Про один алгоритм мінімізації булевих функцій

Гломозда Дмитро Костянтинович

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Дана стаття описує дослідження та вдосконалення одного з алгоритмів для розв'язання задачі мінімізації булевих функцій. Описано та проаналізовано два підходи до підвищення коректності роботи алгоритму.

Задача мінімізації булевих функцій є однією з найважливіших для теорії цифрових автоматів. Загальну задачу мінімізації булевих функцій можна сформулювати таким чином: знайти аналітичне представлення заданої булевої функції в формі, яка містить найменшу можливу кількість букв. Важливість цієї задачі та недосконалість методів її розв'язку змушує дослідників постійно шукати нові алгоритми або вдосконалювати старі. Дану роботу присвячено аналізу та вдосконаленню одного з таких алгоритмів, запропонованого М.М. Глибовцем та С.А. Іващенком у роботі [1].

Запропонований в цій праці алгоритм має експоненційну часову складність. Власне алгоритм являє собою узагальнення алгоритму куба для знаходження МДНФ функції трьох змінних на будь-яку кількість змінних. Працює він так. На вхід алгоритму подається ДДНФ D булевої функції $f(x_1, x_2,x_3)$. Після цього:

<u>Крок 1</u>. ДДНФ D функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ переводиться в множину бінарних векторів V; кожній координаті α_{ij} вектора K_i (α_{i1}, α_{i2}, … α_{in}) буде відповідати знак (заперечення чи не заперечення) змінної x_j в i-й ЕК ДДНФ, якщо знак заперечення – відповідна координата дорівнює 0, якщо заперечення немає – 1.

<u>Крок 2.</u> Якщо елементарних кон'юнкцій в D виявилося 2^n - значить функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ є константою істини і ми переходимо на кінець алгоритму, інакше, якщо в D немає жодної ЕК, то функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ є константою хиби і ми теж переходимо на кінець, інакше – продовжуємо роботу.

<u>Крок 3.</u> Починаючи з фіксованої кількості змінних m = 1, перебираються всі можливі варіанти ЕК з кількістю змінних, рівною m $K_{el}(a_1, a_2,\ldots, a_m)$, і для кожного варіанту підраховуємо кількість v двійкових векторів K_i (α_{i1}, α_{i2}, … α_{in}) в множині V, для яких виконується наступна умова P: для кожної змінної a_k з утвореної ЕК, якщо координата α_{ij} вектора K_i (α_{i1}, α_{i2}, … α_{in}), що відповідає змінній a_k рівна 1, то і дана змінна a_k стоїть в $K_{el}(a_1, a_2,\ldots, a_m)$ без заперечення, і навпаки, якщо 0 – то змінна a_k стоїть в $K_{el}(a_1, a_2,\ldots, a_m)$ із запереченням. Якщо v дорівнює максимально можливій кількості векторів, що можуть відповідати умові P ($v_m = 2^{n-m}$), то всі вектори, що відповідають умові, переводимо з множини V в певну додаткову множину векторів S, а кон'юнкцію $K_{el}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ додаємо до результуючої множини елементарних кон'юнкцій R.

Крок 3а. Якщо в множині S є вже вектори, то повторюємо крок 3 при незмінному m вже для об'єднання множин V та S, проте відбір векторів K_i відбувається тільки тоді, коли умові P відповідає принаймні один вектор з множини V.

Крок 4. Повторюємо крок 3, збільшуючи щоразу фіксовану кількість змінних, поки вона не перевищить n або множина V не спорожніє.

Крок 5. Здійснюємо диз'юнкцію всіх ЕК з множини R.

Кінець роботи алгоритму.

Даний алгоритм має часову складність $O(n*6^n)$ і об'ємну складність $O(n*2^n)$. Він належить класу перебірних алгоритмів, проте перебір здійснюється в площині можливих ЕК.

Але коректність роботи цього алгоритму залежить від того, в якій послідовності проглядаються елементарні кон'юнкції. Вирішити цю проблему можна, модифікувавши умову на кроці 3а: якщо в множині S є вже вектори, то повторити крок 3 при незмінному m вже для об'єднання множин V та S. При цьому відбір векторів K_i відбувається лише тоді, коли умові P відповідає принаймні один вектор з множини V. Але при цьому перевага надається тим векторам, для яких якнайбільше векторів з їхніх v_m векторів належить множині V. Такий алгоритм матиме часову оцінку $O(n*6^n*3n)$ і об'ємну складність $O(2^{n+1}*n)$.

Проте результат роботи цього алгоритму також залежить (щоправда, вже не в такій мірі) від того, в якому порядку відбувається перебір можливих ЕК. Щоб зробити його надійнішим, додамо йому „інтелектуальності", замінивши простий перебір можливих ЕК на кроці 3 аналізом можливих *наборів* ЕК, які теоретично можуть складати МДНФ (тобто таких ЕК, для яких $v = v_m$). Для кожного конкретного значення m кожний такий набір складатиметься з $|V|/v_m$ елементарних кон'юнкцій (якщо |V| не кратне v_m, відбувається округлення в бік більшого цілого). Якщо такий набір повністю „накриває" множину V, він входить до МДНФ. Якщо такого набору немає, робота алгоритму продовжується за попередньою схемою. Щоправда, воно спричиняє зростання часової оцінки, яке залежатиме від способу аналізу можливих наборів ЕК. Якщо взяти на озброєння перебір, то в найгіршому випадку матимемо таку картину — загальна часова оцінка дорівнює $O\left(n^{2^n+1} \cdot 18^n\right)$; об'ємна складність — $O\left(n^{2^n}\right)$.

Таким чином, було проаналізовано алгоритм Глибовця-Іващенка та знайдено шляхи його вдосконалення. Звісно, часова та об'ємна оцінки при цьому погіршилися, зате значно зменшилася ймовірність помилки алгоритму через «не той» порядок розгляду елементарних кон'юнкцій. Часову оцінку останнього варіанту алгоритму можна покращити за рахунок використання для знаходження оптимального накриття не перебору, а більш досконалого методу оптимізації, адже це фактично оптимізаційна задача. Але в принципі вже першої модифікації алгоритму цілком достатньо для значного покращення його надійності та коректності. Що стосується другої модифікації алгоритму, доцільним видається застосування евристичного алгоритму для визначення існування на початку кожної ітерації головного циклу такого набору ЕК поточної арності, який би накривав множину V. В цьому разі його часова складність зменшилася б, проте за рахунок певних втрат у надійності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Глибовець М.М., Іващенко С.А.* Про один підхід до розв'язку задачі мінімізації булевих функцій // Наукові записки. Т. 18 : Комп'ютерні науки / Національний університет „Києво-Могилянська Академія". — К., 2000. — С. 29—33.
2. *Горбатов В.А.* Основы дискретной математики. — М.: Высш. шк, 1986. — 310 с.
3. *Самофалов К.Г., Романкевич А.М., Валуйский В.Н. и др.* Прикладная теория цифровых автоматов. — К.: Вища школа, 1987. — 374 с.