

М. А. Дуденко

Уніциклічні графи метричної розмірності 2 з двома основними вершинами

 Національний університет «Кієво-Могилянська академія», Київ.

Нехай $G = (V, E)$ — простий уніциклічний граф, тобто простий граф, що містить рівно один цикл, $G_1 = (V_1, E_1)$ підграф графа G , що є простим циклом. За графом G однозначно визначається метричний простір (V, d_G) , метрика d_G для довільних вершин v_1, v_2 в якому дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$ і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини v_1 і v_2 , якщо $v_1 \neq v_2$.

Вершина t розділяє вершини x та y , якщо виконується нерівність: $d_G(t, x) \neq d_G(t, y)$.

Означення 1. [1] Множина $M \subseteq V$ називається *метричним базисом* графа G , якщо для будь-якої пари вершин з V існує $t \in M$, яка розділяє ці вершини, і ця множина є найменшою серед усіх можливих. Кількість вершин в метричному базисі називається *метричною розмірністю* графа G і позначається $\dim(G)$.

Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus V_1$ графа G *проектуються* в вершину $w \in V_1$ якщо для довільної вершини $q \in V_1$ виконується нерівність: $d_G(u, w) < d_G(u, q)$. Вершини степеня 3 циклу, в які проєктуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо *основними*, а вершини, в які проєктуються вершини степеня не більшого 2 називатимемо *1-лишковими*.

Теорема. Нехай G_1 — уніциклічний граф, що має метричну розмірність 2 і містить в циклі лише 2 основні вершини u і v , а решта вершин мають степінь 2. Припустимо, що граф G отриманий з графа G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу і кінцями ланцюгів $L_1, \dots, L_k$, причому кожна вершина степеня 2 циклу склеюється з кінцем лише одного ланцюга. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли не існує 1-лишкової вершини w такої, що для суміжної з нею вершини a виконуються умови: найкоротший шлях від v до a містить найкоротший підшлях від u до a або навпаки, найкоротший шлях від v до a містить найкоротший підшлях від u до a .

- [1] Chartrand G. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph / Chartrand G., Eroh L., Johnson M. A. // Discrete Appl. Math. — Oellermann, 2000. — P. 99–113.

E-mail: ✉ rita.dudenko@gmail.com.