань.	22.03.2021	
11.	Остаточна перевірка курсової роботи науковим керівником.	11.05.2021	
12.	Захист курсової роботи.	24.05.2021	

Студент _____

Керівник _____

“ _____ ”

Зміст

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. Основні означення та початкові відомості з теорії графів	8
1.1. Основні означення	8
1.2. Приклад знаходження спектральних характеристик графа.....	10
РОЗДІЛ 2. Властивості регулярних графів.....	11
РОЗДІЛ 3. Пари коспектральних регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні	14
РОЗДІЛ 4. Побудова коспектральної пари 5-регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні	18
ВИСНОВКИ.....	25
Список використаної літератури	26

ВСТУП

У даній курсовій роботі розглядаються та досліджуються спектральні характеристики регулярних графів, пов'язані з ними теореми та метод побудови пар коспектральних регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні.

Регулярним графом називають граф, кожна вершина якого має однаковий степінь. Регулярні графи мають широкий спектр застосування. У хімії за їх допомогою представляються молекули у формі платонових тіл, також вони часто застосовуються при проектуванні комп'ютерних мереж, а іноді й для кодування інформації.

Цікавим предметом для дослідження є коспектральні кубічні графи, тобто неізоморфні графи із однаковим спектром.

Для початку розглянемо два графи з їхніми матрицями суміжності, показаними на рисунку нижче. Обидві матриці мають спектр $\{[2]^1, [0]^3, [-2]^1\}$.

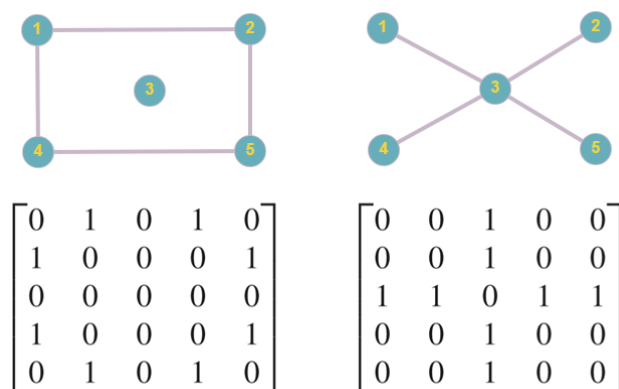


Рисунок – Пара Салтір

Це відомий приклад неізоморфних коспектральних графів, вперше наведений Цветковичем [5]. Цю пару також називають парою Салтір (оскільки при накладанні ці два графи утворюють зображення шотландського прапора Saltire). Проте здебільшого, для жодного графа, що має менше п'яти вершин, не існує пари з коспектральною матрицею суміжності, тому кожен з таких графів визначається за своїм спектром.

Питання ‘Які графи однозначно визначаються за спектром?’ вперше було поставлене хіміками і датується серединою XX століття. У 1956 році Гюнтхард та Примас поставили цю задачу в роботі, що пов'язує теорію спектрів графів з теорією Хюккеля з хімії. На той час вважалося, що кожен граф визначається спектром, доки через рік Коллац та Синоговіц не продемонстрували пару коспектральних дерев [7].

Іншу проблему поставив Фішер у 1966 р., розглядаючи питання Каца «Чи можна почути форму барабана?». Фішер змодельовав форму барабана через граф. Тоді звук цього барабана характеризується власними значеннями графа. Тобто, фактично, питання Каца безпосередньо стосується вищезгаданого.

Після 1967 року було знайдено багато прикладів коспектральних графів. Найяскравішим, проте, виявилось дослідження Швенка, який заявив, що більшість дерев не можуть бути визначені за спектром [1]. Після цього результату математики не могли дійти згоди, чи більшість графів може бути визначена за спектром, чи таких графів майже не існує, чи жодне з цих тверджень не відповідає дійсності. Наскільки відомо наразі, частка відомих графів, що не визначаються за спектром на n вершинах набагато більша, ніж таких, що визначаються. Але обидві частки прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$, і комп'ютерний перебір [8] показує, що більшість графів на 11 або менше вершинах визначається за спектром. У таблиці нижче наведена частка графів, що мають коспектральну пару для $n \leq 11$, обчислена Брауером та Спенсом у роботі [2].

n	Кількість графів	Кількість різних характеристичних поліномів	Частка коспектральних графів	Кількість коспектральних графів
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
2	2	2	0	0
3	4	4	0	0
4	11	11	0	0
5	34	33	0.059	2
6	156	151	0.064	10
7	1044	988	0.105	112
8	12346	11453	0.139	1716
9	274668	247357	0.186	51088
10	12005168	10608128	0.213	2 557 101
11	1018997864	901029366	0.211	215 008 549

Таблиця – Графи, що не визначаються за спектром

Актуальність обраної для роботи теми зумовлена широким застосуванням спектральної теорії графів у таких сферах науки, як проектування комп'ютерних мереж, програмуванні, хімії та біології. Загалом спектральна теорія графів є однією з наймолодших галузей теорії графів, і її розвиток та дослідження мають велике значення у сучасних дослідженнях різних наукових сфер.

Метою даної курсової роботи є дослідження спектрів регулярних графів та їхніх властивостей, знаходження та побудова коспектральних регулярних графів, дослідження характеристик, пов'язаних з коспектральними парами регулярних графів, лише один з яких має досконале парування.

У роботі розглянуто наступні теореми:

- Теорема про спектр регулярного графа
- Теорема про регулярні графи з простими циклами
- Теорема про матрицю суміжності регулярного зв'язного графа
- Теорема Холла
- Теорема про побудову двох k -регулярних коспектральних графів, лише один з яких має досконале парування
- Теорема Фадєєва-Ле Вер'є

Також у роботі детально проілюстрований приклад поетапної побудови при $k = 5$ пари коспектральних k -регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні.

Курсова робота складається з чотирьох розділів.

У першому наведені основні означення та приклади з теорії графів загалом, зокрема зі спектральної теорії графів.

До другого розділу входять властивості та теореми, пов'язані з регулярними графами.

Третій розділ присвячено теоремі про побудову регулярних коспектральних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні.

У четвертому розділі наведено приклад поетапної побудови при $k = 5$ пари коспектральних k -регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні.

РОЗДІЛ 1. Основні означення та початкові відомості з теорії графів

Спектральна теорія графів вивчає відношення між структурою графа та спектром асоційованих з ним матриць, таких як матриці суміжності, інцидентності або матриці Лапласа.

Нагадаємо деякі основні означення, пов'язані з даною теорією.

1.1. Основні означення

Означення 1.1.1. [9] Загальний орієнтований граф – сукупність $G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$, яка складається з трьох множин: V – множини вершин, E – множини ребер, L – множини петель, та відображень: $\partial_E: E \rightarrow V \times V$, $\partial_L: L \rightarrow V$. При цьому якщо $\partial_E(e) = (v_1, v_2)$, то вершину v_1 будемо називати початком ребра e , а вершину v_2 – її кінцем.

Означення 1.1.2. [9] Загальний неорієнтований граф – сукупність $G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$, яка складається з трьох: V – множини вершин, E – множини ребер, L – множини петель, та відображень: $\partial_E: E \rightarrow C_V^2$ – множина двохелементних підмножин множини V , $\partial_L: L \rightarrow V$. Якщо існують пари вершин v_1, v_2 , для яких існують m ребер $e: \partial_E(e) = \{v_1, v_2\}$ і $m > 1$, то говорять про наявність кратних ребер. Іноді говорять, що вершини v_1, v_2 мають спільне ребро кратності m .

Означення 1.1.3. [9] Петля – ребро, початок і кінець якого співпадають.

Означення 1.1.4. [9] Суміжними називаються вершини v_1, v_2 орієнтованого (неорієнтованого) графа, якщо існує ребро $e \in E: \partial_E(e) = (v_1, v_2)$ ($\partial_E(e) = \{v_1, v_2\}$). При цьому говорять, що ребро e є інцидентним як вершині v_1 так і вершині v_2 .

Означення 1.1.5. [9] Простим називається граф без кратних ребер та петель.

Означення 1.1.6. [9] Степенем вершини називається кількість ребер, інцидентних даній вершині плюс подвоєна кількість інцидентних їй петель.

Означення 1.1.7. [9] Мультиграф – граф, у якому допускається наявність паралельних ребер, тобто таких, які мають одні й ті ж кінцеві вершини.

Означення 1.1.8. [9] Регулярним графом називають граф, кожна вершина якого має однаковий степінь. Якщо даний степінь дорівнює k , то граф називають k -регулярним.

Означення 1.1.9. [9] Доповненням до графа G називається граф H , побудований на вершинах графа G , поєднаних ребрами тоді і тільки тоді, коли вони несуміжні в G .

Означення 1.1.10. [9] Дводольним графом називається граф, множина вершин якого може бути розбита на дві підмножини так, що кожне ребро графа має одну вершину з першої підмножини і одну з другої.

Означення 1.1.11. [9] Паруванням M в графі G називається множина попарно несуміжних ребер, тобто таких, що не мають спільних вершин.

Означення 1.1.12. [9] Досконале парування – парування, що покриває усі вершини графа. Кожна з вершин графа інцидентна рівно одному з ребер у досконалому паруванні.

Означення 1.1.13. [9] Матриця суміжності графа G зі скінченною кількістю вершин n (пронумерованих числами від 1 до n) — це квадратна матриця A розміру $n * n$, в якій значення елементу a_{ij} рівне числу ребер з i -ї вершини графа в j -у вершину.

Означення 1.1.14. [6] Матриця Лапласа графа G зі скінченною кількістю вершин n – це квадратна матриця L розміру $n * n$ з нульовими сумами рядків, яку можна записати в загальному вигляді як $L_{ij} = D_{ii} - A_{ij}$. Тобто L_{ij} дорівнює $-A_{ij}$, якщо $x \neq y$, і D_{ii} , якщо $x = y$. Тут $D = \{D_{ii}\}$ – діагональна матриця, що містить інформацію про степінь кожної вершини, елемент D_{ii} дорівнює кількості ребер, що виходять із вершини i ; $A = \{A_{ij}\}$ – матриця суміжності.

Означення 1.1.15. [6] Характеристичний поліном квадратної матриці A розміру $n * n$ — це многочлен степеня n від змінної λ , який дорівнює $p_A(\lambda) = \det(A - I_n \lambda)$, де I_n — одинична матриця порядку n .

Означення 1.1.16. [10] Індексом графа називається найбільше власне число матриці суміжності цього графа.

У даній роботі розглядаються прості неорієнтовані графи.

1.2. Приклад знаходження спектральних характеристик графа

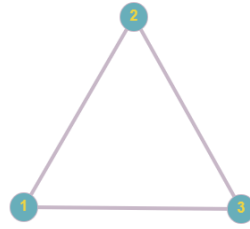


Рисунок 1.2.1

На рисунку 1.2.1 зображений 2-регулярний граф на 3 вершинах. Матриця суміжності цього графа матиме вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Різниця матриці суміжності та одиничної матриці I_3 , помноженої на λ , дорівнюватиме

$$A - I_3\lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Характеристичний поліном цієї матриці

$$p_1(\lambda) = \det(A - I_3\lambda) = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Для отримання власних значень поліному порівняємо його з нулем і розв'яжемо отримане рівняння третього степеня:

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Позначимо степенем в дужках, що -1 входить до мультимножини розв'язків двічі.

$$\text{Власні значення: } \begin{matrix} \lambda = (-1)^{(2)} \\ \lambda = 2 \end{matrix}.$$

Матриця Лапласа, що належить графу з рисунку 1.1.2, обчислюється за формулою, наведеною в означенні 1.1.14:

$$L_{ij} = D_{ii} - A_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

РОЗДІЛ 2. Властивості регулярних графів

У даній роботі розглядаються регулярні графи. Далі наведено властивості регулярних графів та теореми, пов'язані з ними.

Твердження 2.1 [6]. Якщо Γ – регулярний граф степеня k , то для кожного власного значення λ маємо $|\lambda| \leq k$.

Приклад 2.1. Матриця суміжності повного графа на k вершинах $A = J - I$. Ця матриця має нульову головну діагональ, а всі інші її числа є одиницями. З цієї матриці отримуємо, що спектр повного графа $\lambda = (k - 1)^1, \lambda = (-1)^{k-1}$. Тоді $|\lambda| \leq k - 1$.

Твердження 2.2 [6]. Γ – регулярний граф має степінь k тоді й тільки тоді, коли сума кожного рядку його матриці суміжності A дорівнює k .

Приклад 2.2. На рисунку 2.1 наведено регулярний граф зі степенем 2, а таблиця 2.1 відображає його матрицю суміжності та суми рядків. Якщо сума рядку не дорівнює k , значить, вершини відповідного рядку мають степінь, відмінний від вершин в інших рядках, а значить, граф не є регулярним.

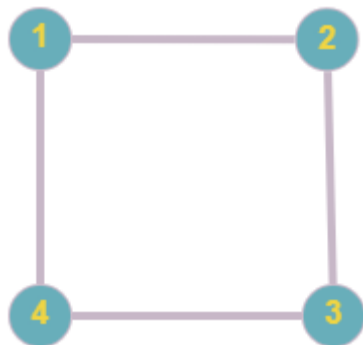


Рисунок 2.1

0	1	0	1	2
1	0	1	0	2
0	1	0	1	2
1	0	1	0	2

Таблиця 2.1

Твердження 2.3 [6]. Якщо Γ є регулярним графом степеня k , то матриця Лапласа $L = kI - A$.

Приклад 2.3. Відповідний приклад наведено у розділі 1.2.

Твердження 2.4 [6]. Якщо Γ – k -регулярний із власними значеннями $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, то власні значення доповнення до Γ становлять $n - k - 1, -1 - \lambda_n, \dots, -1 - \lambda_2$.

Приклад 2.4. На рисунку 2.2 наведений приклад 2-регулярного графа з його матрицею суміжності на таблиці 2.2, і на рисунку й таблиці 2.3 зображено його доповнення з відповідною матрицею суміжності.

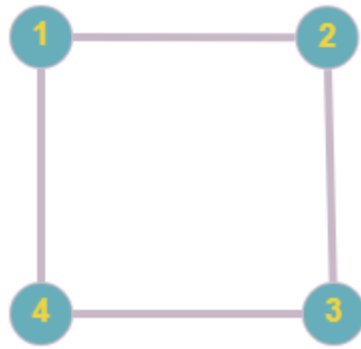


Рисунок 2.2

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

Таблиця 2.2

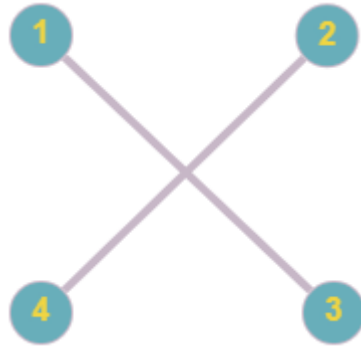


Рисунок 2.3

0	0	1	0
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0

Таблиця 2.3

Власні числа графа 2.2: $\lambda = 2, \lambda = 0^2, \lambda = -2$

Власні числа графа 2.3: $\lambda = 1^2, \lambda = (-1)^2$

Якщо обчислювати власні значення графа 2.3 за твердженням 2.4, отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 - 2 - 1 = 1; & \lambda_3 &= -1 - 0 = -1; \\ \lambda_2 &= -1 - 0 = -1; & \lambda_4 &= -1 - (-2) = 1. \end{aligned}$$

Як можна побачити, отримані різними методами власні числа збігаються.

Твердження 2.5 [10]. Нехай неорієнтований граф Γ є регулярним зі степенем k . Тоді k - найбільше власне значення Γ , а його кратність дорівнює кількості компонент зв'язності Γ .

Твердження 2.6 [10]. Якщо Γ є k -регулярним графом ($k \geq 2$) і має n вершин, $e = \frac{kn}{2}$ ребер та власні значення $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, тоді $L(\Gamma)$ є $(2k - 2)$ -регулярним з власними значеннями $\lambda_i + k - 2 (i = 1, \dots, n)$ та $-2(e - n)$.

Теорема 2.1 [10]. Нехай $\lambda_1 = k, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - спектр графа G , а k - його індекс.

Граф G є регулярним степеня k тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = k$.

Теорема 2.2 [10]. Якщо z - кількість шляхів P_2 у регулярному мультиграфі G степеня k з n вершинами без петель, то $4z = -2a_2 - nk$, де a_2 - коефіцієнт при λ^{n-2} у характеристичному многочлені графа G .

Теорема 2.3 [10]. Для графа G з матрицею суміжності A існує многочлен $P(x)$ такий, що $P(A) = J$ тоді і тільки тоді, коли G є регулярним і зв'язним. У такому разі $P(x) = \frac{n(x - \lambda^{(2)}) \dots (x - \lambda^{(m)})}{(k - \lambda^{(2)}) \dots (k - \lambda^{(m)})}$, де n - кількість вершин, k - індекс, $\lambda^{(1)} = r, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)}$ - усі різні власні значення графа G .

Теорема 2.4 (Теорема Холла про одруження) [3]. Якщо $G = (V, E)$ є деяким графом, і $A \subseteq V$, $B \subseteq V$ – підмножини його вершин, такі що $A \cup B = V$, і для довільного ребра e такого, що $e = \{v, u\}$, справедливе твердження $(v \in A \wedge u \in B) \vee (v \in B \wedge u \in A)$, тобто граф G є дводольним. Тоді для даного графа існує набір ребер, що з'єднують вершини A з різними вершинами B тоді й лише тоді, коли для кожної підмножини елементів $K \subseteq A$ виконується $|W| \geq |K|$, де $W = \{w \in B : (\exists k \in K) \{k, w\} \in E\}$ – множина елементів з B , що з'єднані ребрами хоча б з одним елементом підмножини K .

Теорема 2.5 (Наслідок з теореми Кеніга) [3]. Довільний k -регулярний дводольний граф має досконале парування.

Приклад 2.5 Для наочності побудуємо довільний регулярний дводольний граф (рис. 2.4) та наведемо для нього приклад досконалого парування (рис. 2.5).

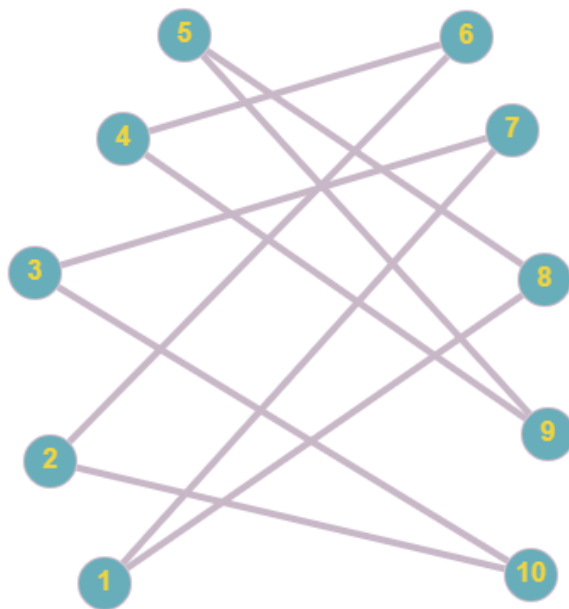


Рисунок 2.4

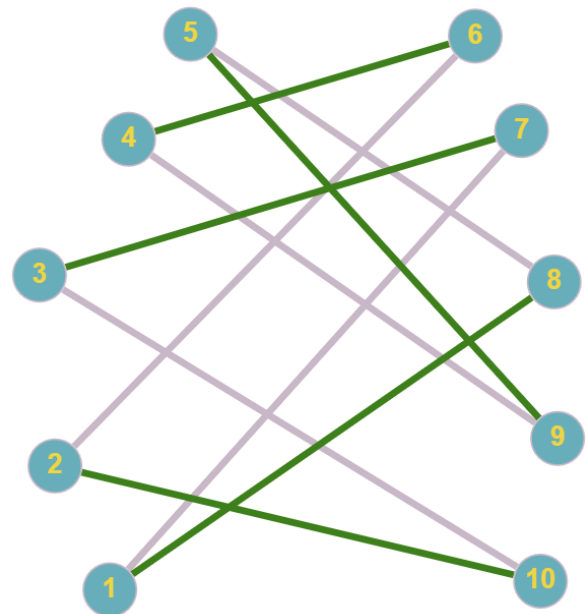


Рисунок 2.5

Наведені в даному та попередньому розділах властивості будуть використовуватися при подальшому доведенні теорем.

РОЗДІЛ 3. Пари коспектральних регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні

За теоремою Кеніга, регулярні дводольні графи додатного степеня мають досконале парування. Для регулярних графів, які не є дводольними, існує достатня умова існування досконалого парування, що виражається зі спектру матриці суміжності [4]. За спектром можна також визначити дводольність і регулярність графа. Тоді природньо буде задатися питанням, чи можна побачити зі спектра регулярного графа існування в ньому досконалого парування. На 22-ій Британській комбінаторній конференції, Вільям Хаемерс, вважаючи, що відповідь буде нествердною, поставив питання пошуку двох коспектральних регулярних графів, один з яких мав би досконале парування, а другий – ні. Питання також було згадане Себастьяном Чоабе в програмі REGS з комбінаторики (Проблема 48, 2011).

Для нерегулярних графів існують прості приклади. Незв'язне об'єднання 4-циклу C_4 і шляху P_{n-4} (рис. 3.1) має досконале парування тоді, коли n парне; і є коспектральним з графом, що складається з шляху P_{n-4} з двома висячими вершинами, прикріпленими до кожної з кінцевих вершин (рис. 3.2). На рисунку 3.1 можна задати досконале парування $M = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$, а з рисунка 3.3 видно, що для графа 3.2 досконалого парування не буде існувати, оскільки не будуть покритими, наприклад, вершини v_7 і v_{10} .

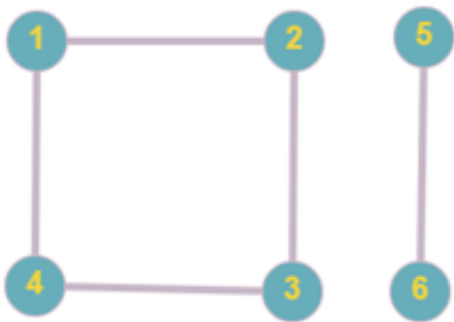


Рисунок 3.1

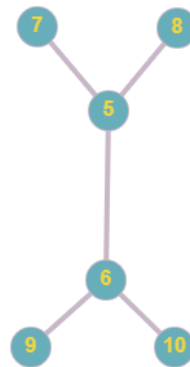


Рисунок 3.2

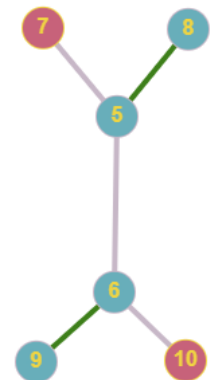


Рисунок 3.3

Характеристичний поліном графа на рисунку 3.1 дорівнює $\lambda^6 - 5\lambda^4 + 4\lambda^2$ і співпадає з характеристичним поліномом графа на рисунку 3.2, отже графи коспектральні.

Насправді існують регулярні зв'язні графи, які є коспектральними, один з яких має досконале парування, а інший – ні. Це доводить теорема 3.1.

Основним інструментом для побудови коспектральних графів буде наступний результат, отриманий Годсілом та Маккеєм.

Твердження 3.1 [4]. Нехай G – граф, а $\{X, Y\}$ – розбиття множини вершин. Припустимо, що X індукує регулярний підграф, а кожна вершина $y \in Y$ суміжна з $0, \frac{|X|}{2}$ або $|X|$ вершин X . Побудуємо із G новий граф G' наступним чином. Для кожної вершини $y \in Y$, що суміжна з $\frac{|X|}{2}$ вершинами в X , видалимо $\frac{|X|}{2}$ ребер між y та X і приєднаємо y до інших $\frac{|X|}{2}$ вершин X . Тоді G та G' будуть коспектральними.

Набір вершин X називається перемикаючим набором. Операція перетворення G на G' називається перемиканням Годсіла – Маккея.

Теорема 3.1 [4]. Для кожного $k \geq 5$ існує пара коспектральних зв'язних k -регулярних графів, де один має досконале парування, а інший – ні.

Доведення. Доведемо теорему за допомогою побудови k -регулярного графа з набором перемикання Годсіла – Маккея X і без досконалого парування, перемикання якого породить безліч досконалих парувань.

Спочатку припустимо, що число k непарне. Визначимо граф H_k як доповнення незв'язного об'єднання $\frac{(k-1)}{2}$ шляхів P_2 та шляху P_3 . Тоді H_k матиме $k + 2$ вершини, і кожна з вершин буде степеня k , за винятком однієї вершини u . Вершина u матиме степінь $k - 1$. Приєднаємо до u ребро $\{u, v\}$ з висячою вершиною v , що збільшить ступінь вершини u до k . Назвемо отриманий таким чином граф $\tilde{H}_k$. Звернемо увагу, що H_k має непарну кількість вершин, а отже, не має досконалого парування, тоді як $\tilde{H}_k$ має декілька досконалих парувань, кожне з яких містить ребро $\{u, v\}$. Окрім того, при додаванні будь-якого іншого графа F до $\tilde{H}_k$ з заміною вершини v на деяку вершину з F результат матиме властивість, що жодне ребро з F , інцидентне вершині v , не може бути у досконалому паруванні.

Визначимо граф перемикаючого набору X як $K_3 + C_{2k-5}$, тобто як незв'язне об'єднання трикутника і циклу з $2k - 5$ вершин. Почнемо побудову Y з $k - 2$ незв'язних копій $\tilde{H}_k$. Визначимо W як набір вершин, що складається з $k - 2$ копій v . До кожної вершини $w \in W$ приєднаємо $k - 1$ вершину з X таким чином, щоб w була суміжною кожній вершині трикутника і жодні дві вершини більшого циклу не відрізнялися степенями більше, ніж на одиницю. Варто звернути увагу, що отриманий граф тепер є зв'язним, кожна вершина, крім тих, що знаходяться в більшому циклі, має степінь k , і кожна вершина в графі Y суміжна з $0, \frac{|X|}{2}$, або $|X|$ вершинами в X , тому X є набором перемикання.

Розширимо Y додаванням $(k - 2)(k - 1)$ ребер між Y та X таким чином, щоб X залишився набором перемикування, і кожна вершина мала степінь k , як і було потрібно. Для цього спочатку додаємо ще одну копію $\tilde{H}_k$ і встановимо $k - 1$ ребро між кожною копією v та вершинами X , що належать більшому циклу так, що степені вершин циклу все ще відрізняються щонайбільше на одиницю. Далі додаємо $\frac{k-3}{2}$ незв'язних об'єднань P_2 , і приєднуємо обидві вершини кожного P_2 до $k - 1$ вершини більшого циклу в X , таким чином, щоб всі вершини X мали степінь k .

Отриманий граф є k -регулярним і зв'язним, а X є набором перемикування Годсіла – Маккея. Далі, видаливши $k - 2$ вершини W , відповідні їм $k - 2$ копії H_k , отримаємо, що трикутник і залишок стануть k компонентами, і кожна матиме непарну кількість вершин. Отже, такий граф не матиме досконалого парування. Однак після перемикування Годсіла – Маккея можна побачити (багато) досконалих парувань. Отже, випадок, коли k – непарне, розглянуто.

Якщо k парне, зробимо у доведенні кілька невеликих змін. Для початку, граф $\tilde{H}_k$ слід замінити графом, отриманим наступним чином. Видаляємо одне ребро з повного графа K_{k+1} , додаємо одну вершину v і приєднуємо її до двох вершин степеня $k - 1$. Тоді, оскільки $k + 1$ є непарним числом, будь-яке досконале парування має містити одне з цих двох нових ребер. Це виключає будь-яке ребро, інциденте v , з парування. Набір перемикування X тоді складатиметься з $2k - 4$ вершин та позначатиме $K_3 + C_{2k-7}$.

Нарешті, трохи змінимо останній крок, де степені вершин більшого циклу збільшуються до k . Оскільки k є парним, це можна зробити без додаткового $\tilde{H}_k$. Натомість додаємо цикл C_{k-2} до Y і приєднуємо кожну вершину цього циклу до $k - 2$ вершин більшого циклу в X так, щоб степінь кожної вершини дорівнював k . Таким чином, доведення теореми для парного k можна отримати, повторивши кроки доведення для непарного з урахуванням зазначених змін.

У теоремі показано алгоритм побудови пари зв'язних k -регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні. У загальному випадку, якщо k непарне, то наведений у доведенні граф містить $k^2 + 5k - 8$ вершин, а якщо k парне, то $k^2 + 3k - 10$. Найменший приклад – пара 5-регулярних графів на 42 вершинах.

Варто зазначити, що в деяких випадках розв'язок буде кращим, якщо взяти регулярний граф більшого степеня на наборі перемикування X . Однак поки що не відомо, як саме модифікувати конструкцію, щоб вона працювала при $k \leq 4$. До того ж, для $k \leq 2$ не існує неізоморфних коспектральних графів, і якщо $k = 3$, можна побачити, що не може існувати перемикування Годсіла – Маккея між графом з досконалим паруванням та таким, що не має жодного. Окрім того,

Стівен Хартке перевіряв за допомогою комп'ютера всі 3-регулярні пари коспектральних графів, які мають щонайбільше 20 вершин і не знайшов жодного прикладу [4]. Тож не є малоюмовірним, що для степеня 3 такої пари графів не існує.

Теорема 3.2 (Алгоритм Фадєєва-Ле Вер'є). Нехай маємо матрицю A розміру $n \times n$, характеристичний многочлен якої має вигляд

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda I_n - A) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k.$$

Тоді коефіцієнти c_k визначаються рекурсивно з наступного рівняння

$$\begin{aligned} c_n &= 1, \quad c_0 = (-1)^n \det A, \\ c_{n-k} &= -\frac{1}{k} \operatorname{tr}(AM_k), \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

де для спрощення обчислень коефіцієнтів застосовуються допоміжні матриці M_k , які знаходяться із рекурентного співвідношення

$$M_0 \equiv 0$$

$$M_k \equiv AM_{k-1} + c_{n-k+1}I \quad k = 1, \dots, n.$$

Доведення. Із рекурентного співвідношення маємо, що

$$M_1 = I, c_{n-1} = \operatorname{tr} A = c_n \operatorname{tr} A;$$

$$M_2 = A - I \operatorname{tr} A, c_{n-2} = -\frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2 - (\operatorname{tr} A)^2) = -\frac{1}{2}(c_n \operatorname{tr} A^2 + c_{n-1} \operatorname{tr} A);$$

$$\begin{aligned} M_3 &= A - A \operatorname{tr} A - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A^2 - (\operatorname{tr} A)^2)I, c_{n-3} = \\ &= \frac{1}{6}((\operatorname{tr} A)^3 - 3 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr} A + 2 \operatorname{tr}(A^3)) = \frac{1}{3}(c_n \operatorname{tr} A^3 + c_{n-1} \operatorname{tr} A^2 + c_{n-2} \operatorname{tr} A); \end{aligned}$$

І так далі.

$$M_m = \sum_{k=1}^m c_{n-m+k} A^{k-1},$$

$$c_{n-m} = \frac{1}{m}(c_n \operatorname{tr} A^m + c_{n-1} \operatorname{tr} A^{m-1} + \dots + c_{n-m+1} \operatorname{tr} A) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m c_{n-m+k} \operatorname{tr} A^k; \dots$$

Окрім того $A^{-1} = -\frac{M_n}{c_0} = \frac{(-1)^{n-1} M_n}{\det A}$ завершує рекурсію на λ . Це можна

використовувати для отримання матриці, оберненої до A , або детермінанту A .

У наступному розділі наведений алгоритм буде використаний при обчисленні характеристичних многочленів 5-регулярного графа на 42 вершинах.

РОЗДІЛ 4. Побудова коспектральної пари 5-регулярних графів, один з яких має досконале парування, а інший – ні

Почнемо з побудови незв'язного об'єднання 2 шляхів P_2 та одного шляху P_3 (рис. 4.1). Граф H_5 є доповненням цього об'єднання (рис. 4.2) та не має досконалого парування (рис. 4.3).

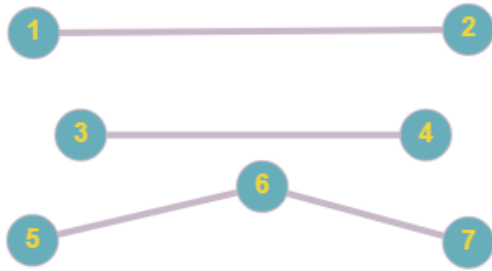


Рисунок 4.1

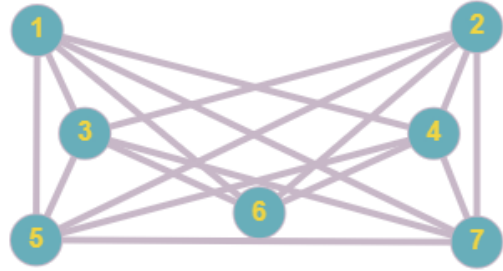


Рисунок 4.2

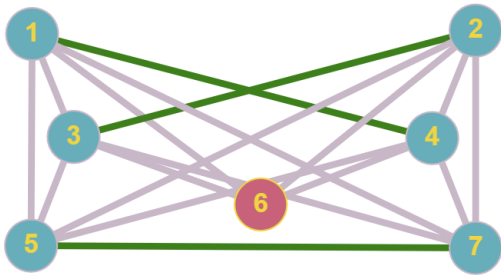


Рисунок 4.3

Зараз вершина під номером 6 має ступінь 4, коли інші мають ступінь 5. За алгоритмом далі приєднуємо до вершини 6 ребро з висячою вершиною 8 і назвемо отриманий граф $\tilde{H}_5$ (рис. 4.4). $\tilde{H}_5$, на відміну від H_5 , має декілька досконалих парувань, кожне з яких включає ребро $\{6,8\}$ (рис. 4.5-4.9). Надалі така вершина 8 позначатиметься як v .

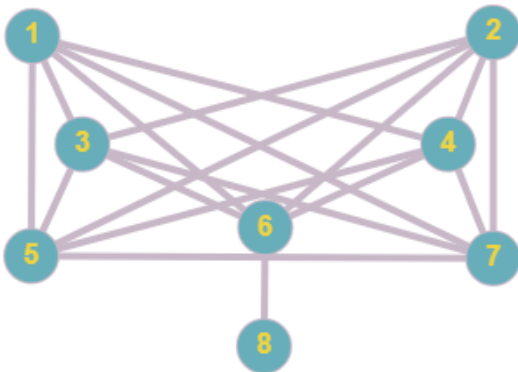


Рисунок 4.4

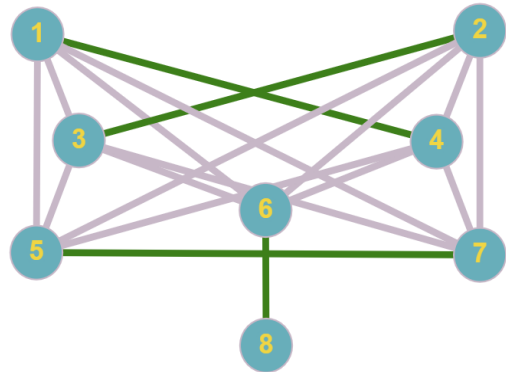


Рисунок 4.5

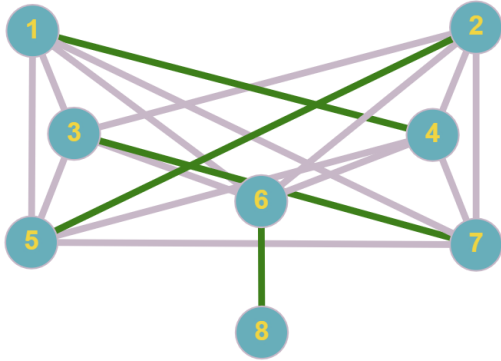


Рисунок 4.6

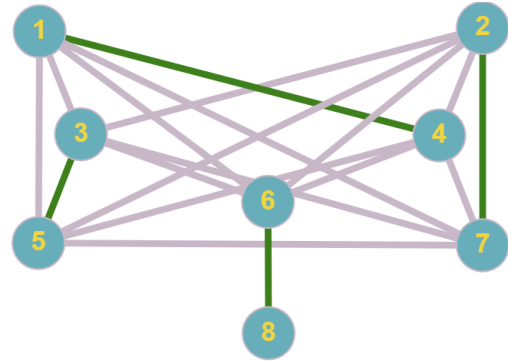


Рисунок 4.7

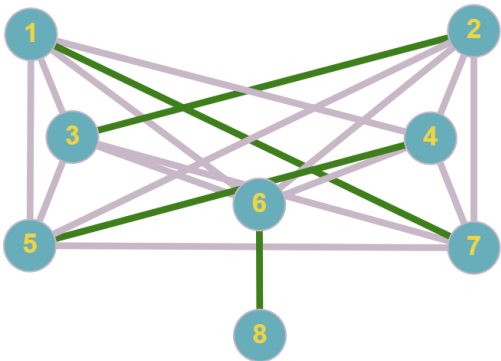


Рисунок 4.8

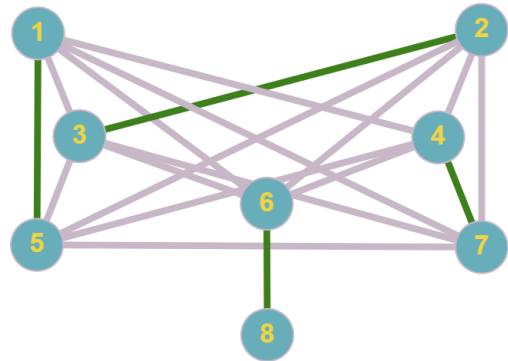


Рисунок 4.9

Визначимо граф перемикаючого набору X як $K_3 + C_5$ (рис. 4.10). Далі будемо граф Y , створивши 3 копії графа $\tilde{H}_5$. Множину копій вершин v трьох графів позначимо як W . Кожну $w \in W$ приєднаємо до 4 вершин з X таким чином, щоб w була суміжною із кожною вершиною трикутника і жодні дві вершини більшого циклу не відрізнялися степенями більше, ніж на одиницю (рис. 4.11).

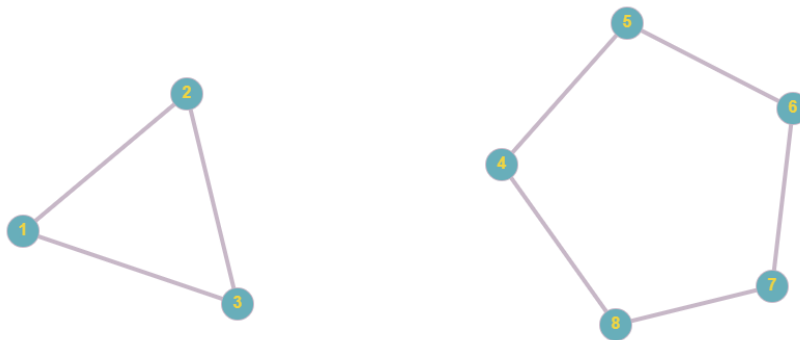


Рисунок 4.10

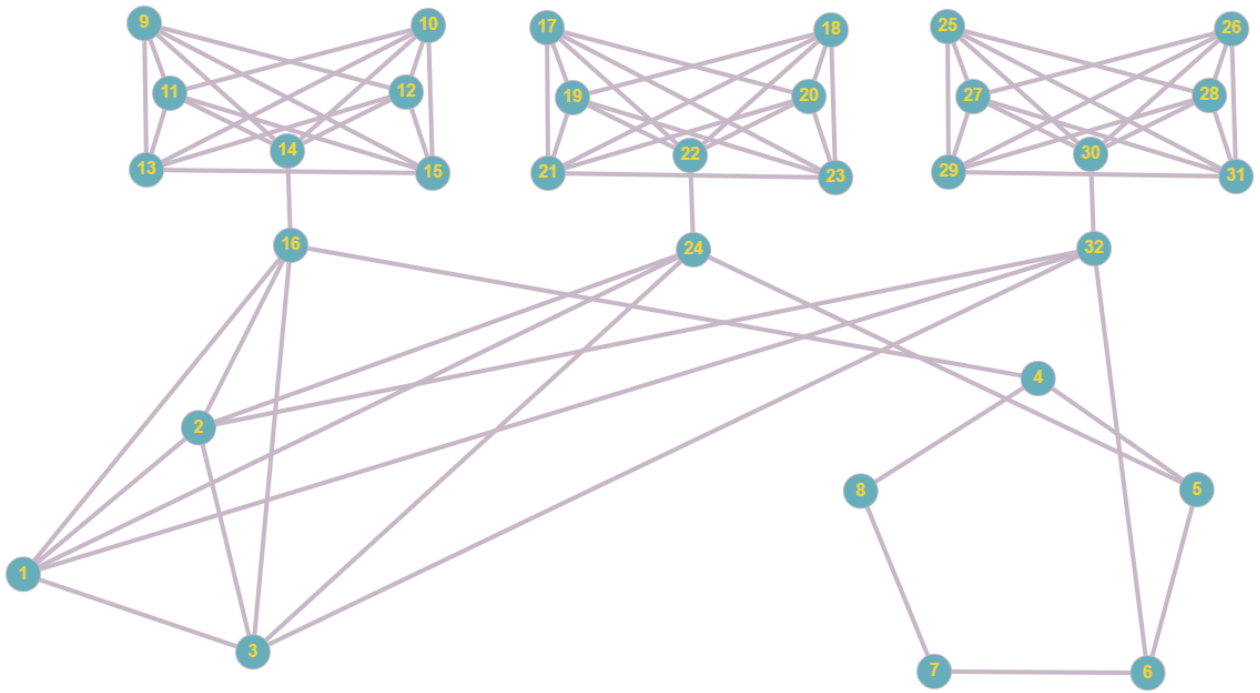


Рисунок 4.11

До отриманого графа додаємо ще одну копію графа $\tilde{H}_5$ і з'єднуємо його вершину v з 4 вершинами, що належать більшому циклу в X так, щоб степені вершин більшого циклу відрізнялися не більше, ніж на одиницю (рис. 4.12). Далі додаємо одну копію P_2 , і приєднаємо обидві його вершини до 4 вершин більшого циклу в X , таким чином, щоб всі вершини X мали степінь 5 (рис. 4.13).

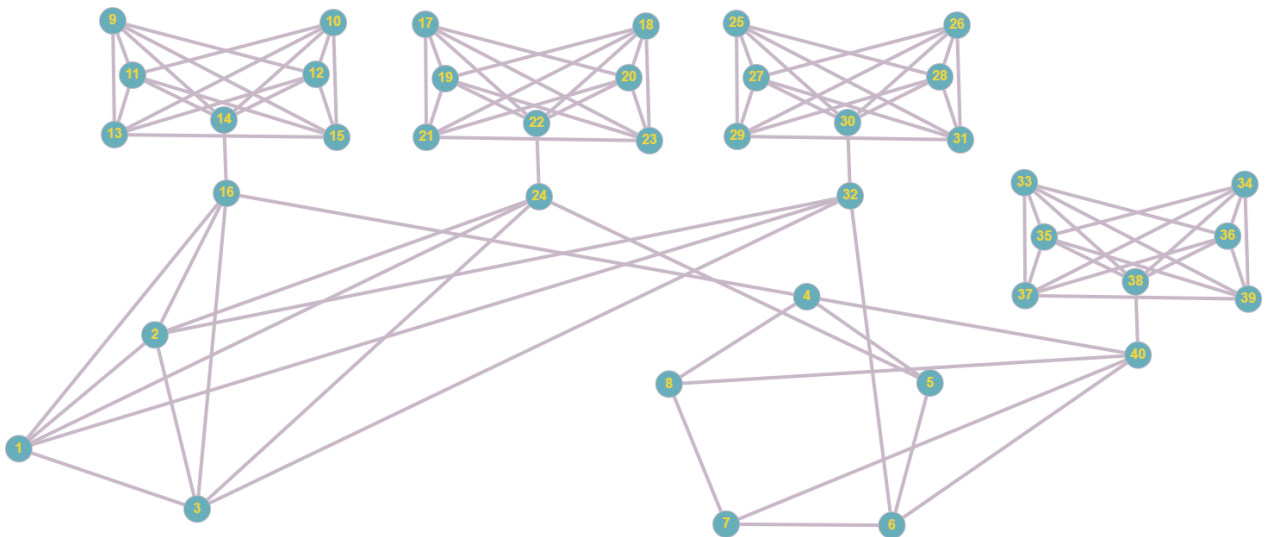


Рисунок 4.12

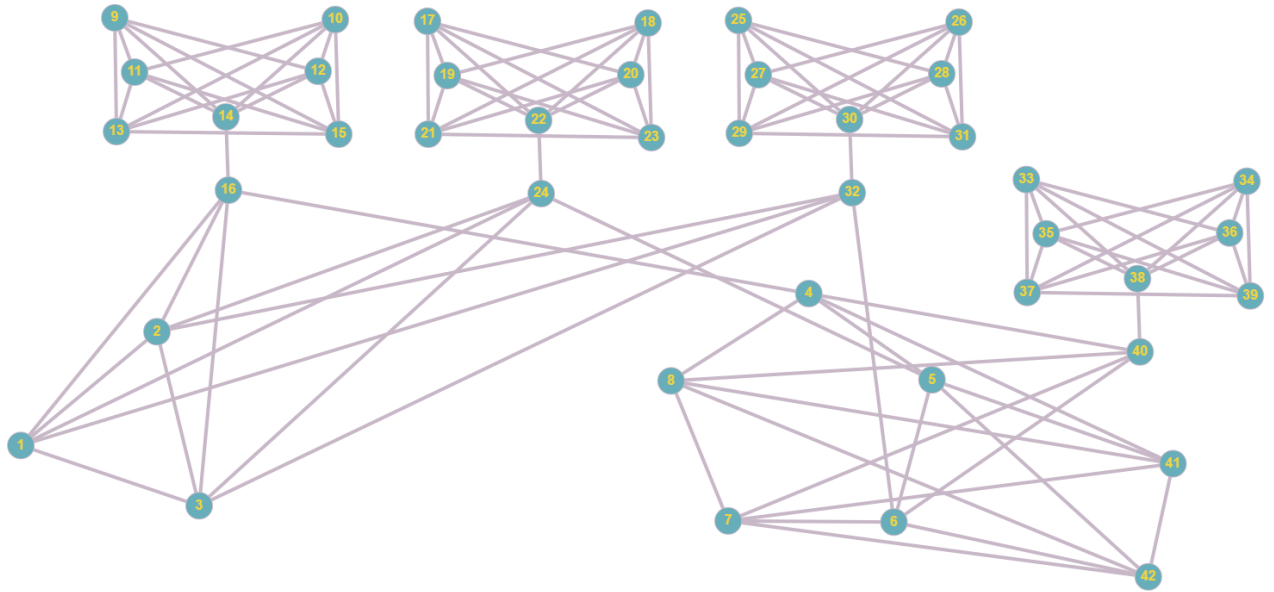


Рисунок 4.13

Отриманий граф є 5-регулярним і зв'язним, а X є набором перемикання Годсіла – Маккея. Такий граф не має досконалих паруваль, адже до нього входять 4 копії графа $\tilde{H}_5$, і кожна з 4 відповідних вершин v має входити до парування як на рисунках 4.5-4.9. Тоді для того, щоб даний граф мав досконале парування, три вершини, що входять до меншого циклу, повинні мати досконале парування у межах циклу, адже суміжні з ними вершини v вже входять до парування. Очевидно, що трикутний граф досконалого парування не має, а отже, і граф на рисунку 4.13 не має досконалого парування (рис. 4.14).

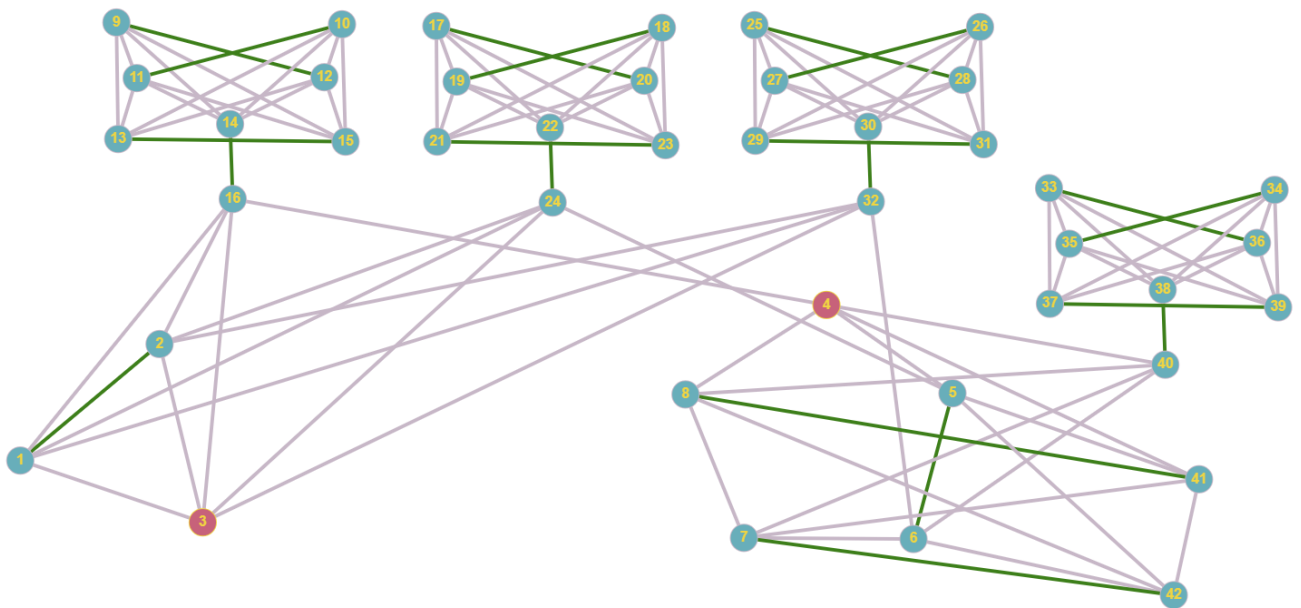


Рисунок 4.14

Виконаємо перемикання Годсіла-Маккея для отриманого графа.

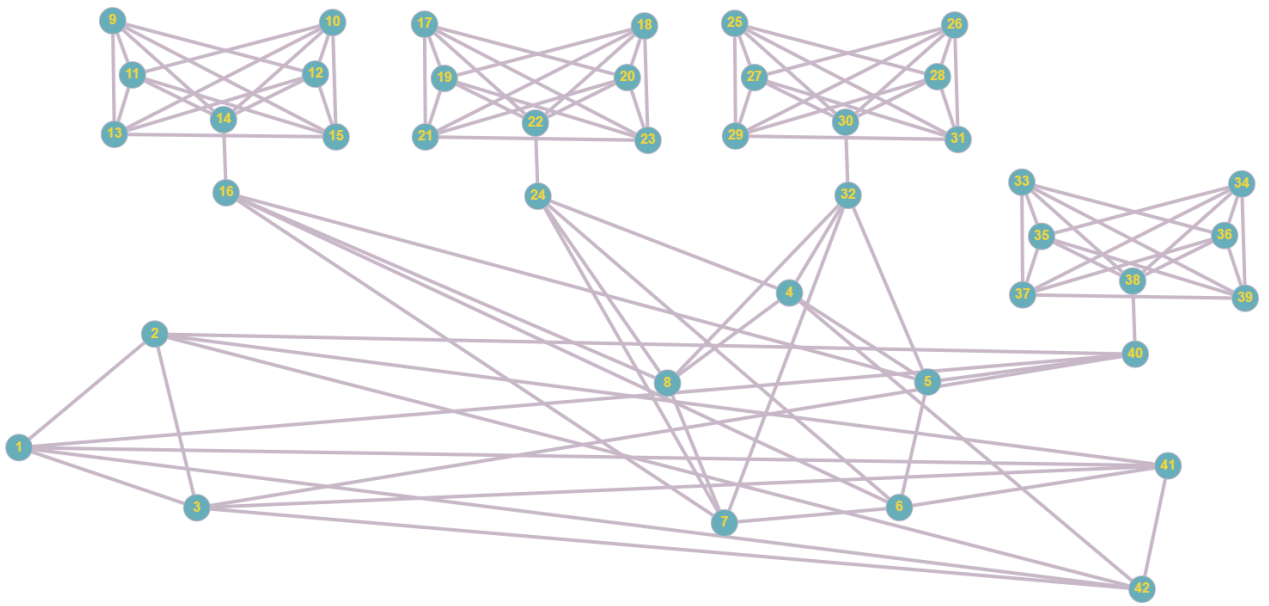


Рисунок 4.15

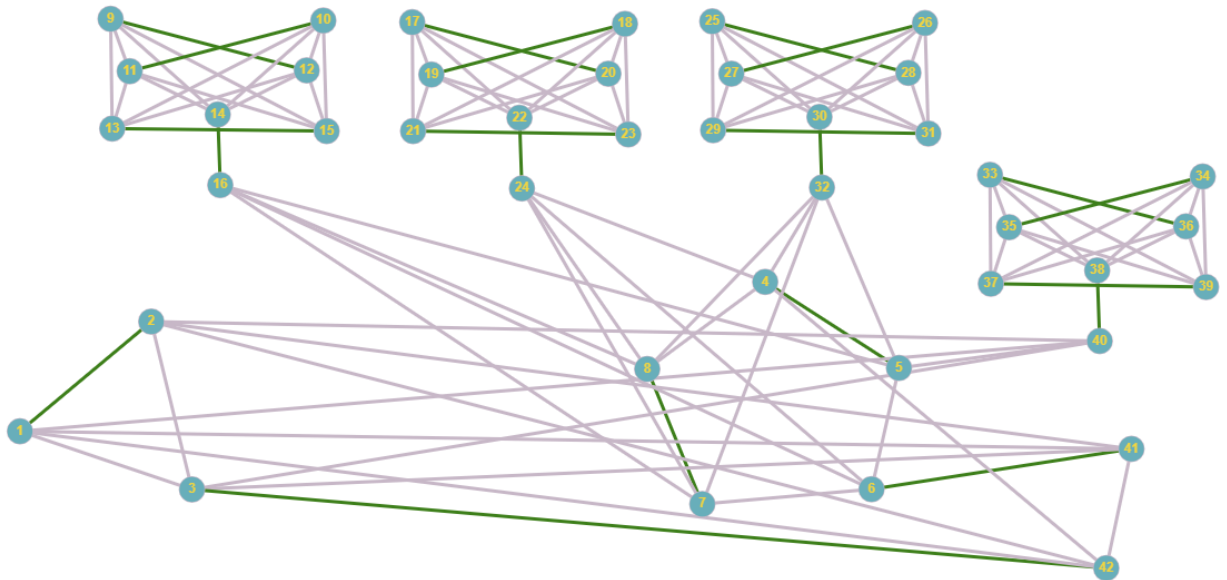


Рисунок 4.16

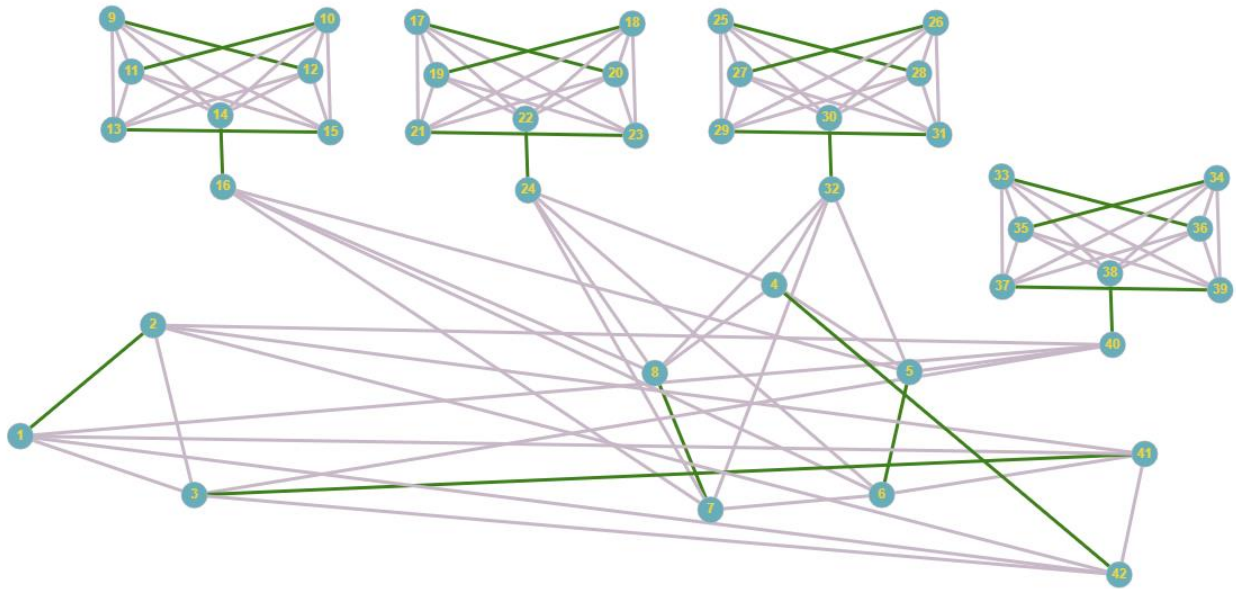


Рисунок 4.17

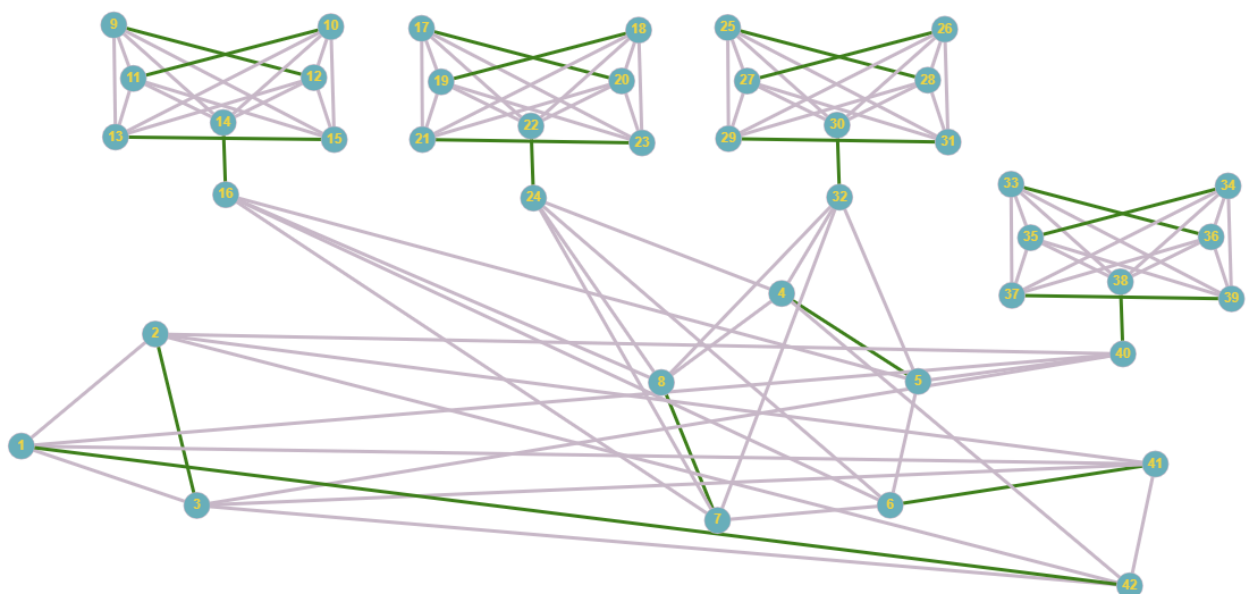


Рисунок 4.18

Як можна побачити з рисунків 4.16 - 4.18, після перемикання граф матиме декілька досконалих паруваль. Тоді, за теоремою маємо, що графи на рисунках 4.13 і 4.15 коспектральні, в чому також можна пересвідчитися, порівнявши їхні характеристичні поліноми:

Для обчислення характеристичних многочленів був використаний алгоритм Фадєєва-Ле Вер'є, який запрограмований на сайті

<https://planetcalc.com/8267/>

Поліном графа 4.13

$$\begin{aligned}
 P_1(\lambda) = & \lambda^{42} - 105\lambda^{40} - 172\lambda^{39} + 4644\lambda^{38} + 15196\lambda^{37} - 99436\lambda^{36} - \\
 & - 547844\lambda^{35} + 688278\lambda^{34} + 9803676\lambda^{33} + 11884198\lambda^{32} - 79243612\lambda^{31} - \\
 & - 269795896\lambda^{30} + 37854436\lambda^{29} + 1734066112\lambda^{28} + 3125646564\lambda^{27} - \\
 & - 1424906083\lambda^{26} - 12506164396\lambda^{25} - 14730501621\lambda^{24} + 7461223032\lambda^{23} + \\
 & + 35617254620\lambda^{22} + 28771613744\lambda^{21} - 13618443612\lambda^{20} - \\
 & - 40003316816\lambda^{19} - 21090432892\lambda^{18} + 10491115424\lambda^{17} + \\
 & + 17143262144\lambda^{16} + 4956528640\lambda^{15} - 3168699520\lambda^{14} - 2520228864\lambda^{13} - \\
 & - 290437120\lambda^{12} + 252121088\lambda^{11} + 87467008\lambda^{10} + 3579904\lambda^9 - 1310720\lambda^8.
 \end{aligned}$$

Поліном графа 4.15

$$\begin{aligned}
 P_2(\lambda) = & \lambda^{42} - 105\lambda^{40} - 172\lambda^{39} + 4644\lambda^{38} + 15196\lambda^{37} - 99436\lambda^{36} - \\
 & - 547844\lambda^{35} + 688278\lambda^{34} + 9803676\lambda^{33} + 11884198\lambda^{32} - 79243612\lambda^{31} - \\
 & - 269795896\lambda^{30} + 37854436\lambda^{29} + 1734066112\lambda^{28} + 3125646564\lambda^{27} - \\
 & - 1424906083\lambda^{26} - 12506164396\lambda^{25} - 14730501621\lambda^{24} + 7461223032\lambda^{23} + \\
 & + 35617254620\lambda^{22} + 28771613744\lambda^{21} - 13618443612\lambda^{20} - \\
 & - 40003316816\lambda^{19} - 21090432892\lambda^{18} + 10491115424\lambda^{17} + \\
 & + 17143262144\lambda^{16} + 4956528640\lambda^{15} - 3168699520\lambda^{14} - 2520228864\lambda^{13} - \\
 & - 290437120\lambda^{12} + 252121088\lambda^{11} + 87467008\lambda^{10} + 3579904\lambda^9 - 1310720\lambda^8.
 \end{aligned}$$

Власні числа поліномів:

$x_1 = 0$	$x_{15} = -1$	$x_{29} = -1.72311$
$x_2 = 0$	$x_{16} = -1$	$x_{30} = 1.50185$
$x_3 = 0$	$x_{17} = -2$	$x_{31} = -2.09165$
$x_4 = 0$	$x_{18} = -2$	$x_{32} = -2.13741$
$x_5 = 0$	$x_{19} = -2$	$x_{33} = 1.6419$
$x_6 = 0$	$x_{20} = -2$	$x_{34} = -2.47449$
$x_7 = 0$	$x_{21} = -2$	$x_{35} = -2.48344$
$x_8 = 0$	$x_{22} = 5$	$x_{36} = -2.91645$
$x_9 = 1$	$x_{23} = 0.0954$	$x_{37} = 4.91771$
$x_{10} = -1$	$x_{24} = -0.60907$	$x_{38} = 4.06681$
$x_{11} = -1$	$x_{25} = -0.39471$	$x_{39} = -2.61776$
$x_{12} = -1$	$x_{26} = 0.43207$	$x_{40} = 4.70625$
$x_{13} = -1$	$x_{27} = 0.6305$	$x_{41} = 4.90255$
$x_{14} = -1$	$x_{28} = 0.65025$	$x_{42} = 4.90281$

ВИСНОВКИ

Курсову роботу присвячено дослідженню спектральної теорії регулярних графів. Ця галузь теорії графів за останній час набула широкого використання, зокрема, в галузях комп'ютерних мереж та хімії. Більш детально у роботі проаналізовано спектральні властивості регулярних графів.

У першому розділі було розглянуто основні означення, як наприклад, означення простого графа, означення характеристичного многочлена та означення матриць, пов'язаних із графом. Також у першому розділі продемонстровано розрахунок спектра матриці суміжності та матриці Лапласа циклічного графа на трьох вершинах.

У другому розділі наведено основні властивості регулярних графів, зокрема, теорема про власні значення регулярного графа та теорема про наявність досконалого парування у довільному регулярному дводольному графі. Застосування деяких теорем та тверджень проілюстровано на прикладах.

У третьому розділі наведено теорему, яка демонструє для k -регулярних графів при $k \geq 5$ наявність коспектральної пари графів, один з яких має досконале парування, а інший не має.

У четвертому розділі самостійно побудовано приклад пари 5-регулярних коспектральних графів на 42 вершинах, один з яких має досконале парування, а інший – ні, з використанням перемикання Годсіла-Маккея.

Загалом власні значення та характеристичні многочлени графів вивчаються у багатьох сферах людської діяльності та галузях науки, та окремі з цих досліджень опрацьовано та розвинуто в даній курсовій роботі.

Список використаної літератури

1. Schwenk A. J. Almost All Trees Are Cospectral / Allen Schwenk // New Directions in the Theory of Graphs / Allen Schwenk. – New York: Academic Press, 1973. – С. 275–307.
2. Evert Brouwer A. Cospectral Graphs on 12 Vertices [Електронний ресурс] / A. Evert Brouwer, E. Spence // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2009. – Режим доступу до ресурсу: <https://doi.org/10.37236/258>.
3. Hall M. Combinatorial theory / Marshall Hall. – New York: Wiley, 1967. – 440 с. – (2).
4. Blázsik L. Z. Cospectral regular graphs with and without a perfect matching [Електронний ресурс] / Z. L. Blázsik, J. Cummings, W. H. Haemers // Discrete Mathematics. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X14004099?via%3Dihub>.
5. Cvetkovic D. M. Graphs and their spectra / Dragos M. Cvetkovic – Belgrade: Elektrotehn. Fakultet, 1971. – (Serija Matematika i fizika). – 50 с.
6. Brouwer E. A. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – New York: Springer, 2011. – 250 с.
7. Collatz L. Spektren endlicher Grafen / L. Collatz, U. Sinogowitz. – Hamburg: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1957. – 77 с.
8. van Dam R. E. Which graphs are determined by their spectrum? [Електронний ресурс] / E. R. van Dam, W. H. Haemers // Linear Algebra and its Applications. – 2003. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437950300483X>.
9. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ: Національний університет "Києво-Могилянська академія", 2007. – 138 с.
10. Cvetkovic D. Спектры графов. Теория и применение / D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs. – Київ: Наукова думка, 1984. – 383 с.