УДК 004.42:510.69

Шкільняк О. С., Шкільняк С. С.

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ ЕПІСТЕМІЧНОГО ТИПУ

Побудовано нові класи спеціальних логік часткових предикатів, орієнтованих на композиційно-номінативні моделі програм. Запропоновано композиційно-номінативні мультимодальні логіки, в межах яких виділено логіки епістемічного типу. Досліджено семантичні властивості цих логік на реномінативному, кванторному та кванторно-еквацційному рівнях.

Ключові слова: частковий предикат, модальна логіка, епістемічна логіка, композиційно-номінативний підхід, семантика.

Розвиток інформаційних технологій та пов'язана з цим поява нових завдань і проблем характеризуються розширенням сфери застосування математичної логіки. Виникають та розвиваються [див.: 1, 9] нові її розділи, які ефективно використовуються в інформатиці та програмуванні. Важливе місце серед них посідають модальні логіки, зокрема темпоральні та епістемічні. На базі темпоральних логік побудовано низку систем специфікації та верифікації програм. Епістемічні логіки застосовуються для опису інтелектуальних систем і баз знань.

Традиційні модальні логіки [див.: 2, 6] базуються на класичній логіці тотальних скінченноарних предикатів. Водночас у програмуванні та моделюванні широко використовуються часткові відображення над складними номінативними (іменними) даними. Обмеження класичної та базованих на її основі спеціальних логік, зокрема модальних, мотивують необхідність побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Природною основою такої побудови є спільний для логіки і програмування композиційно-номінативний підхід [5]. На його базі розроблено низку логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. Важливе місце серед них посідають композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [3], які синтезують можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [4].

Основним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [3]. Такі системи описують світи розгляду модальної логіки. Важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС), в межах яких природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо. Окремими випадками ТМС є загальні транзиційні та темпоральні. На основі спеціального уточнення поняття КНМС побудовано і досліджено [7, 8] нові класи загальних транзиційних і темпоральних КНМЛ реномінативного та першопорядкових рівнів.

У цій статті пропонуються композиційно-номінативні мультимодальні логіки, в межах яких виділено КНМЛ епістемічного типу. Описано семантичні моделі та мови і досліджено семантичні властивості таких логік на реномінативному та першопорядкових (кванторному та кванторно-еквацйному) рівнях.

Поняття, які не визначаються у статті, будемо тлумачити за [4, 8].

1. Композиційно-номінативні системи

Під КНМС будемо розуміти об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Jm)$. Тут:

– Cms – композиційна модальна система (КМС);

– Fm – множина формул відповідної мови КНМЛ;

– Jm – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС задають семантичні аспекти світу, їх можна зарахувати до моделей реляційного типу. КМС мають вигляд $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C)$. Тут

– $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу;

– $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$ вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}$;

– Pr – множина предикатів на станах світу;

– C – множина композицій на Pr: визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями.

Базовими загальнологічними композиціями реномінативного рівня є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$; кванторного рівня – $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$; кванторно-еквацйного – $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$; $=_{xy}$.

Для КНМЛ номінативних рівнів S конкретизуємо як множину неокласичних [4] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}A_{\alpha} \to \{T, F\}$. Тоді

$Pr = \bigcup_{\alpha\in S} Pr_{\alpha}$ – множина предикатів усіх станів світу,

$A = \bigcup_{\alpha\in S} A_{\alpha}$ – множина усіх базових даних світу.

Транзиційні модальні системи (ТМС) – це КНМС, у яких множина $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$. Ці відношення трактуємо як відношення переходу на станах.

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$, а базовою модальною композицією є $\Box$ (необхідно), називають загальними.

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$, а базовими модальними композиціями є $\Box_{\uparrow}$ (завжди буде) та $\Box_{\downarrow}$ (завжди було), називають темпоральними.

ТМС із $\boldsymbol{R} = \{\rhd_i \mid i\in I\}$ та базовими модальними композиціями $\mathbf{K}_i$, $i\in I$, у яких кожному $\rhd_i$ зіставлено відповідну $\mathbf{K}_i$, назвемо мультимодальними (ММС).

Загальні ТМС є окремим випадком ММС, тоді $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного відношення $\rhd$ та маємо єдину базову модальну композицію $\mathbf{K}$, ідентичну $\Box$.

Дія K_i теж аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого відношення $\rhd_i$, $i\in I$.

Опишемо мову ММС кванторного рівня.

Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина $Ms = \{K_i \mid i\in I\}$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p\in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

FP) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формула;

FR) нехай Φ – формула; тоді $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула;

F∃) нехай Φ – формула; тоді $\exists x\Phi$ – формула;

FM) нехай Φ – формула, $K_i \in Ms$; тоді $K_i\,\Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I} : Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr$, при цьому $\boldsymbol{I}(p,\alpha) \in Pr_{\alpha}$. Таке $\boldsymbol{I}$ продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Jm : Fm \times \boldsymbol{S} \to Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_{\alpha}$.

IA) $Jm(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для кожного $p\in Ps$;

IP) $Jm(\neg, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$; $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

IR) $Jm(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi, \alpha))$;

I∃) $Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \\ \text{для деякого } a \in A_{\alpha}, \\ F, \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \\ \text{для всіх } a \in A_{\alpha}, \\ \text{не визначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

IM) $Jm(K_i\,\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S \\ \text{таких, що } \alpha \rhd_i \delta, \\ F, \text{якщо існує } \delta \in S : \alpha \rhd_i \delta \\ \text{та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{не визначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha \rhd_i \beta$, то $Jm(K_i\,\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in {}^{V}A_{\alpha}$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

Аналогічно описуємо мову ММС реномінативного рівня, тільки у відповідних визначеннях треба опустити пункти, пов’язані з кванторами.

Опишемо мову ММС кванторно-еквація́йного рівня. Особливістю цього рівня є наявність спеціальних 0-арних композицій – предикатів рівності $=_{xy}$.

Предикати $=_{xy}$ визначаються так.

$=_{xy}(d) = T$, якщо $d(x)\downarrow = d(y)\downarrow$; $=_{xy}(d) = F$, якщо $d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow$; інакше $=_{xy}(d)\uparrow$.

Таким чином, предикати рівності $=_{xy}$ задають слабку (з точністю до визначеності) рівність компонентів даного з іменами x та y.

Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $=_{xy}$; модальна сигнатура $Ms = \{K_i \mid i\in I\}$. Множина формул мови Fm визначається так, як для випадку ММС кванторного рівня, із додаванням п. FE:

FE) кожний символ $=_{xy}$ є атомарною формулою.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I} : Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr$. При цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha) \in Pr_{\alpha}$ та $\boldsymbol{I}(=_{xy}) = =_{xy}$ для всіх $x, y\in V$.

Таке $\boldsymbol{I}$ продовжимо до $Jm : Fm \times \boldsymbol{S} \to Pr$ так, як це зроблено для випадку ММС кванторного рівня, додаючи при цьому п. IE для $=_{xy}$:

IE) $Jm(=_{xy}, \alpha) = \boldsymbol{I}(=_{xy}, \alpha)$ для всіх $x, y\in V$.

Замість $=_{xy}$ будемо також традиційно писати $x = y$.

Рівність об’єктів (базових даних) трактуємо як їх тотожність, тому для кожного $d\in {}^{V}A_{\alpha}$ неможливо в одному стані $d(x)\downarrow = d(y)\downarrow$, а в іншому – $d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow$.

Для ММС так, як і для загального випадку КНМС [3, 4], даємо визначення типу ММС, істинної в стані та в ММС формули, всюди істинної формули.

Φ істинна в стані α (позначаємо $\alpha \models \Phi$), якщо предикат Φ_{α} є істинним.

Φ істинна в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо $\alpha \models \Phi$ для кожного $\alpha\in\boldsymbol{S}$.

Φ всюди істинна, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

2. Композиційно-номінативні системи епістемічного типу

Залежно від властивостей відношень $\rhd_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо випадки, коли $\rhd_i$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ R; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо T; якщо всі $\rhd_i$ симетричні, то пишемо S. Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, T-ММС, S-ММС, RT-ММС, RS-ММС, TS-ММС, RTS-ММС.

Можливі набагато складніші, змішані типи ММС (наприклад, відношення $\rhd_1$ транзитивне, $\rhd_2$ транзитивне та рефлексивне, $\rhd_3$ симетричне і т.д.).

ММС зі скінченними множинами однотипних відношень $\rhd_i$ назвемо ММС епістемічного типу. Окремим випадком таких ММС є загальні ТМС.

ММС епістемічного типу тісно пов'язані з базовими системами традиційної епістемічної логіки. Епістемічна модальна логіка [1, 2] досліджує різні аспекти знання. Така логіка все частіше має застосування при побудові інтелектуальних інформаційних систем, експертних систем та баз знань.

Відомо багато різновидів епістемічної логіки. Найпростіші з них використовують єдиний модальний оператор знання **K**, що відповідає наявності єдиного суб'єкта знання (агента, експерта). Більш загальними є епістемічні системи із скінченною множиною суб'єктів знання. У цьому випадку кожному такому суб'єкту (агенту) зіставляється відповідний модальний оператор знання.

Для систем епістемічної логіки реляційна семантика є дуже природною. При цьому стани світу трактуються як стани знання, ситуації. Для систем із n агентами маємо модальні оператори знання $\mathbf{K_1}, \ldots, \mathbf{K}_n$ та відповідні їм відношення досяжності $\rhd_1, \ldots, \rhd_n$. При цьому $\alpha \rhd_k \beta$ означає: k-й агент в ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

В базових епістемічних системах постулюють [1, 2] такі аксіоми знання:

AE) $\mathrm{K}_i(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\mathrm{K}_i \Phi \rightarrow \mathrm{K}_i \Psi)$ – замкненості знання щодо імплікації;

AR) $\mathrm{K}_i \Phi \rightarrow \Phi$ – реальності знання;

AP) $\mathrm{K}_i \Phi \rightarrow \mathrm{K}_i \mathrm{K}_i \Phi$ – позитивної рефлексії;

AN) $\neg \mathrm{K}_i \Phi \rightarrow \mathrm{K}_i \neg \mathrm{K}_i \Phi$ – негативної рефлексії.

Аксіоми AP та AN називають також аксіомами позитивної інтроспективності та негативної інтроспективності.

Істинність цих (і не тільки цих) аксіом у реляційних системах пов'язана [1] з властивостями відповідних відношень досяжності цих систем. Істинність аксіом AR рівносильна рефлексивності відношень досяжності, істинність аксіом AP рівносильна їх транзитивності, істинність аксіом AN дає транзитивність і симетричність відношень досяжності.

Системи епістемічної логіки з n агентами та рефлексивними відношеннями $\rhd_i$ названі [1] $T_{(n)}$-системами, із рефлексивними й тразитивними $\rhd_i$ – $S4_{(n)}$-системами, із рефлексивними, тразитивними й симетричними $\rhd_i$ – $S5_{(n)}$-системами.

Традиційні системи епістемічної логіки знання можна природним чином розглядати в межах ММС епістемічного типу. Зокрема, узагальненнями $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$-систем є, відповідно, R-ММС, RT-ММС та RTS-ММС.

3. Семантичні властивості КНМС

Залежно від відповіді на запитання, як визначити $\Phi_\delta(d)$ при умові $d \notin {}^V\!A_\delta$, можна виділити [8] КНМС із сильною умовою та КНМС із загальною умовою визначеності на станах.

Нехай при умові $d \notin {}^V\!A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$. Така властивість — сильна умова визначеності на станах. ММС із такою умовою назвемо St-ММС.

Для St-ММС із $(\mathrm{K}_i \Phi)_\alpha(d) = T$ випливає: $d \in {}^V\!A_\delta$ для всіх δ таких, що $\alpha \rhd_i \delta$. Це означає, що при переході до стану-наступника об'єкти не можуть зникати.

Модальні композиції St-ММС не зберігають еквітонність предикатів. Це засвідчує наведений в [8] відповідний приклад загальної St-ТМС. Але загальні ТМС – це окремий випадок ММС, тому він фактично буде прикладом St-ММС.

Водночас St-ММС зберігають [8] слабшу властивість:

Теорема 1. *Композиції* $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, *зберігають слабку еквітонність.*

Доведення теореми 1 фактично повторює доведення відповідної теореми для композиції $\Box$ загальних ТМС (див. [8]).

Звідси наслідок: базові композиції St-ММС зберігають слабку еквітонність.

Тепер при умові $d \notin {}^V\!A_\delta$ задаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ – скорочене позначення ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$. Така властивість – загальна умова визначеності на станах.

ММС із загальною умовою визначеності назвемо Gn-ММС.

Теорема 2. *Для Gn-ММС композиції* $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, *зберігають еквітонність.*

Доведення. Нехай Φ_α еквітонний та для кожного β такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, предикат Φ_β еквітонний. Нехай $d, d' \in {}^V\!A_\alpha$, $d \subseteq d'$, $(\mathrm{K}_i \Phi)_\alpha(d)\downarrow$. Можливі два випадки.

Нехай $(\mathrm{K}_i \Phi)_\alpha(d) = F$. Тоді для деякого β такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, маємо $\Phi_\beta(d_\beta) = F$. Але $d \subseteq d' \Rightarrow d_\beta \subseteq d'_\beta$, тому $\Phi_\beta(d'_\beta) = F$ за еквітонністю Φ_β, звідки $(\mathrm{K}_i \Phi)_\alpha(d') = F$.

Нехай $(\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d) = T$. Тоді для кожного γ такого, що $\alpha\,_{\boldsymbol{i}}\,\gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d_\gamma) = T$. При $d \subseteq d'$ маємо $d_\gamma \subseteq d'_\gamma$, тому $\Phi_\gamma(d'_\gamma) = T$ за еквітонністю Φ_γ. Це вірно для кожного γ такого, що $\alpha \rhd_{\boldsymbol{i}} \gamma$, звідки $(\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d') = T$. Отже, $(\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha$ еквітонний.

Звідси наслідок: базові композиції *Gn*-ММС зберігають еквітонність.

Символи модальних композицій можна проносити через реномінації:

Теорема 3. $\boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}\,\mathrm{K}_i\,\Phi(d) = \mathrm{K}_i\,\boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi(d)$ *для довільних* $\mathrm{K}_i \in Ms$, α, Φ *та* $d \in {}^V\!A_\alpha$.

Теорема вірна як для *St*-ММС, так і для *Gn*-ММС. Аналогічні твердження для $\Box$ у випадках загальних *St*-ТМС та загальних *Gn*-ТМС доведено в [8]. Доведення теореми 3 в цілому подібне до доведення зазначених тверджень.

Наслідок 1. *Формули вигляду* $\boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}\,\mathrm{K}_i\,\Phi \leftrightarrow \mathrm{K}_i\,\boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi$ *всюди істинні.*

Розглянемо взаємодію в ММС модальних композицій та кванторів.

Теорема 4. *Нехай* $\boldsymbol{M}$ *– довільна St-ММС чи Gn-ММС. Тоді*:

1) $\boldsymbol{M} \vDash \exists x\,\mathrm{K}_i\,\Phi \to \mathrm{K}_i\,\exists x\Phi$;

2) $\boldsymbol{M} \vDash \mathrm{K}_i\forall x\Phi \to \forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$.

Для загальних *St*-ТМС та *Gn*-ММС відповідні твердження формулюються для $\Box$:
$\boldsymbol{M} \vDash \exists x\,\Box\Phi \to \Box\,\exists x\Phi$ та $\boldsymbol{M} \vDash \Box\forall x\Phi \to \forall x\,\Box\Phi$. Зазначені твердження доведені в [8]. Теорема 4 доводиться подібним чином.

Наслідок 2. *Формули* $\exists x\mathrm{K}_i\,\Phi \to \mathrm{K}_i\,\exists x\Phi$ *та* $\mathrm{K}_i\forall x\Phi \to \forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$ *всюди істинні.*

Водночас $\forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi \to \mathrm{K}_i\forall x\Phi$ та $\mathrm{K}_i\exists x\Phi \to \exists x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$ не є всюди істинними.

Відповідні контрмоделі для випадку загальних ТМС та $\Box$ наведено в [8].

Розглянемо властивості ММС, пов'язані з предикатами рівності.

Теорема 5. *Формули* $x = y \to \mathrm{K}_i\,x = y$ *та* $\mathrm{K}_i\,x = y \to x = y$ *є всюди істинними.*

Доводимо $\vDash x = y \to \mathrm{K}_i\,x = y$. Припустимо супротивне: для деяких $\boldsymbol{M}$, $\alpha \in \boldsymbol{S}$ та $d \in {}^V\!A_\alpha$ маємо $(x = y)_\alpha(d) = T$ та $(\mathrm{K}_i\,x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає: для деякого $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\,_{\boldsymbol{i}}\,\beta$, маємо $(x = y)_\beta(d) = F$. Звідси $d(x)\downarrow$, $d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)$. Але із $(x = y)_\alpha(d) = T$ маємо $d \in {}^V\!A_\alpha$, $d(x)\downarrow$, $d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)$. Отримали суперечність.

Доводимо $\vDash \mathrm{K}_i\,x = y \to x = y$. Припустимо супротивне: для деяких ММС $\boldsymbol{M}$, $\alpha \in \boldsymbol{S}$ та $d \in {}^V\!A_\alpha$ маємо $(\mathrm{K}_i\,x = y)_\alpha(d) = T$ та $(x = y)_\alpha(d) = F$. Друга умова означає, що $d \in {}^V\!A_\alpha$, $d(x)\downarrow$, $d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)$. Умова $(\mathrm{K}_i\,x = y)_\alpha(d) = T$ означає, що для всіх $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha \rhd_{\boldsymbol{i}} \beta$, маємо $(x = y)_\beta(d) = T$. Але тоді $d(x)\downarrow$, $d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)$. Отримали суперечність.

Наслідок 3. *Формули вигляду* $x = y \leftrightarrow \mathrm{K}_i\,x = y$ *є всюди істинними.*

Твердження 1. *Неможливо* $\alpha \vDash x = y$ *та* $\alpha \nvDash \mathrm{K}_i\,x = y$.

Припустимо супротивне: $\alpha \vDash x = y$ та для деякого $d \in {}^V\!A_\alpha$ маємо $(\mathrm{K}_i\,x = y)_\alpha(d)\downarrow = F$. Це означає: $(x = y)_\beta(d) = F$ для деякого $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\,_{\boldsymbol{i}}\,\beta$. Звідси випливає: $d(x)\downarrow$, $d(y)\downarrow$, $d(x) \neq d(y)$. Згідно $d \in {}^V\!A_\alpha$, а звідси $d(x) \in A_\alpha$, $d(y) \in A_\alpha$ та $d(x) \neq d(y)$, що дає $(x = y)_\alpha(d) = F$. Але це суперечить $\alpha \vDash x = y$.

Водночас можливо $\alpha \vDash \mathrm{K}_i\,x = y$ та $\alpha \nvDash x = y$. Це випливає із наведеного в [8] приклада загальних ТМС, який засвідчує можливість $\alpha \vDash \Box\,x = y$ та $\alpha \nvDash x = y$.

Зауважимо, що прийняте нами трактування рівності як слабкої веде до того, що $\alpha \vDash \mathrm{K}_i\,x = y$ можливе вже при неіснуванні станів, досяжних із α: тоді для всіх $d \in {}^V\!A_\alpha$ маємо $(\mathrm{K}_i\,x = y)_\alpha(d)\uparrow$.

Таким чином, при розгляді на окремих станах формули вигляду $x = y \leftrightarrow \mathrm{K}_i\,x = y$ можуть і не бути істинними.

Розглянемо тепер властивості логічного наслідку для множин специфікованих станами формул, пов'язані з модальними композиціями ММС.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул (див.: [8]).

Δ є логічним наслідком Γ в КНМС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^V\!A$ із того, що $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$, випливає, що неможливо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma \vDash \Delta$), якщо $\Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

На основі теореми 3 для *St*-ММС та *Gn*-ММС отримуємо:

$\mathrm{RK}_{i\,\vdash})$ $\Gamma, \boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}(\mathrm{K}_i\;\Phi)^\alpha \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, \mathrm{K}_i\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)^\alpha \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\mathrm{RK}_{i\,\dashv})$ $\Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta,\; \boldsymbol{R}^{\bar v}_{\bar x}(\mathrm{K}_i\;\Phi)^\alpha\;\mathrm{K}_i \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta,\; \mathrm{K}_i\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)^\alpha$.

Із елімінацією модальностей пов'язані такі властивості:

$\mathrm{K}_{i\,\vdash})$ $\mathrm{K}_i\,\Phi^\alpha, \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha\,_i\,\beta\} \cup \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\mathrm{K}_{i\,\dashv})$ $\Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i\,\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\beta$ для деякого стану β такого, що $\alpha \rhd_i \beta$.

Для ММС кванторно-еквацiйного рівня справджуються також властивості:

$\mathrm{EK}_{i\,\vdash})$ $x = y^\alpha, \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta \Rightarrow \mathrm{K}_i\,x = y^\alpha, \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\mathrm{EK}_{i\,\dashv})$ $\Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta, x = y^\alpha \Rightarrow \Gamma \vDash_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i\,x = y^\alpha$.

Водночас в загальному випадку умову "$\Rightarrow$" не можна посилити до "$\Leftrightarrow$". Відповідні контрприклади для випадку загальних ТМС та $\Box$ наведено в [8]. Враховуючи, що загальні ТМС є окремим випадком ММС епістемічного типу, неможливість посилення "$\Rightarrow$" до "$\Leftrightarrow$" справджується для загального випадку ММС, зокрема, для ММС епістемічного типу.

Висновки

У роботі побудовано нові класи спеціальних логік часткових предикатів, орієнтованих на композиційно-номінативні моделі програм. Запропоновано композиційно-номінативні мультимодальні логіки, в межах яких виділено логіки епістемічного типу. Описано семантичні моделі та мови цих логік на реномінативному, кванторному, кванторно-еквацiйному рівнях. Виділено композиційно-номінативні мультимодальні системи із сильною та загальною умовами визначеності на станах. Досліджено взаємодію реномінацій та кванторів із модальними композиціями. Наведено властивості логічного наслідку для множин специфікованих станами формул, пов’язані з модальними композиціями.

Для пропонованих логік планується побудова числень секвенційного типу.

Література

1. Андон Ф. И. Логические модели интеллектуальных информационных систем / Ф. И. Андон, А. Е. Яшунин, В. А. Резниченко. – К. : Наукова думка, 1999. – 396 с.
2. Ішмуратов А. Т. Вступ до філософської логіки / А. Т. Ішмуратов. – К. : Абрис, 1997. – 350 с.
3. Нікітченко М. С. Композиційно-номінативні модальні логіки / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. // Проблемы программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.
4. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
5. Никитченко Н. С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н. С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
6. Фейс Р. Модальная логика. / Р. Фейс. – М. : Наука. – 1974. – 520 с.
7. Шкільняк О. С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки : семантичні властивості, секвенційні числення / О. С. Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. Серія : Комп’ютерні науки. – 2008. – Т. 86. – С. 25–34.
8. Шкільняк О. С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
9. Handbook of Logic in Computer Science : In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994–2000.

O. Shkilniak, S. Shkilniak

COMPOSITION-NOMINATIVE LOGICS OF EPISTEMIC TYPE

New classes of special-purpose logics of partial predicates oriented on composition-nominative program models are defined. We introduce composition-nominative multimodal logics and their special case – composition-nominative logics of epistemic type. Semantic properties of such logics of renominative, quantifier and quantifier-equational levels are studied.

Keywords: partial predicate, modal logic, epistemic logic, composition-nominative approach, semantics.

Матеріал надійшов 23 березня 2011 р.