

Застосування Гіббсовських полів для відновлення зображень

Підготувала: Ровнік Вероніка

Мета

Відновлення зашумлених зображень за допомогою
чисельних симуляцій алгоритмів Метрополіса та семплінгу
Гіббса

Об'єкт дослідження

Чорно-білі зображення, представлені за допомогою моделі Ізінга

Байєсівський підхід до обробки зображень

- За допомогою теореми Байєса можна записати розподіл цільового зображення, знаючи певне апріорне знання – наявне зашумлене зображення:

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{y})} \propto \pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})$$

Необхідні теоретичні визначення

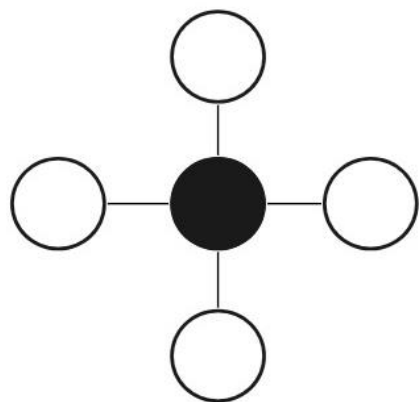
- *Випадкове поле* - це набір випадкових змінних $\{x_i: i \in I\}$, в якому кожна змінна x_i приймає значення на скінченній множині X . Позначатимемо множину сусідів вузла i як ∂i .
- Випадкове поле є **марковським**, якщо виконується умова локальності:

$$\pi(x_i | \mathbf{x}_{-i}) = \pi(x_i | \mathbf{x}_{\partial i})$$

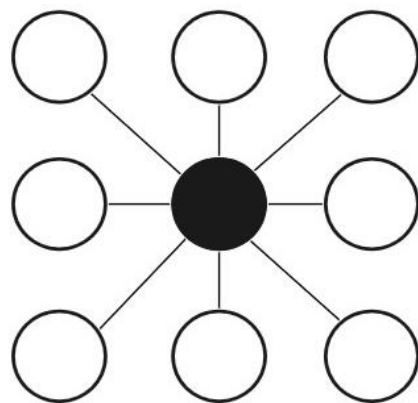
Марковські випадкові поля

- Зображення можна представити у вигляді *ґратки дискретних значень*. Кожна компонента *ґратки* – піксель зображення.
- На ґратці I має бути визначене *симетричне* відношення сусідства $\sim$:
 1. Якщо i є сусідом j ($i \sim j$), тоді j є сусідом i .
 2. i не є сусідом самого себе

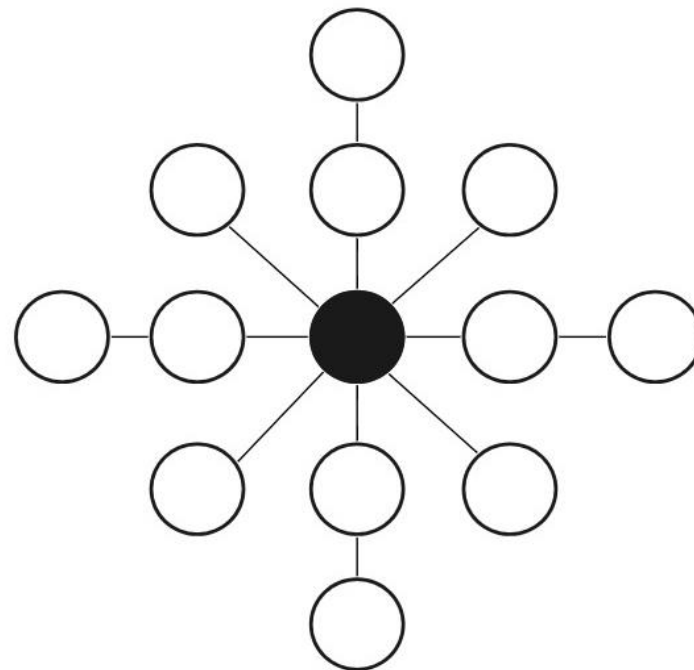
Найчастіше використовувані
системи околу



а) система околу з чотирьох сусідів



б) система околу з восьми сусідів



в) система околу з дванадцяти сусідів

Важливість марковських полей

Марковські випадкові поля є важливими в роботі із зображеннями завдяки тому, що попіксельне оновлення в методах Монте-Карло вимагають обчислення лише локальних повних умовних ймовірностей.

*Завдяки цьому, семплування **Гіббса** вимагає $O(n)$ операцій для марковського випадкового поля, на противагу до $O(n^2)$ операцій для випадкового поля, яке не задовольняє дану локальну властивість.*

Модель Ізінга

$$H = - \sum_{i \sim j} J x_i x_j - \sum_j h x_j$$

Модель Ізінга в алгоритмі Метрополіса

Знаючи певні апіорні знання і модель шуму, апостеріорний розподіл для оригінального зображення x можна записати таким чином:

$$\exp(\beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i = x_j]} + \sum_i h_i(x_i, y_i))$$