УДК 513.6

*Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.*

# РОЗШИРЕНІ 2-АДИЧНІ ЧИСЛА ЯК ЦЕНТРАЛІЗАТОРИ АВТОМОРФІЗМІВ РЕГУЛЯРНОГО КОРЕНЕВОГО ДЕРЕВА ВАЛЕНТНОСТІ 3

*Для опису централізаторів автоморфізмів регулярного кореневого 3-дерева вводяться розширені 2-адичні числа. Показано, що централізатор є напівпрямим добутком групи автоморфізмів відповідного дерева циклів та адитивної групи кільця 2-адичних чисел, розширених по вказаному дереву.*

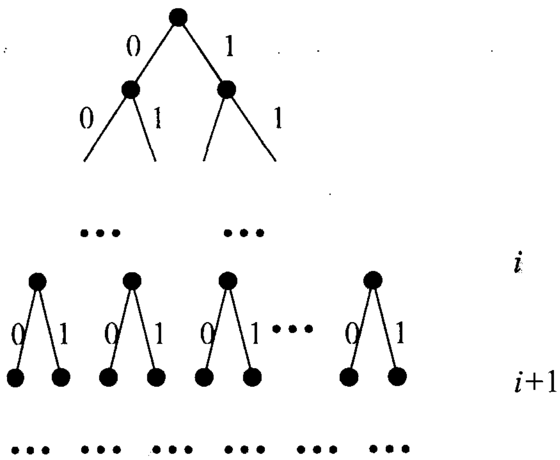
Нагадаємо означення дерева із заголовка статті. Множина вершин дерева розбивається на підмножини вершин однакового рівня.

a) $v_0$ - корінь або вершина нульового рівня;

b) для кожного $i = 0, 1, 2,..$ - дерево містить $2^i$ вершин та ребер *i-го* рівня.

Відношення суміжності вводиться у такий спосіб: кожна вершина $i$-го рівня з двома вершинами (лівою та правою) $i + 1$-го рівня.

Координатизація ребер цього дерева проводиться таким чином. Два суміжні ребра, що з'єднують вершину $i$-го з двома вершинами $i + 1$-го рівня, отримають мітки 0 (ліве) та 1 (праве).




Будь-який нескінченний шлях по дереву, що починається у кореневій вершині $v_0$, будемо називати кінцем дерева. Кожному кінцю дерева ставиться у відповідність нескінченна двійкова послідовність, складена з міток ребер, що входять у цей кінець, а довільній вершині – вектор його афінних координат, який складається з міток шляху, що з'єднує $v_0$ з нею.

Оскільки нескінченну двійкову послідовність розглядають як 2-адичне число із відповідного кільця $Z_2$, вказане дерево часто називають 2-адичним і позначають $T_2$. Абстрактну групу $AutT_2$ можна описати як проективну границю $\overline{W_\infty} = \underline{Lim} C_2 wr ... wr C_2$ ітерованих вінцевих добутків циклічних груп 2-го порядку (див. [1]).

З іншого боку, елементи $\overline{W_\infty}$ можна розглядати як нескінченні послідовності бульових функцій $g = <\sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \sigma_k(x_1, x_2, ..., x_{k-1})...>$, де $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ – координати вершини $k - 1$-го рівня, а значенням функції $\sigma_k$ одиниця, якщо відповідний автоморфізм дерева переставляє дві суміжні вершини $k$-го рівня, і є нуль, якщо автоморфізм залишає ці вершини нерухомими.

Якщо $Z_2$ розглядати як простір Бера, то група його ізометрій збігається з групою автоморфізмів дерева $AutT_2$ (див. [2]). Легко бачити, що множини вершин однакового рівня є інваріантними при дії $AutT_2$. Тоді для довільного автоморфізму $a$, що належить $AutT_2$, множина вершин $V^i$ $i$-го рівня розбивається в об'єднання циклів.

У роботі авторів [1] саму групу $AutT_2$ було розглянуто як метричний простір Бера з відповідною топологією. Ця топологія збігається з топологією проективної границі, а сама група $AutT_2$ є повною топологічною групою (теорема 1, [1]).

Із використанням цієї топології було дано опис централізаторів елементів групи $AutT_2$ максимального про-порядку. Виявляється, що централізатор елемента вказаного типу отримується як замикання (у вказаній топології) циклічної групи, яку він породжує (див. [1]).

Метою даної роботи є узагальнення цього результату на довільні елементи $AutT_2$.

**Означення 1.** Деревом циклового типу $D_a$ автоморфізму назвемо дерево, вершинами якого є цикли, причому дві вершини $D_a$ з'єднані ребром лише тоді, коли знаходяться по одній вершині з відповідних циклів, які з'єднані ребром в $T_2$.

Добре відомою є така теорема.

**Теорема 1**([2]). Автоморфізми $a, b \in AutT_2$ спряжені в $AutT_2$ тоді й тільки тоді, коли їхні дерева циклового типу ізоморфні.

Говоритимемо, що кінець $t \in T_2$ належить кінцю $c_a \in D_a$, якщо кожна вершина $n$-го рівня $x$ кінця належить циклу $n$-го рівня, що належить $c_a$. Поставимо у відповідність кожній вершині дерева $T_2$ цикл автоморфізму $a$, в який вона входить, і розглянемо відповідне відображення $\delta_a$: $T_2 \to D_a$. Очевидно, що воно індукує відображення кінців вказаних дерев.

**Теорема 2.** Існує епіморфізм $\varphi: C_{AutT_2}(a) \to AutD_a$.

Доведення. Розглянемо рівняння $a^x = a$, $x \in AutT_2$. Нехай $\Delta_a$ – множина представників $D_a$. $x$ природним чином індукує дію $\hat{x}: \Delta_a \to \Delta_a$. Маємо епіморфізм $\hat{\varphi}: x(\delta_1) \to \hat{x}(\delta_1)$. Епіморфізм $\hat{\varphi}: x(\delta_1) \to \hat{x}(\delta_1)$ задається таким чином: $\varphi = \delta_a * \hat{\varphi}$.

Ядро $\varphi$ епіморфізму позначимо як $H_a$.

**Теорема 3.** Існує мономорфізм $\varepsilon: AutD_a \to C_{AutT_2}(a)$.

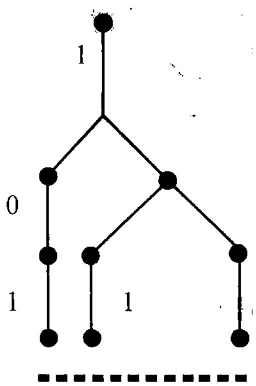
Доведення. Розглянемо рівняння $a^x = a$, $x \in AutT_2$. Нехай $(x^{-1}ax)(t_1) = t_2$, звідси $(ax)(t_1) = x(t_2)$. Тобто $a(t_1') = x(t_2')$, де $t_i' = x(t_i)(t_1, t_2, t_1', t_2' \in T_2)$.

Нехай задане відображення $y$: $\delta_1 \to \delta_2$, де $\delta_1, \delta_2$ – представники $D_a$. Якщо автоморфізм $x \in AutT_2$ переводить $t_1 \in c_a$ в $t_2 \in c_b$, то дія $x: c_a \to c_b$ визначена однозначно. Звідси $y$ єдиним чином підіймається до автоморфізму $x \in C_{AutT_2}(a)$, для якого $x(\delta_1) = \delta_2$. Зафіксуємо $\delta_1$ і для $\alpha \in AutD_a$ покладемо $\theta(\alpha) = y$. Означимо $\tilde{\varepsilon}(y)$ як продовження $y$ до $x \in C_{AutT_2}(a)$. Тоді мономорфізм будується так: $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} * \theta$.

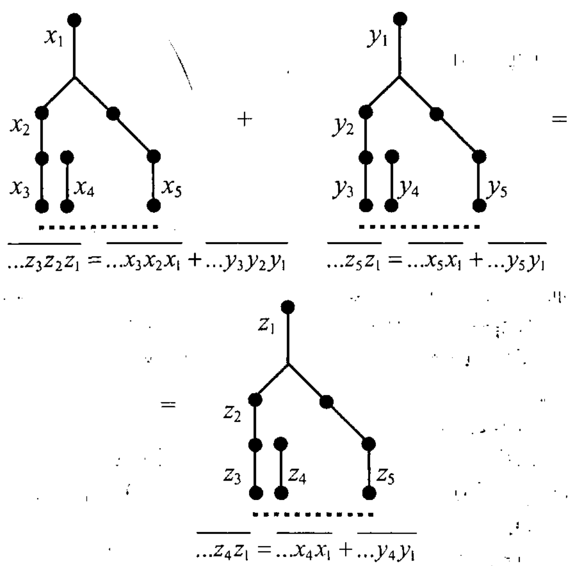
Образ мономорфізму $\varepsilon$ позначимо через $K_a$. З теорем 2, 3 отримуємо

**Наслідок.** Має місце розклад у напівпрямий добуток: $C_{AutT_2}(a) \cong H_a \lambda K_a$, де підгрупа $H_a$ є замкненим (у вищезгаданій топології) нормальним дільником.

**Означення 2.** Означимо кільце $Z_2(T)$ розширених 2-адичних чисел по дереву $T$. Для цього розглянемо дерево циклового типу для автоморфізму $a \in AutT_2$. Кожному кінцю $c_a \in D_a$ поставимо у відповідність 2-адичне число за таким правилом: послідовності ребер з $c_a$, в яких немає розгалуження $D_a$, поставимо у відповідність послідовність цифр у двійковому розкладі 2-адичного числа (див. мал. (*))




101 – 2-адичне число, що відповідає $c_a$. Множення й додавання введемо як множення і додавання 2-адичних чисел відповідних кінців:




Аналогічно для множення.

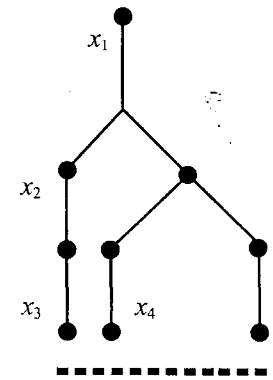
Дію $a$ на $\delta$ будемо називати обмеженням $a$ на $\delta(a[\delta])$.

**Означення 3.** Означимо піднесення автоморфізму $a \in AutT_2$ у розширений 2-адичний степінь за деревом $D_a$.

Розглянемо рівняння $a^x = a$, де $x$ – автоморфізм 2-го типу. Для кожного $c_a \in D_a$ маємо обмеження дії $a[c_a]$. $a[c_a]: c_a \to c_a$, і тому обмеження $a[c_a]$ можна розглядати як автоморфізм максимального про-порядку. Для автоморфізмів $x$ 2-го типу маємо $a[c_a]^{x[c_a]} = a[c_a]$.

Оскільки $a[c_a]$ максимального про-порядку, то $\exists! p \in Z_2$ э, $x[c_a] = (a[c_a])^p$ (див. [1]). Поставимо це $p$ у відповідність до обраного $c_a$.

Тобто (***)




$a := a^x$,

де кожне $p \in Z_2$, що відповідає кінцю $c_a \in D_a$, визначає дію автоморфізму $x$ 2-го типу на кінці $c_a(x[c_a])$.

**Теорема 4.** $H_a$ ізоморфна адитивній групі кільця розширених 2-адичних чисел по дереву $\delta_0(a)$.

**Доведення.**

Ізоморфізм встановлюється за таким правилом:

Для $p \in P_a$ $p \leftrightarrow a^p$

$$p_1 + p_2 \leftrightarrow a^{p_1} \cdot a^{p_2}$$

**Означення 4.** Означимо підкільце $Z(T) \subset \subset Z_2(T)$, в якому на кінцях $x \in T$ записують вищезазначеним чином двійковий 2-адичний розклад тільки для $x \in Z$.

Оскільки для кожного автоморфізму $a \in \in AutT_2$ обмеження $a[c_a]$ можна розглядати як автоморфізм максимального про-порядку, то, згідно з [1], маємо таке твердження.

**Теорема 5.** Замикання групи $\overline{Z(T)^+}$ у вищезгаданій топології ізоморфно $H_a$.

1. *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.* Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева // Наукові записки НаУКМА.
2. *Сущанский В. И.* Группы изометрий – пространства Бэра: Докл. АН УССР.– 1984.– № 8.– С. 28–30.
3. *Сущанский В. И.* Сплетения по последовательности груп подстановок и финитно-аппроксимируемые группы: Докл. АН УССР.– 1984.– № 2.– С.19–22.

*Yu. Bodnarchuk, D. Morozov*

# EXTENDED 2-ADIC NUMBERS AS CENTRALIZERS OF AUTOMORPHISMS OF THE REGULAR ROOT 3-TREE

*For description of centralizers of automorphisms of the regular root 3-tree the extended 2-adic numbers are introduced. It is shown that this centralizer is a semidirect product of automorphism group of the correspondent cycles tree with an additive group of 2-adic numbers ring which extended by cycles tree.*