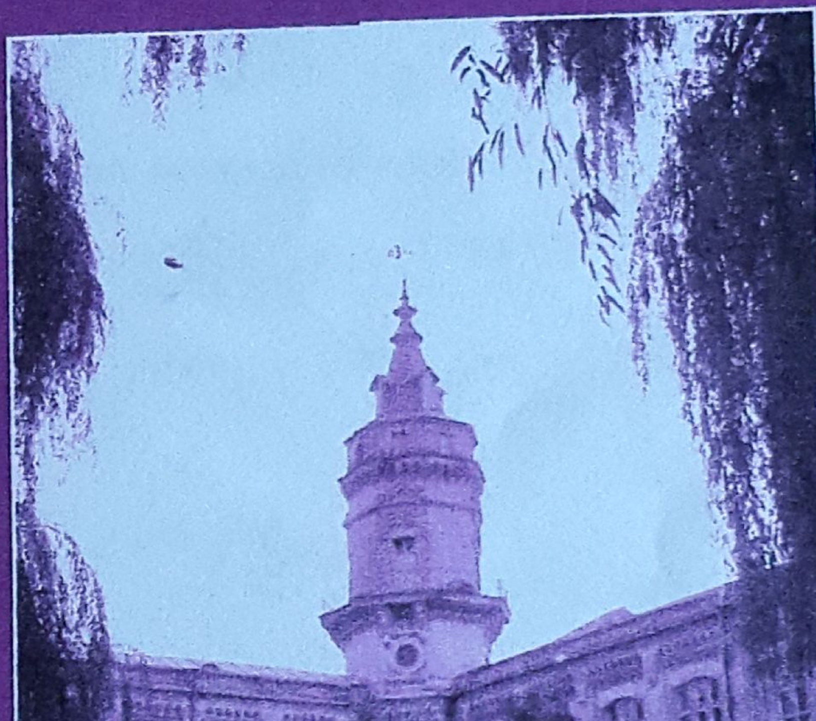
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ВИКЛАДАЧІВ І АСПІРАНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МЕНЕДЖМЕНТУ ТА МАРКЕТИНГУ



До 10-річчя факультету менеджменту та маркетингу

2002

В. В. Новицький, Є. В. Бридун

МЕТОД ОБЕРНЕННЯ МАТРИЦІ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

Багатопродуктова статична модель Леонтьєва у матричному вигляді записується так:

$$X = AX + C,$$

де X – n-вимірний вектор обсягів виробництва; A – матриця прямих витрат порядку n; C – n-вимірний вектор невиробничого споживання. Розв'язок цієї системи щодо вектора X має вигляд:

$$X = (I - A)^{-1} C.$$

Тут і далі I – одинична матриця порядку n; $(I - A)^{-1}$ – матриця повних витрат.

Визначивши матрицю прямих, а згодом і повних витрат, можна, зокрема, показати негативний вплив екологічних збитків на обсяги виробництва [1].

Розрахунок оберненої матриці $(I-A)^{-1}$ у випадку, коли A має менше за одиницю найбільше власне значення (тобто є продуктивною), можна провести, зокрема, ітеративним методом за допомогою такого нескінченного матричного ряду

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots \qquad (1)$$

або іншими відомими методами [2].

Знайдемо вираз для цієї ж матриці у випадку, коли відомі коефіцієнти мінімального багаточлена [2] для матриці A

$$m(\lambda I - A) = \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0, \; p \le n,$$

де p – степінь мінімального багаточлена; a_i – його коефіцієнти.

Поділимо цей багаточлен на двочлен $(1 - \lambda)$. Після відповідних перетворень матимемо

$$\frac{m(\lambda I - A)}{(1-\lambda)} = -\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}\lambda^{p-k} + (1-\lambda)^{-1}\sum_{l=0}^{p} a_{p-l}.$$

Оскільки матриця A задовольняє свій мінімальний багаточлен, то з останнього виразу випливає, що

$$(I - A)^{-1}\sum_{l=0}^{p} a_{p-l} = \sum_{k=1}^{p}\;\sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}A^{p-k}$$

або остаточно

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}\Big)A^{p-k} \;\Big/\; \sum_{l=0}^{p} a_{p-l}.$$

Легко показати, що сума у знаменнику правої частини перетворюється на нуль тоді та тільки тоді, коли матриця A має хоча б одне одиничне власне значення, тобто коли $I - A$ є особливою матрицею і початкова задача не має сенсу.

Позначимо

$$\alpha_{p-k} = \sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l} \;\Big/\; \sum_{l=0}^{p} a_{p-l}, \qquad (2)$$

тоді вираз для матриці повних витрат буде таким:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{p}\alpha_{p-k}A^{p-k} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{p-1}A^{p-1}. \qquad (3)$$

Для матриці $(sI - A)$, де s – деякий параметр, матимемо

$$(sI - A)^{-1} = s^{-1}(I - As^{-1})^{-1} = s^{-1}\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}s^{p-l}\Big)A^{p-k}s^{k-p} \times$$

$$\times \Big/ \sum_{i=0}^{p} a_{p-i}s^{p-i} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}s^{k-(l+1)}\Big)A^{p-k} \;\Big/\; \sum_{l=0}^{p} a_{p-l}s^{p-l}.$$

Позначимо

$$\alpha_{p-k}(s) = \sum_{l=0}^{k-1} a_{p-l}s^{k-(l-1)} \;\Big/\; \sum_{l=0}^{p} a_{p-l}s^{p-l},$$

тоді

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{p}\alpha_{p-k}(s)A^{p-k} = \alpha_0(s)I + \alpha_1(s)A + \ldots + \alpha_{p-1}(s)A^{p-1},$$

тобто маємо вираз для цієї оберненої матриці у вигляді розкладу за степенями матриці A.

Якщо у матриці A мінімальний багаточлен збігається з характеристичним багаточленом, тобто $p = n$ та $m(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)$, то у попередніх формулах слід замінити p на n.

Остання формула з точністю до позначень збігається з отриманою в [3] формулою такого вигляду:

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{p-1} s^j \sum_{i=1+j}^{p} a_i A^{i-j-1} \;\Big/\; \sum_{i=0}^{p} a_i s^i.$$

Вона, на відміну від попередньої, подає матрицю $(sI-A)^{-1}$ через розклад за степенями s

$$(sI-A)^{-1}=\frac{B_{p-1}s^{p-1}+\dots+B_1 s}{s^p+a_{p-1}s^{p-1}+\dots+a_1 s+a_0},$$

де матричні коефіцієнти B_j мають вигляд

$$B_j=\sum_{i=1+j}^{p} a_i A^{i-j-1}.$$

З рівнянь (2) та (3) випливає алгоритм розрахунку матриці повних витрат, який має вигляд

$$(I-A)^{-1}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\dots+\alpha_{p-1}A^{p-1}.$$

Тут $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}$ – назвемо мультиплікаторами прямих витрат, які визначаються через коефіцієнти мінімального багаточлена за допомогою таких рекурентних співвідношень

$$\alpha_{p-1}=1-\frac{a_{p-1}}{\Sigma a_{p-1}}-\dots-\frac{a_0}{\Sigma a_{p-1}}=\alpha_{p-2}-\frac{a_{p-1}}{\Sigma a_{p-1}}. \quad (4)$$

Отже, матриця повних витрат може бути розрахована через мультиплікатори та степені матриці прямих витрат ще таким чином:

$$(I-A)^{-1}=\left(1-\frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right)\times I+\left(1-\frac{a_1}{\sum a_{p-1}}-\frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right)\times A+$$
$$+\dots+\left(1-\frac{a_{p-1}}{\sum a_{p-1}}-\dots-\frac{a_0}{\sum a_{p-1}}\right)\times A^{p-1}=I+A+$$
$$+\dots+A^{p-1}-\frac{a_0}{\sum a_{p-1}}(I+A+\dots+A^{p-1})-$$
$$-\frac{a_1}{\sum a_{p-1}}(A+\dots+A^{p-1})-\dots-\frac{a_{p-1}}{\sum a_{p-1}}\left(A^{p-1}\right).$$

Перевага пропонованого методу обчислення матриці повних витрат порівняно з ітеративним методом (1), зокрема, полягає в обчисленні не більше ніж $p-1$ степенів матриці A та досягненні при цьому вищої точності.

Наведемо приклад обчислення матриці повних витрат через мультиплікатори та матрицю прямих витрат порядку 3 (трипродуктова економіка),

порівняння з ітеративним методом. Розрахунки проведено за допомогою пакета аналітичних обчислень *Maple 5.0*. Скористаємося наведеним у [4] виразом для матриці прямих витрат

$$A=\begin{bmatrix}0,3 & 0,09 & 0,08\\ 0,08 & 0,24 & 0\\ 0,07 & 0,06 & 0\end{bmatrix}.$$

Знаходимо коефіцієнти характеристичного багаточлена матриці A. Вони будуть такими: $a_0=0,00096$; $a_1=0,0592$; $a_2=-0,54$; $a_3=1$, а їх сума $a_0+a_1+a_2+a_3=0,52016$.

Підставляючи відповідні значення в (2), знаходимо коефіцієнти α:

$$\alpha_0=1-\frac{a_0}{\sum a}=1-\frac{0,00096}{0,52016}=0,99815;$$

$$\alpha_1=\alpha_0-\frac{a_1}{\sum a}=0,99815-\frac{0,0592}{0,52016}=0,88434;$$

$$\alpha_2=\alpha_1-\frac{a_2}{\sum a}=0,88434-\frac{-0,54}{0,52016}=1,92249.$$

Знаючи коефіцієнти α, можна визначити з (3) обернену матрицю

$$(I-A)^{-1}=0,99815\times\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+0,88434\times\begin{pmatrix}0,3 & 0,09 & 0,08\\ 0,08 & 0,24 & 0\\ 0,07 & 0,06 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+1,92249\times\begin{pmatrix}0,1028 & 0,0534 & 0,024\\ 0,0432 & 0,0648 & 0,0064\\ 0,0258 & 0,0207 & 0,0056\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,46109 & 0,18225 & 0,11689\\ 0,15380 & 1,33497 & 0,12304\\ 0,11150 & 0,09286 & 1,000892\end{pmatrix}.$$

Це значення оберненої матриці повністю збігається з точно обчисленим аналітично.

Розраховуючи значення елементів оберненої матриці ітеративним методом (1) піднесемо матрицю A, наприклад, до шостого степеня, тоді

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1,459967071 & 0,1814065332 & 0,1166476690\\ 0,1531406912 & 1,334467754 & 0,1216434074\\ 0,1111899659 & 0,09261758299 & 1,0008853429\end{pmatrix}$$

Значення елементів цієї матриці вказують на повільну збіжність ітеративного методу у нашому випадку.