

Державна податкова адміністрація України

Академія державної
податкової служби України

Київський національний
економічний Університет

Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці та бізнесі

Є. Бридун,
Академія державної
податкової служби України

Дослідження математичної моделі оптимального страхування основних та оборотних фондів за допомогою пакета Maple

Страхування – один із засобів, що пом'якшує негативні наслідки ризику, який може бути зумовлений різноманітними факторами. Тому важливо оцінювати витрати на страхування і його корисний ефект. Підприємство (суб'єкт господарювання) хоче застрахувати певну частку x свого активу S . Для цього сплачує деякий внесок px страховій компанії, а у випадку втрати активу отримує від неї винагороду qx . Якщо особа, що приймає рішення (ОПР), має інформацію про ймовірність недоторканості свого активу p , то модель визначення частки страхового активу x має вигляд¹:

$$F(x) = p U(S - rx) + (1 - p) U(qx) \rightarrow \max \quad (0 < x < S), \quad (1)$$

де $U(x)$ – функція корисності власника активу.

Реалізацію функції корисності пропонується розглянути за допомогою універсальної системи Maple, що забезпечує користувачу спрощення в математичних дослідженнях. Пакет Maple розроблений університетом Ватерлоо (штат Онтаріо, Канада) та Вищою технічною школою (Цюрих, Швейцарія), розповсюджений в університетах провідних наукових держав, дослідницьких центрах і компаніях.

Maple складається з ядра – процедур, що написані на мові C і оптимізовані, бібліотеки, що написана на Maple-мові, та інтерфейсу. Ядро виконує більшість базисних операцій. Бібліотека містить велику кількість команд – процедур, що виконуються в режимі інтерпретації. Користувач, який складає програму для власних процедур, може поповнювати ними стандартний набір і таким чином розширювати можливості Maple.

Розглянемо реалізацію моделі для функції корисності $U(x)$ за допомогою Maple.

$$U(x) = 1 - \frac{(x - S)^2}{S^2} \quad (\text{Статистична модель з нелінійним загальним критерієм}$$

очікуваної корисності). Для цієї функції корисності:

$$U'(x) = -\frac{2(x - S)}{S^2}; \quad U''(x) = -\frac{2}{S^2};$$

$$r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{2/S^2}{-2(x - S)/S^2} = \frac{1}{x - S} > 0,$$

тобто особа, що приймає рішення, в цьому випадку не схильна до ризику.

Функція, для якої треба відшукати найбільше значення, набуває вигляду:

$$F(x) = p \left(1 - \frac{r^2 x^2}{S^2} \right) + (1 - p) \left(1 - \frac{(qx - S)^2}{S^2} \right).$$

Обчислюємо $F(0) = p - pr^2 - q^2 + 2q + pq^2 - 2pq$;

$F(S) > F(0)$, якщо $p > 0$;

$$2q + pq^2 - 2pq - pr^2 - q^2 > 0, \text{ тобто, якщо } p > \frac{q^2 - 2q}{q^2 - 2q - r^2} > 1.$$

Оскільки $F(S) < F(0)$, то страхування всього активу S для ОПР з функцією вигідності, яка розглядається, є недоцільним.

Дослідимо тепер функцією $F(S)$ всередині інтервалу $(0; S)$. Для цього обчислимо похідну $F'(x) = -\frac{2}{S}(pr^2x + (1-p)(qx - S)q)$. Прирівнявши її до нуля і розв'язавши відповідне рівняння, отримуємо, що:

$$x = \frac{(1-p)qS}{pr^2 + (1-p)q^2}. \quad (2)$$

Одержане значення є шуканою точкою максимуму функції $F(x)$ при умові, що виконано:

$$1 \geq \frac{(1-p)q}{pr^2 + (1-p)q^2}.$$

Тобто, якщо ми попадаємо в область визначення функції $F(x)$: $0 < x/S < 1$, $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$. У графічному вигляді це показано на рис. 1. Графік побудовано після проведення перетворень:

$$\frac{x}{S} = \frac{(1-p)q}{pr^2 + (1-p)q^2}.$$

Поклавши $x/S=1$ і побудувавши графік за параметрами p , q , r (рис. 1), значення, які не визначено, знаходяться під "сіткою" воріт (під значенням функції $x/S=1$). У результаті було виявлено, що дана модель для розглянутої функції корисності не працює, якщо ймовірність недоторканості активу $p < 0,993$, отже, модель розглядається для тих випадків, коли $0,993 < p \leq 1$.

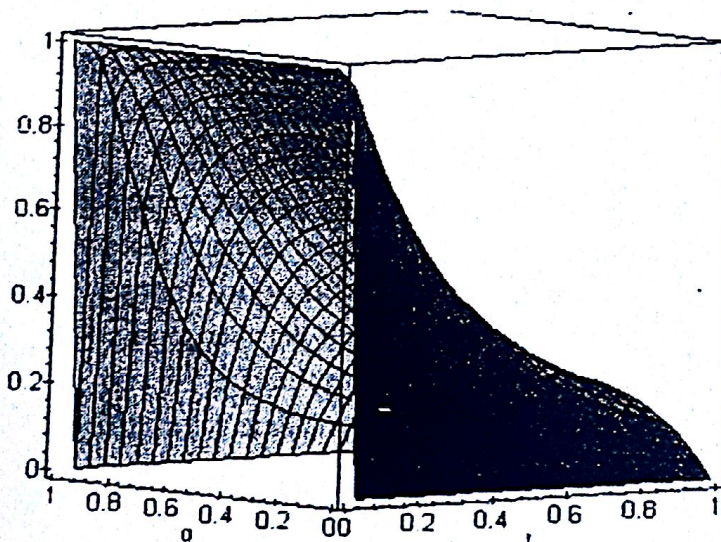


Рис. 1. Графік залежності ймовірності недоторканості активу від страхового внеску і страхового відшкодування

Робота з пакетом Maple спрощує аналітичні дослідження функції корисності для моделі 1 (знаходження першої та другої похідної), дозволяє знайти значення, які не визначені на графіку, використовуючи тільки документ, що редагується.