

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Курсова робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «Динамічне хеджування: математичні підходи на фінансовому ринку»

Керівник курсової роботи
Кандидат математичних наук, доцент
Щестюк Наталія Юріївна

(підпис)

Виконав студент 3-го року навчання,
напрямку підготовки
Прикладна математика
Вронський Олексій Валерійович

Рецензент _____

Кваліфікаційна робота захищена з
оцінкою: _____

Секретар ЕК _____

«____» _____ 2021р.

ЗМІСТ

ВСТУП

РОЗДІЛ 1: Види хеджування

1.1. Статичне та динамічне	6
1.2. Повне та часткове	7
1.3. Чисте та перехресне	7

РОЗДІЛ 2: Математичне моделювання фінансових ринків. Біржові, небіржові фінансові інструменти

2.1. Небіржові інструменти: Форвард, Своп	8
2.2. Біржові інструменти: Ф'ючерс, Опціон	9
2.3. Математичне моделювання фінансових ринків: Модель Блека-Шоулза-Мертонна	10
2.4. «Чутливість» моделі Блека-Шоулза-Мертонна: Greek coefficients	12

РОЗДІЛ 3: Стратегії хеджування

3.1. Непокрита позиція	16
3.2. Покрита позиція	16
3.3. Stop-loss strategy	16
3.4. Динамічне дельта-хеджування	17

РОЗДІЛ 4: Динамічне дельта-хеджування на реальних фінансових даних

4.1. Опис складових програми	18
4.2. Приклади застосування	19

Висновки	24
----------------	----

Список використаних джерел	26
----------------------------------	----

Додаток А. Комп'ютерна реалізація дельта динамічного хеджування(Python)	27
---	----

Вступ

З кожним роком все більше стає очевидним незворотність процесу глобалізації і тому для країни дуже важливо мати прозорі та інклюзивні способи залучення іноземного капіталу. Одним із яких є ринок цінних паперів. Він є однією з найважливіших умов економічного розвитку, оскільки дає можливість робити довгострокові інвестиції, як для внутрішніх так і для зовнішніх інвесторів. Він складається з фондового ринку, ринку forex та ринку деривативів.

Протягом останніх трьох десятиліть ринок деривативів здобуває все більшої капіталізації та впливу на економічну політику в кожній країні зокрема. Дериватив (Derivative) – це похідний фінансовий інструмент, вартість якого «походить» (derive) виключно від вартості певного базового активу або сукупності активів (індекс). На цьому ринку відбувається торгівля не самими цінними паперами, а їх похідними, такими як ф'ючерси, форварди, опціони та свопи, які в свою чергу можуть базуватися на ціні облігацій, товарах, валюті, процентних ставках, ринкових індексах та акціях. Ліквідність та гібридність - це дві особливості цих інструментів які сприяли суттєвому збільшенню об'єму їх торгів та популярності. Ліквідність означає, що їх можна реалізувати на будь-якому з біржових або не біржових ринків. Гібридність в свою чергу надає багато можливостей до обслуговування різних сегментів економіки, спекуляцій та хеджування різних видів ризику.

Хеджування є інвестиційним статусом, метою якого є зменшення можливих ризиків шляхом інвестиції у актив з протилежною кореляцією. Інвестор може придбати деривативний контракт, вартість якого рухається у напрямку, протилежному вартості активу, яким володіє інвестор і таким чином прибуток за контрактом на дериватив може компенсувати збитки в базовому активі та навпаки. Хеджування за допомогою деривативних контрактів є дуже популярною стратегією ризик-менеджменту яка в подальшому буде тільки набирати все більшого визнання. Очевидним доказом цього може слугувати капіталізація ринку деривативів яка складає 12 трильйонів за ринковою ціною та

близько 1 квадрильйону за умовною ціною, що робить його найбільшим фінансовим ринком за капіталізацією.

Цій темі було присвячено багато книг та наукових статей. Такі науковці як Джон Халл у своїй книзі «Опціони, ф'ючерси та інші похідні інструменти» 1997, що була перевидана 10 разів, Насим Таллєб у книзі «Динамічне хеджування» 1997 та інші дуже детально розглядали цю тему. В кожній роботі уклін був в першу чергу на пояснення вже існуючих аксіом та висування власних теорій, а наочна демонстрація з програмним забезпеченням була відсутня.

Виходячи з актуальності теми, за мету даної роботи був взятий розгляд основних видів та стратегій хеджування, опис математичної складової ціноутворення опціонів моделлю Блека-Шоулза-Мертон, формулювання алгоритму дельта-динамічного хеджування та його дослідження, шляхом реалізації на мові Python.

Мета роботи зумовила таке наукове завдання:

- 1) Розглянути основні види та стратегії хеджування
- 2) Продемонструвати наочні приклади використання цих стратегій
- 3) Розглянути формулу Блека-Шоулза та стратегію дельта-динамічного хеджування
- 4) Написати програму яка на тренувальних даних буде виконувати потижневе хеджування проданого опціону, шляхом продажу та купівлі бездевідентних акцій.
- 5) Зробити аналіз отриманих результатів
- 6) Написання програми яка на реальних фінансових даних буде виконувати потижневе хеджування проданого опціону, шляхом продажу та купівлі акцій.
- 7) Аналіз отриманих результатів.
- 8) Написання програми яка на реальних фінансових даних буде виконувати потижневе хеджування своєї позиції як інвестора у фінансовий ринок.
- 9) Аналіз отриманих результатів.

Робота складається з чотирьох розділів, висновків та додатків.

Перший розділ присвячено основній теорії за темою хеджування. Наведені основні види хеджування.

У другому розділі розглянута модель Блека-Шоулза-Мертон для обрахунку справедливої ціни опціону. Наведено формули коефіцієнтів чутливості ціни опціону, а також зроблена оцінка внесків кожного коефіцієнту у вихідне значення моделі. Були доведені формули коефіцієнта дельта для колл та пут опціонів.

Третій розділ присвячено розгляду найпопулярніших стратегій хеджування. Для кожної стратегії було наведено приклад її використання.

У четвертому розділі наведено опис програми, що виконує дельта-хеджування та приклад її роботи на реальних фінансових даних компанії, що випустила опціон. Наведено відповідні висновки.

Створене програмна реалізація має цінність для компаній-андерайтерів, як інструмент бектестінгу для порівняння прийнятих рішень компанію щодо ціноутворення проданих опціонів, хеджування цих позицій у минулому, з моделлю ціноутворення Блека-Шоулза-Мертон та Дельта-динамічного хеджування.

1 ВИДИ ХЕДЖУВАННЯ

Хеджування, як уже було сказано, це одна із стратегій ризик-менеджменту, яка полягає у інвестуванні в актив з протилежною кореляцією до основної інвестиції. Існує певний компроміс, баланс між ризиком і винагородою за інвестицією, виходячи з цього факту - зменшення ризику зазвичай також зменшує винагороду. В більшості випадків хеджування здійснюється шляхом додавання нових інструментів до інвестиційного портфеля, що несе додаткові витрати. Ці витрати сприймаються не більше як інвестицією, платою за зменшення небажаної кількості певного виду ризику, але при цьому із зменшення прибутковості.

1.1 Статичне та динамічне хеджування

Статичне хеджування - це хеджування, котре не вимагає постійних змін у займаних позиціях після його встановлення. Інакше кажучи, позицію не потрібно ребалансовувати або робити це дуже рідко в залежності від того чи ринок рухається вгору або вниз.

Очевидним прикладом статичного хеджування є покупка ф'ючерсного контракту з займаною позицією в іноземній валюті. Коли настає день експірації контракту, валютний ризик портфелю який складається з займаною позиції в валюті та ф'ючерса повністю усувається, тобто портфель стає повністю безризиковим. Статичний хедж не є довгостроковим. Більшість портфелів мають цінні папери із скінченим терміном експірації, тому час від часу треба проводити його ребалансування, але це робиться через порівняно довгі проміжки часу на відміну від динамічного хеджування.

На жаль, для більшості операцій з деривативами, через їх нестабільну ціну, такий вид хеджування не є виправданих і необхідно застосовувати стратегії динамічного хеджування заради зменшення певного виду ризику.

Динамічне хеджування на відміну від статичного є дуже чутливим до поведінки ринку. Частота з якою хеджер повинен робити балансування позиції залежить в першу чергу від волатильності данного ринку та рівня допустимих втрат (ціни хеджування).

Вважається, що в початковому хеджі є дві складові:

- Статична частина, яка не вимагає ребалансування
- Динамічна частина, яка вимагає ребалансування

1.2 Повне та часткове хеджування

Повне хеджування виключає можливість негативного результату, тобто відбувається хеджування повністю позиції займаної на початку. Цей вид хеджування використовується коли негативний результат саме для цього інвестора може бути вирішальним для існування бізнесу.

Відповідно часткове хеджування передбачає часткове перекриття початкової позиції. Використовується у випадках з маловірогідними негативними результатами. Коли настання небажаної події не призведе до катастрофічних наслідків.

1.3 Чисте та перехресне

Чисте або класичне хеджування передбачає хеджування похідним фінансовим інструментом в основі якого лежить той самий актив за яким ми робили інвестицію.

Перехресне відрізняється тим, що позиція по хеджуванню відкривається не по деривативу з тим самим базовим активом, а по активу з реплікатиною або протилежною кореляцією до даного активу, в залежності від наших цілей.

2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ РАНКІВ. БІРЖОВІ, НЕБІРЖОВІ ІНСТРУМЕНТИ

Перш ніж розглянути стратегії хеджування треба розібратися з основними поняттями теми біржових та небіржових інструментів. Як можна зрозуміти з назви, біржові інструменти - це такі фінансові інструменти, які можна купити або продати на біржі. Основними перевагами є доступність всім учасникам ринку, прозорість регулювання, що передбачає надійність, ліквідність. На той час до головних недоліків можна віднести строгу стандартизацію або сильну урегульованість з боку біржі. Основними біржовими інструментами є: ф'ючерси та опціони. Небіржові – це такі фінансові контракти які укладаються між двома сторонами напрямку, що є водночас як головним недоліком, так і перевагою, оскільки в цьому випадку відсутня чітка стандартизація, але проте ризик за виконання умов контракту лягає на учасників контракту.

2.1 Небіржові інструменти: Форвард, Своп

До основних небіржових контрактів можна віднести Форварди та Свопи.

Форвард – це контракт, що гарантує продаж або купівлю якогось конкретного активу у майбутньому по заздалегідь оговореній ціні. Як будь який інший позабіржовий товар, ці контракти несуть ще більший рівень ризику контрагента як для покупців, так і для продавців.

Класична ситуація хеджування, ситуація з якою історично виникло хеджування ще у 19 столітті, полягає в придбанні реального товару з одночасною купівлею форвардного контракту на цей товар. Таким чином ми знижуємо ризик втрат на падінні ціни на цей товар у день продажу (день експірації). Ця стратегія до речі притаманна не більше ніж 10% учасникам ринку.

Своп – це контракт який передбачає обмін між сторонами їх конкретних кеш-флоу з метою взаємної вигоди. Укладається напрямку між сторонами, що робить його небіржовим контрактом. Іноді компанії потрапляють у ситуацію, що

обмін відсотковими ставками у різних валютах може позитивно вплинути на ситуацію в кожній компанії зокрема. Це є лише одним з багатьох прикладів використання свопів. До найбільш популярних видів можна віднести відсоткові, валютні, товарні, кредитно-дефолтні свопи.

2.2 Біржові інструменти: Ф'ючерс, Опціон

До основних Біржових контрактів можна віднести Ф'ючерси та Опціони.

Ф'ючерс – це контракт який передбачає продаж певної кількості товару по заздалегідь оговореній ціні. Зазвичай, на відміну від Форвардного контракту, поставки товару немає, а в обов'язковому порядку відбувається лише перерахунок коштів в залежності від того наскільки ціна піднялася/опустилася відносно «Страйк ціни». Страйк ціна – це попередньо встановлена ціна на актив у майбутньому. Слід зауважити, що ф'ючерс не є цінним папером, це є не більше ніж надійним договором під контролем біржі між двома сторонами.

Опціон – це контракт який, на відміну від ф'ючерсного контракту, не зобов'язує, а надає право на купівлю або продаж певного активу у майбутньому по заздалегідь оговореній ціні. Укладання Форварду або Ф'ючерсу нічого не варто сторонам контракту, в той час за продаж одного опціону біржа отримує так звану премією (Premium). Опціони поділяються на Call та Put. Call – це можливість продати певний актив у майбутньому за попередньо встановлену ціну, яка називається “Strike price” або “Execution price”. Put – можливість продати певний актив у майбутньому за попередньо встановлену ціну.

В загальному випадку опціони бувають двох видів European option та American option. Різниця полягає в тому, що європейський опціон реалізувати тільки у попередньо визначену дату, яка називається “Expiration date” або “Maturity date”, в той час коли Американський опціон може бути реалізований в будь яку дату до його експірації.

В обох випадках продавці Call та Put опціонів зобов'язані виконати свою сторону контракту, а саме компенсувати підвищення або пониження ціни у

відповідних випадках, якщо покупець вирішить виконати контракт. Якщо ціна в момент завершення контракту буде вищою за страйк ціну - пут контракт немає цінності та той хто випустив опціон залишає собі премію за його продаж. У випадку коли ціна активу нижча за страйк прайс, за вимоги того, хто купив опціон, він буде виконаний. Продавши актив за спот ціною, продавець ще отримає різницю в ціні від андерайтера. З колл-опціоном аналогічна ситуація з різницею в тому, що він може бути виконаним за вимогу покупця лише тоді, коли страйк ціна вище за спот ціну у день експірації контракту.

За ціною базового активу опціони поділяються на:

«В грошах» (In the money) – опціон колл(пут), страйк якого нижче(вище) актуальної ціни базового активу. Це така ситуація коли ціна актива на такому рівні, що покупець може реалізувати опціон.

«Біля грошей» (At the money) – опціон в якого ціна в даний момент часу приблизно дорівнює страйк ціні.

«Поза грошима» (Out of the money) – опціон колл(пут), страйк якого вище(нижче) за ціну в даний момент базового активу. Покупець втрачає можливість реалізувати опціон, а у випадку експірації опціону у такій позиції, він втрачає гроші витрачені на купівлю контрактів.

2.3 Математичне моделювання фінансових ринків. Ціноутворення опціону, модель Блека-Шоулза

Математичне моделювання фінансових ринків складається з моделей неризикових активів, руху ризикових активів та визначення справедливої ціни деривативів.

Модель Блека-Шоулза-Мертон є однією з базових моделей фінансових ринків. В основі цієї математичної моделі лежить теорія про те, що рух ціни будь яких активів відповідає Броунівському руху, тобто на нього діє незліченна кількість невидимих подій і тому він є виключно стохастичним. Головними припущеннями цієї моделі є те що протягом життя опціону компанія не виплачує

дивіденди по базовій акції, ринки ефективні, покупець опціону не сплачує комісія при купівлі опціону, безризикова ставка та волатильність є константами.

Ціна європейського опціону формується із двох складових: дійна вартість та часова вартість. Для покупця колл опціону дійна вартість обраховується за формулою: $\max(S-K, 0)$ де S - ціна у день експірації, K - страйк ціна. Для покупця пут опціону дійна вартість обраховується за формулою: $\max(K-S, 0)$ де S - ціна у день експірації, K - страйк ціна.

В свою чергу «часова вартість» базується на очікуваній волатильності і проміжку часу який залишився до експірації. Не важко здогадатися, що чим менше залишилося часу до експірації – тим менше вірогідність, що актив досягне якоїсь пікової точки і спричинить великі втрати, з точки зору математики він стає більш прогнозованим і відповідна ціна самого контракту починає зростати. Всього існує п'ять факторів які впливають на ціну європейського опціону, а саме:

- 1) Ціна зараз або спот ціна – S
- 2) Ціна експірації або страйк ціна – K
- 3) Час до експірації – T
- 4) Волотильність - σ
- 5) Безризикова ставка – r

Формула Блека-Шоулза є однією з головних формул фінансової математики, яка використовується для визначення справедливої ціни європейського колл або пут опціону.

Ціна європейського опціону колл:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.1)$$

Ціна європейського опціону пут:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(d_1) \quad (2.2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.4)$$

$N(x)$ – це кумулятивна функція стандартного нормального розподілу (мат очікування = 0, дисперсія = 1), визначає ймовірність деякої випадкової величини прийняти значення $\leq x$.

2.4 «Чутливість» математичної моделі Блека-Шоулза: Greek coefficients

Греки є вихідними формулами із моделі Блека-Шоулза, які отримали свою назву через їх позначення літерами грецького алфавіту. Кожен коефіцієнт є дуже важливою інформативною частиною, яка описує те як зміниться ціна опціону при зміні відповідного вхідного параметра моделі Блека-Шоулза.

Дельта – оцінює чутливість, є похідною або швидкістю зміни вартості опціону при зміні ціни базового активу на 1 одиницю. Часто цей коефіцієнт називають хеджевим коефіцієнтом або «hedge ratio». Для call опціону приймає значення у проміжку від 0 до 1, для put опціону у проміжку від 0 до – 1. Чим більше опціон call(put) в грошах тим більше його дельта віддаляється від 0.

Дельта колл-опціона:

$$\Delta_{call} = \frac{dC}{dS} = e^{-qT} N(d_1) \quad (2.5)$$

Доведення[1]:

$$\begin{aligned} \Delta_{call} &= \frac{dC}{dS} = \frac{d(e^{-qT} S N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2))}{dS} = \\ &= e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} = \\ &= e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} \frac{\partial d_2}{\partial S} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} = \\ &= e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} \frac{\partial d_2}{\partial S} N'(d_2) = \\ &= e^{-qT} N(d_1) + \frac{S e^{-qT} N'(d_1)}{S \sigma \sqrt{T}} - \frac{X e^{-rT} N'(d_2)}{S \sigma \sqrt{T}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Виходячи з формули (2.3):

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T &= d_1\sigma\sqrt{T} = \ln(S) - \ln(X) + (r - q)T = d_1\sigma\sqrt{T} - \\
 \frac{\sigma^2}{2}T &= \frac{1}{2}\left(d_1^2 - (d_1 - \sigma\sqrt{T})^2\right) = \ln(S) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{d_1^2}{2} = \\
 &= \ln(X) - (r - q)T + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{d_2^2}{2} = S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_1^2}{2}} = X e^{-(r-q)T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_2^2}{2}} = \\
 &= SN'(d_1) = X e^{-(r-q)T} N'(d_2) = S e^{-qT} N'(d_1) = X e^{-rT} N'(d_2) \text{ з цього} \\
 \text{випливає, що } &\frac{S e^{-qT} N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} - \frac{X e^{-rT} N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T}} = 0
 \end{aligned}$$

Повертаючись до рівності (2.6):

$$\Delta_{call} = e^{-qT} N(d_1) + \frac{S e^{-qT} N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} - \frac{X e^{-rT} N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T}} = e^{-qT} N(d_1) \quad \blacksquare$$

Дельта пут-опціону:

$$\Delta_{put} = \frac{dP}{dS} = N(d_1) - 1 \quad (2.7)$$

Доведення:

З формул 2.1 та 2.2 маємо таку рівність:

$$\begin{aligned}
 p + S e^{-qT} &= c + X e^{-rT} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dp}{dS} &= \frac{dc}{dS} - e^{-qT} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta_{put} &= N(d_1) - 1 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Гамма – якщо дельта це швидкість, то цей коефіцієнт є прискоренням оскільки він оцінює наскільки зміниться дельта при зміні ціни базового активу на 1 одиницю. Функція залежності ціни опціону від ціни базового активу є нелінійною. Гама дозволяє врахувати опуклість цієї функції. Найбільшого значення досягає коли спот ціна знаходиться в околі страйк ціни. Таким чином опціони що є глибоко в грошах або поза грошима мають гамму близьку до 0.

$$\text{Put Gamma} = \text{Call gamma} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} \quad (2.8)$$

Тета – вимірює чутливість опціону до наближення до дати експірації опціону. Кожен день опціон стає менш привабливим оскільки його результат стає більш прогнозованим. Чим ближче день експірації тим більше в абсолютному значенні коефіцієнт тета. Слід зазначити, що в цілому ціна опціону може зростати через зміну в базовому активі, але тета буде все рівно зростати із прискорення наближаючись до дати експірації.

$$\text{Call Theta} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{Put Theta} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Вега – оцінює ефект зміни очікуваної волатильності на 1% на загальну ціну опціону. Цей коефіцієнт є завжди додатним для лонг позицій і має однакову формулу як для колл так і для пут опціонів, оскільки збільшення волатильності передбачає більшу дохідність, але й і більший ризик

$$\text{Call Vega} = \text{Put Vega} = S\sqrt{(T-t)}N'(d_1)e^{-q(T-t)}$$

Ро – коефіцієнт який оцінює зміну вартості опціону до зміни безризикової ставки на 1%. В більшості випадків це не є найвпливовішим показником, за виключенням ситуації опціону що є глибоко в грошах або опціону з довгим терміном до експірації(Варрант).

$$\text{Call Rho} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{Put Rho} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

3 СТРАТЕГІЇ ХЕДЖУВАННЯ

Кожна фінансова організація, що випускає опціон на той чи інший актив стикається з проблемою управління ризиком. У випадку коли на біржі котується протилежний опціон до того, що вона продала, фінансова організація може просто купити його і таким чином нейтралізувати небажаний ризик, але якщо такої можливості немає, проблема суттєво ускладнюється. Рішенням даної проблеми можуть бути застосування стратегій хеджування. Учасники ринку, що закладають такі угоди називаються «хеджерами», а компанії які заробляють на укладанні таких угод Хедж-фондами.

Розглянемо таку ситуацію:

Фінансова організація продає колл-опціон на 100 000 бездивідентних акцій з датою експірації через 20 тижнів. Нехай історична волатильність – 20% в рік, спот прайс - \$49, страйк ціна - \$50, безризикова ставка – 5%.

(Умова прикладу взята з «Опціони, ф'ючерси та інші похідні інструменти» Дж. Халл)

За формулою Блека-Шоулза маємо справедливую ціну опціону яка складає 240 000. Отже фінансова організація продає за завищеною ціною в 60 000. Також можна інтерпретувати це так, що організація закладає у формулу Блека-Шоулза більше значення волатильності (Implied volatility). Це робиться для обмеження ризику. Якщо подивитися на графіки реальної волатильності та волатильності закладеної у формулу БШ при випуску опціону, можна побачити, що за 10 років навімання обраної акції буде не більше декількох разів, коли historical перевищує implied.

Розглянемо основні стратегії хеджування такого опціона.

3.1 Непокрита позиція

Першою і найбільш очевидною є стратегія бездії. Фінансова організація може не вживати ніяких дій. Тому якщо ціна акції впаде до відмітки в 40, покупець не зможе реалізувати опціон і фінансова організація буде мати прибуток в 300 000. Але у випадку закриття опціону виграшем для покупця, зі страйк ціною в 60, продавець понесе величезні збитки, що дорівнюють $10 \cdot 100\,000 = 1\,000\,000$.

3.2 Покрита позиція

Є протилежною до непокритої позиції, оскільки одразу після продажу ми викупуємо акції компанії на які був проданий опціон і тим самим хеджуємо свою позицію у випадку суттєвого зростання ціни. Якщо ціна зросте до 60, прибуток буде становити $(60-49) \cdot 100\,000 + 300\,000$ (за продаж опціонних контрактів) $- 10 \cdot 100\,000 = 400\,000$. У випадку якщо ціна активу впаде до 40, то наш збиток буде дорівнювати $(49-40) \cdot 100\,000 + 300\,000$ (за продаж опціонних контрактів) $= 600\,000$.

3.3 Stop-loss strategy

Розглядаючи наш випадок із продажем колл-опціона, ця стратегія передбачає купівлю(продаж) акцій коли ціна базового активу стає більшою(меншою) за страйк прайс. Сенс полягає в тому, щоб займати непокриту позицію поки ціна акції не перевищить Страйк і займати покриту позицію поки ціна базового активу не впаде нижче за страйк-прайс.

Головною проблемою цієї стратегії є те, що неможливо купити актив рівно за ціною K , оскільки ринок є ефективним. Купівля буде здійснюватися за ціною $K + \varepsilon$ та $K - \varepsilon$, і це ще не враховуючи брокерські комісії. Для зменшення втрат ε --

> 0 , але в такому випадку кількість транзакцій буде прямувати до нескінченності, що знову таки не буде прибутковим через брокерські комісії.

3.4 Динамічне дельта-хеджування

Коефіцієнт дельта тісно пов'язаний з методом Блека-Шоулза-Мертонна. Разом з висуванням формули теоретичної ціни, вони довели існування безризикового портфеля який складається з опціонів та акцій по базовому активу на який були випущені ці опціони. Через коефіцієнт дельта портфеля Блека-Шоулза-Мертонна можна представити в такому вигляді:

-1: опціон

+ Δ : кількість акцій

Підсумовуючи, ця модель каже про оцінку опціонів, досягаючи дельта-нейтральної позиції, враховуючи той факт, що доходність по цій позиції рівна безризиковій ставці.

Дельта-динамічне хеджування – це процес встановлення дельта-нейтрального стану (дельта близька до нуля) по базовому активу відносно проданого опціону шляхом купівлі або продажу кількості одиниць базового активу за формулою: $\Delta \cdot N = Q$ (де N – кількість базового активу по яким було продано опціони, Q – кількість акцій які треба купити або продати в залежності від попереднього значення дельта.)

Суть стратегії полягає в тому щоб не закуповувати весь об'єм акцій одразу на які ми продали опціон як у випадку покритої стратегії, а робити це поступово враховуючи всі параметри які впливають на його ціну, основними є звісно волатильність та час до експірації. Оскільки чим більш волатильний ринок, тим більший ризик тим відповідно більша ціна опціону. Тим менший час до експірації, тим менша вірогідність суттєвої зміни ціни базового активу і відповідно менша ціна опціону. Це є одні з найголовніших залежностей закладених у ціну опціона.

4 ДИНАМІЧНЕ ДЕЛЬТА ХЕДЖУВАННЯ НА РЕАЛЬНИХ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ

4.1 Опис складових програми

Проект складається з класів `European_call`, `European_put`, `Hedging_company` та файлу `Main`.

- а) Класи `European_call` та `European_put` відповідають за створення європейських опціонів колл та пут. Кожен клас має методи які обраховують Greek коефіцієнти: Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho, які оцінюють чутливість опціону до різних факторів та теоритичну ціну опціону.
- б) `Hedging_company` містить методи, що відповідають безпосередньо за хеджування.
 - 1) `hedging_w_borrowed_call(df, option: EuropeanCall, num_of_weeks, loan_interest, number_of_contracts)` - хеджування проданого колл опціону за займані гроші
 - 2) `hedging_w_borrowed_put(df, option: EuropeanPut, num_of_weeks, loan_interest, number_of_contracts)`: - хеджування проданого пут опціону за займані гроші
 - 3) `hedging_w_own_call(df, option: EuropeanCall, num_of_weeks, discount_rate, number_of_contracts)` - хеджування проданого колл опціону за свої гроші,
 - 4) `hedging_w_own_put(df, option: EuropeanPut, num_of_weeks, discount_rate, number_of_contracts)` - хеджування проданого пут опціону за свої гроші
 - 5) `avarage_volatility(df)` - метод що обраховує річну волатильність
 - 6) `evaluate_outcomes(award, hedg_table, own_or_loan)` - метод що обраховує прибуток по закриттю опціона.
 - 7) `get_tables(type_of_option, spot, strike, timeToMaturity, risk_free_rate, num_of_weeks, number_of_contracts, volatility, own_or_loan, df)` - повертає об'єкт який містить таблицю хеджування, таблицю Greek коефіцієнтів та NPV у випадку використання власного капіталу при хеджуванні.
- с) `Main` - завантаження цін акцій, надання ключових параметрів для хеджування проданих опціонів.

Після запуску програми користувач обирає тип проданих опціонів, їх кількість, страйк ціну, дата початку хеджування, відсоток по безризиковим інвестиціям, ціну одного контракту, обирає чи він буде використовувати

залучений капітал для хеджування чи ні. У випадку використання займаного капіталу, програма запитує відсоток за його використання.

На вихід користувач отримує значення загального прибутку, NPV за проектом та 2 таблиці:

- таблиця хеджування, в якій наявні такі значення як: номер тижня хеджування, коефіцієнт дельта, кількість проданих акцій, ціна проданих акцій, у випадку займаного капіталу та у випадку використання власного капіталу значення грошового потоку і дисконтованого грошового потоку за кожен тиждень
- таблиця "Greek" коефіцієнтів за кожен тиждень

4.2 Приклади застосування

Для демонстрації використання алгоритму динамічного дельта-хеджування були взяті ціни акцій Facebook Inc. Class A Common Stock (FB) за період 19.03.2020 – 19.03.2021.

Дата експірації опціону: 19 березня.

Умови опціону були взяті з біржі Nasdaq:

FB Option \$265.00 Mar 19, 2021

Call
FB 210319C00265000

Put
FB 210319P00265000



Last Sale	25	Last Sale	0.01
Net	10.85	Net	-0.33
Day High	27.65	Day High	0.17
Day Low	16.7	Day Low	0.01
Volume	913	Volume	1652
Prev Close	14.15	Prev Close	0.34
Open	16.7	Open	0.17
Open Interest	0	Open Interest	10240
Tick	-1	Tick	-
Bid	N/A	Bid	N/A
Ask	N/A	Ask	N/A
Bid Size	0	Bid Size	0
Ask Size	0	Ask Size	0
Contract High	60.9300003	Contract High	44.2999992
Contract Low	3.29999995	Contract Low	0.14
Market	OPRAC	Market	OPRAC

Приклад №1 : фінансовою організацією було продано 10000 опціонів колл за 20 тижнів до настання дати експірації і проведене дельта-динамічне хеджування з використанням займаного капіталу, з відсотковою ставкою 5% річних.

Введено у консоль:

```

Оберіть тип опціону який ви збираєтеся продати: *call* або *put*:
call
Чому дорівнює Strike price?
265
Чому дорівнює Risk-free rate?
1
За скільки тижнів до Maturity ви би хотіли змодельовати хеджування?
20
Скільки контрактів продано?
10000
Чому дорівнює ціна одного контракту?
31
Ви будете проводити хеджування використовуючи 1-власний капітал чи 2-залучений капітал?. Оберіть цифру 1 або 2.
2
Чому дорівнює відсоток по займам грошам?
5

```

Отримано на виході таблицю хеджування:

Week	Price of a share	Delta	Num of bought shares	Price of bought shares	Accumulated debt	Loan interest
0	278.802	0.641	6410	1787.12	1787.12	1.7
1	274.5	0.614	-270	-74.1	1714.72	1.6
2	293.95	0.733	1190	349.8	2066.12	2
3	277.72	0.637	-960	-266.6	1801.52	1.7
4	272.56	0.602	-350	-95.4	1707.82	1.6
5	276.03	0.628	260	71.8	1781.22	1.7
6	279.19	0.653	250	69.8	1852.72	1.8
7	273.372	0.61	-430	-117.5	1737.02	1.7
8	272.978	0.608	-20	-5.5	1733.22	1.7
9	276.95	0.643	350	96.9	1831.82	1.8
10	262	0.506	-1370	-358.9	1474.72	1.4
11	251.55	0.392	-1140	-286.8	1189.32	1.1
12	269.26	0.578	1860	500.8	1691.22	1.6
13	277.18	0.664	860	238.4	1931.22	1.9
14	267.01	0.553	-1110	-296.4	1636.72	1.6
15	271.89	0.618	650	176.7	1815.02	1.7
16	269.86	0.596	-220	-59.4	1757.32	1.7
17	256.47	0.367	-2290	-587.3	1171.72	1.1
18	260.67	0.421	540	140.8	1313.62	1.3
19	269.14	0.636	2150	578.7	1893.62	1.8
20	281.22	1	3640	1023.6	2919.02	2.8

Отримано на виході таблицю Greek коефіцієнтів:

Week	Option price	Delta	Gamma	Vega	Theta	Rho
0	31.5973	0.640642	0.00617901	0.646459	-0.30882	0.565419
1	28.2961	0.613916	0.00658807	0.634793	-0.318009	0.512378
2	40.828	0.73345	0.00542744	0.568185	-0.304657	0.605053
3	29.0554	0.637091	0.006751	0.595688	-0.333644	0.483412
4	25.2054	0.601725	0.0072934	0.583449	-0.345672	0.42709
5	26.6658	0.627894	0.00729026	0.560818	-0.354813	0.42309
6	27.9961	0.6528	0.00728504	0.534968	-0.363157	0.415266
7	23.6046	0.610082	0.00802043	0.524405	-0.381361	0.357937
8	22.6184	0.60804	0.00837174	0.503881	-0.396353	0.330882
9	24.3263	0.643439	0.00836525	0.474912	-0.408298	0.325444
10	14.8862	0.506014	0.00992085	0.458302	-0.428795	0.226317
11	9.3651	0.392407	0.0104936	0.402247	-0.415553	0.154656
12	17.0554	0.577705	0.01059	0.413253	-0.484015	0.213009
13	21.0252	0.664464	0.0102434	0.370708	-0.498238	0.219601
14	13.793	0.552788	0.0124576	0.358687	-0.557258	0.154413
15	15.5331	0.617761	0.0129246	0.321661	-0.600322	0.146638
16	13.0741	0.596273	0.0147873	0.289811	-0.674229	0.113686
17	5.18111	0.366811	0.0174629	0.231946	-0.712288	0.0512924
18	5.27998	0.420749	0.0218466	0.200008	-0.919469	0.0401927
19	7.52919	0.636036	0.0287727	0.140042	-1.29265	0.0314215
20	16.22	1	0	0	-0.0265	0

Висновок: після першого тижня ціна падає до 274,5. Коефіцієнт дельта зменшується до 0.614. Різниця дельт 0-го тижня і 1-го тижня: $0.614 - 0.641 = -0.027$. Тому для підтримки дельта-нейтрального стану треба продати 270 акцій. Накопичений борг в кінці другого тижня = Початкова закупка(1 787 120) + Відсоток за користування грошима(1700) - Продаж акцій(74 100) = 1 714 720. У день експірації опціону коефіцієнт дельта дорівнює 1, він буде виконуватися і ми будемо займати покриту позицію. Це означає, що ми будемо володіти 10000 акцій на які ми продали опціон.

Опціони, що буде закрито з виграшем для покупця, тому ми матимемо виплатити йому: $(\$281.22 - \$265) * 10\,000 = \$162\,200$.

Ми маємо премію за продаж опціонів $31 * 10,000 = \$310,000$.

З продажу 10000 акцій ми отримаємо $\$281.22 * 10\,000 = \$2\,812\,200$.

По завершенню опціону накопичений борг становить $\$2\,919\,020$.

Отже, сумарний прибуток дорівнює: $-\$2\,919\,020 - \$162\,200 + \$2\,812\,200 + \$310,000 = \$40\,980$. Використовуючи ставку безризикових інвестицій - 1%, як ставку дисконтування, NPV проекту дорівнює $\$41\,516$.

Обрахунок загального прибутку від продажу опціонів та їх подальшого хеджування у Python:

```

> 0.0s
1 award = premium * number_of_contracts
2 Hedging_Company.evaluate_outcomes(award, hedg_table1, own_or_loan1)

Income = $40979.18
NPV = $41516.66

```

Приклад №2: фінансовою організацією було продано 10000 опціонів пут за 20 тижнів до настання дати експірації і проведене дельта-динамічне хеджування з використанням власного капіталу.

Введено в консоль:

```

Оберіть тип опціону який ви збираєтеся продати: *call* або *put*:
put
Чому дорівнює Strike price?
265
Чому дорівнює Risk-free rate?
1
За скільки тижнів до Maturity ви би хотіли змодельовати хеджування?
20
Скільки контрактів продано?
10000
Чому дорівнює ціна одного контракту?
17
Ви будете проводити хеджування використовуючи 1-власний капітал чи 2-залучений капітал?. Оберіть цифру 1 або 2.
1

```

Вивід таблиці хеджування:

Week	Price of a share	Delta	Num of bought shares	Price of bought shares	Discounted Cash Flow	Cash Flow
0	278.802	-0.359	3590	1000.9	-1000.9	-1000.9
1	274.5	-0.386	270	74.1	-74.0715	-74.1
2	293.95	-0.267	-1190	-349.8	349.598	349.8
3	277.72	-0.363	960	266.6	-266.395	-266.6
4	272.56	-0.398	350	95.4	-95.3083	-95.4
5	276.03	-0.372	-260	-71.8	71.7172	71.8
6	279.19	-0.347	-250	-69.8	69.7061	69.8
7	273.372	-0.39	430	117.5	-117.319	-117.5
8	272.978	-0.392	20	5.5	-5.49049	-5.5
9	276.95	-0.357	-350	-96.9	96.7139	96.9
10	262	-0.494	1370	358.9	-358.142	-358.9
11	251.55	-0.608	1140	286.8	-286.139	-286.8
12	269.26	-0.422	-1860	-500.8	499.55	500.8
13	277.18	-0.336	-860	-238.4	237.759	238.4
14	267.01	-0.447	1110	296.4	-295.546	-296.4
15	271.89	-0.382	-650	-176.7	176.157	176.7
16	269.86	-0.404	220	59.4	-59.2061	-59.4
17	256.47	-0.633	2290	587.3	-585.271	-587.3
18	260.67	-0.579	-540	-140.8	140.287	140.8
19	269.14	-0.364	-2150	-578.7	576.479	578.7
20	281.22	0	-3640	-1023.6	1019.47	1023.6

Вивід таблиці Greek коефіцієнтів:

Week	Option price	Delta	Gamma	Vega	Theta	Rho
0	16.7781	-0.359358	0.00617901	0.682749	-0.267862	-0.449859
1	17.8296	-0.386084	0.00658807	0.659957	-0.281085	-0.4524
2	10.9622	-0.26655	0.00542744	0.632442	-0.249965	-0.309207
3	15.4706	-0.362909	0.006751	0.626325	-0.292626	-0.380046
4	16.8312	-0.398275	0.0072934	0.601943	-0.310051	-0.38581
5	14.8724	-0.372106	0.00729026	0.585849	-0.314797	-0.339233
6	13.0936	-0.3472	0.00728504	0.565133	-0.319055	-0.296196
7	14.571	-0.389918	0.00802043	0.542326	-0.343686	-0.302909
8	14.0294	-0.39196	0.00837174	0.52025	-0.35875	-0.279328
9	11.8164	-0.356561	0.00836525	0.497379	-0.3649	-0.233847
10	17.3771	-0.493986	0.00992085	0.453986	-0.407121	-0.282299
11	22.3568	-0.607593	0.0104936	0.382493	-0.41084	-0.303266
12	12.3881	-0.422295	0.01059	0.420542	-0.450117	-0.193934
13	8.48872	-0.335536	0.0102434	0.388269	-0.450597	-0.136609
14	11.4773	-0.447212	0.0124576	0.361825	-0.526695	-0.151044
15	8.38825	-0.382239	0.0129246	0.330342	-0.559021	-0.108047
16	8.01035	-0.403727	0.0147873	0.295353	-0.635873	-0.0899423
17	13.5582	-0.633189	0.0174629	0.224609	-0.709198	-0.101524
18	9.50798	-0.579251	0.0218466	0.196816	-0.908079	-0.061793
19	3.33832	-0.363964	0.0287727	0.142257	-1.24653	-0.0194487
20	-6.45339e-07	0	0	0	0	0

Після першого тижня ціна падає до \$274,5. Коефіцієнт дельта зменшується з -0.359 до -0.386. Різниця дельт 0-го тижня і 1-го тижня: $-0.359 - (-0.386) = 0,027$. Тому для підтримки дельта-нейтрального стану треба купити 270 акцій. У день експірації опціону коефіцієнт дельта дорівнює 0, він не буде виконуватися і ми будемо займати непокриту позицію. Це означає, що ми не будемо володіти 10000 акцій на які ми продали опціон.

Опціони, буде закрито з програшем для покупця. Ми маємо премію за продаж опціонів $\$17 * 10,000 = \$170,000$. Кеш флоу по операціях з продажем та купівлею акцій є додатнім і дорівнює \$98500.82

Отже, сумарний прибуток дорівнює $\$170,000 + \$98500 = \$268\,500.82$. Використовуючи ставку безризикових інвестицій - 1%, як ставку дисконтування, NPV проекту дорівнює \$263 653.

Обрахунок загального прибутку від продажу опціонів та їх подальшого хеджування у Python:

```

▶ 0.0s
1 award = premium * number_of_contracts
2 evaluate_outcomes(award, hedg_table2, own_or_loan)

```

```

Cumulative Discounted cash flow = 93653.85
Cumulative Cash flow = 98500.82
Income = $268500.82
NPV = $263653.85

```

ВИСНОВКИ

В роботі були розглянуті найважливіші поняття фінансового ринку та ринку деривативів зокрема. Була досліджена одна з найважливіших моделей сучасної фінансової математики Блека-Шоулза-Мертонна з висунутими відповідними висновками щодо її чутливості до змін на ринку. Були обгрунтовані основні стратегії хеджування з відповідними рекомендаціями по їх застосуванню.

Стратегія дельта-динамічного хеджування має свої як переваги так і недоліки. До основних недоліків можна віднести те, що хеджер має постійно спостережувати за ринком та ребалансувати портфель згідно до змін коефіцієнта дельта. Проблема полягає в тому, що при збільшенні транзакцій ребалансування, зростає в цілому сума сплаченої комісії брокеру. Тому для високоволитильних ринків ця стратегія може не бути найкращим вибором, оскільки для досягнення дельта-нейтрального стану об'єми продажу та купівлі стануть більшими і відповідно сума комісій теж зросте. Іншими недоліками цієї моделі теоретичної ціни опціону є те, що головними припущеннями є значення волатильності та незмінна безризикова ставка, що на практиці не є можливим. Якщо у випадку волатильності, фінансовою організацією береться Implied volatility яка за прогнозом має бути більшою за фактичну, звідки і береться заробіток андеррайтера опціону. У випадку безризикової ставки, це є не більше ніж припущенням, оскільки вона завжди змінюється відповідно до політики центрального банку та інвестиційної привабливості в країні. Тому ми не можемо стверджувати про її незмінність, особливо що стосується варантів з довгими термінами експірації. При використанні дельта-динамічної стратегії, хеджер робить ставку в першу чергу на волатильність. Тому якщо в нього є добре розуміння ринку, це може бути навпаки головною перевагою використання цієї стратегії хеджування.

Потенціалом більш глибокого дослідження даної теми є вивчення інших моделей оцінки опціонів як Біноміальні дерева, Симуляція Монте-Карло,

порівняння їх між собою та насамперед ситуацій в яких вони можуть бути використані. На жаль об'єм даної роботи не дозволяє повною мірою дослідити всі стратегії, але результати отримані в процесі моєї роботи і створений програмний продукт можуть бути використані в подальшому як при дослідженні інших стратегій хеджування так і приватною фінансовою організацією при випуску опціонів.

Список використаних джерел

1. John C. Hull “Options, futures and other derivatives”
2. Sheldon Nateberg “Options Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques”
3. Nassim Telleb “Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options”
4. Eli M. Remolona “The recent growth of financial market”
5. Thorsten Rheinlander, Jenny Sexton “Hedging derivatives”
6. Alexander Ramstrom “Pricing of European and Asian options with Monte carlo simulations”

Додатки

Мій проект з хеджування на Datalore:

<https://datalore.jetbrains.com/view/notebook/blVze3kImN8z8RU7lACOTc>

Той же самий проект у окремому Python файлі прикріплений на дістеду.