

УДК 517.9:532.5

Булавацький В. М., Лаврик В. І.

НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ФІЛЬТРАЦІЙНО-КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Розглядається мішана крайова задача для системи рівнянь фільтраційно-конвективної дифузії та масообміну за умов біпараболічної фільтраційної моделі.

Розглянемо мішану крайову задачу для системи рівнянь фільтраційно-конвективної дифузії та масообміну вигляду

$$\frac{\partial(m c_1)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c_1}{\partial x} - v c_1 \right) - \frac{\partial a}{\partial t} + k_1 c_2^n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(m c_2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c_2}{\partial x} - v c_2 \right) - k_2 c_2^n, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(m c_1 - \alpha a), \quad (0 < x < l, 0 < t < T), \quad (3)$$

де $c_1(x, t), c_2(x, t), a(x, t)$ — шукані функції, $k_1, k_2, D, m, n, \alpha, \beta$ — відомі параметри [1], [2]. Від-

повідні крайові умови запишемо у вигляді

$$c_1(0, t) = c_e, \quad c_2(0, t) = c_2^*, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$c_1(x, 0) = c_e, \quad c_2(x, 0) = 0, \quad a(x, 0) = a_0, \quad (6)$$

де $a_0, c_e, c_2^* = \text{const}$.

Зауважимо, що крайова задача (1)–(6) є математичною моделлю одного з найперспективніших з екологічної точки зору геотехнологічних методів розробки корисних копалин, який має назву методу підземного видужування (ПВ) [3]– [6]. Як відомо, цей метод полягає в тому, що внаслідок закачування в пласт хімічно активної речовини (реагенту), в результаті масообмінних та хімічних процесів, вилужуваний компонент переводиться в рухливий стан, а далі відбувається його видобуток за допомогою свердловин [7]. За таких умов величини, що входять до (1)–(3), мають інтерпретацію: $a(x, t), c_2(x, t), c_1(x, t)$ — концентрації відповідно адсорбованої речовини, реагенту та вилужуваного компонента в рідкій фазі; v — швидкість фільтраційного потоку; m — пористість; D — коефіцієнт дифузії; α — коефіцієнт рівноважного адсорбційного розподілу; k_1, k_2, β — константи швидкості хімічної реакції та адсорбції; n — порядок реакції; l — довжина фільтраційного шляху.

Слід відзначити, що математичному моделюванню процесу ПВ присвячено велику кількість робіт, зокрема [1], [2], [6]. У цих та багатьох інших роботах поле швидкостей фільтраційного потоку визначалось на основі класичної фільтраційної моделі (рівняння Фур'є), для якої, як відомо, мають місце досить жорсткі обмеження [8]. При цьому основним законом нестационарної фільтрації в пористому середовищі є класичний закон Дарсі, згідно з яким припускається, що рівноважний стан між градієнтом тиску та швидкістю досягається миттєво. Насправді ж "рівноважність" досягається з деяким запізненням і, щоб врахувати це явище в реологічних рівняннях, швидкість v і тиск p замінюють на $v + \tau_v \frac{dv}{dt}$, $p + \tau_p \frac{dp}{dt}$, де $\tau_v > 0$ — час запізнення швидкості, $\tau_p > 0$ — час релаксації тиску. З урахуванням явищ запізнення, в лінійному наближенні, замість класичного закону Дарсі маємо [9]

$$v + \tau_v \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \tau_p \frac{dp}{dt}), \quad (7)$$

де τ_v, τ_p — параметри, визначені вище, $k > 0$ — коефіцієнт проникності пористого середовища, $\mu > 0$ — в'язкість рідини, що фільтрується. За умов

теорії пружного режиму співвідношення (7) приводить до відомого рівняння релаксаційної фільтрації [9]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t}), \quad (8)$$

де $\kappa > 0$ — коефіцієнт п'єзопровідності. Заміна рівняння Фур'є рівнянням фільтрації типу (8) є принциповою, але, як відзначається в роботі [10], такою, яку важко пояснити з теоретико-групової точки зору. Справді, вимога інваріантності рівняння щодо певної групи перетворень дає змогу з множини рівнянь, придатних для математичного моделювання певного фізичного процесу, виділити тільки ті, які мають відповідні симетрійні властивості і, таким чином, відображають основні фізичні закони збереження [11]. Проте, як зазначається в [10], [11], жодне з рівнянь з частинними похідними третього порядку, що має другу похідну по часу, не задовольняє вимогу інваріантності. Умову інваріантності відносно групи Галілея (7(1.3)) задовольнятиме рівняння вигляду [10], [11]

$$(L + \tau_r L^2)p(x, t) = 0. \quad (9)$$

якому відповідає наступний закон фільтрації:

$$v + \tau_r \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + 2\tau_r L_1 p), \quad (10)$$

де

$$L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$\tau_r > 0$ — час релаксації (малий параметр).

Згідно з [10], [11] рівняння (9) будемо називати біпараболічним рівнянням фільтрації. З огляду на вказане вище припустимо, що воно може бути використане для опису процесів релаксаційної фільтрації, не залежних від того, в яких інерційних системах вони спостерігаються.

Розглянемо процес ПВ за умов релаксаційної фільтрації рідини з метою порівняння результатів видужування у фільтраційному полі, що описується класичною моделлю, і у фільтраційному полі з урахуванням явищ запізнення згідно з моделлю біпараболічної фільтрації (9). Ввівши нові змінні та параметри згідно із співвідношеннями

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{\kappa t}{l^2}, \quad \tau_r' = \frac{\tau_r \kappa^2}{l^4}, \quad p' = \frac{p - p_0}{p_1 - p_0},$$

(p_0, p_1 — заданий тиск) та опускаючи надалі знак штрих, маємо для визначення тиску $p(x, t)$ при фільтрації крайову задачу:

$$(L + \tau_r L^2)p(x, t) = 0. \quad (11)$$

$$p(0, t) = 1, \quad \frac{\partial^2 p(0, t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$p(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 p(1, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (12)$$

$$p(x, 0) = 0, \quad p'_t(x, 0) = 0, \quad (13)$$

де позначено

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Зважаючи на те, що τ_r — малий параметр, для розв'язування розглядуваної задачі можна застосувати асимптотичні методи [12]. Замкнений розв'язок задачі (11)–(13) одержимо таким чином.

Застосовуючи до (11)–(13) перетворення Лапласа за змінною t , отримуємо задачу

$$\tau_r \frac{d^4 \bar{p}}{dx^4} - (1 + 2\tau_r s) \frac{d^2 \bar{p}}{dx^2} + s(1 + \tau_r s) \bar{p} = 0, \quad (14)$$

$$\bar{p}(0, s) = \frac{1}{s}, \quad \frac{d^2 \bar{p}(0, s)}{dx^2} = 0,$$

$$\bar{p}(1, s) = 0, \quad \frac{d^2 \bar{p}(1, s)}{dx^2} = 0, \quad (15)$$

де s — параметр перетворення Лапласа, $\bar{p}$ — образ p .

Розв'язуючи задачу (14)–(15) та переходячи в область оригіналів, маємо

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{2n+x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{2(n+1)-x}{2\sqrt{t}} \right) \right) + \frac{\tau_r}{2t\sqrt{\pi t}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}} \right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left((2n+x) \exp \left(-\frac{(2n+x)^2}{4t} \right) - (2(n+1)-x) \exp \left(-\frac{(2(n+1)-x)^2}{4t} \right) \right), \quad (16)$$

де $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$, $\operatorname{erf}(z)$ — функція Лапласа [8].

Задача (1)–(6), з урахуванням (10), (16), розв'язувалася скінченнорізницеvim методом згідно зі схемою

$$(mc_1)_t = (\{D\}_1 \widehat{c_{1\bar{x}}} - \widehat{v_1} \{\widehat{c_1}\}_1)_x - a_t + k_1 \widehat{c_2}^n,$$

$$(mc_2)_t = (\{D\}_1 \widehat{c_{2\bar{x}}} - \widehat{v_1} \{\widehat{c_2}\}_1)_x - k_2 \widehat{c_2}^n, \\ a_t = \beta(mc_1 - \alpha \widehat{a}),$$

де для сіткових функцій використано позначення роботи [13]. Розрахунки проведено для вхідних даних, узятих з роботи [2]. З результатів розрахунків, зокрема, впливає, що на початковій стадії процесу вилизування моделювання процесу фільтрації біпараболічною моделлю дає уповільнення формування ореола вилизуваного компонента порівняно з моделюванням цього процесу на основі класичної моделі фільтрації. З плином часу, а також із зменшенням величини параметра τ_r , різниця між сформованими ореолами вилизуваного компонента для обох моделей фільтрації поступово зменшується і, в кінцевому підсумку, зникає.

1. Bulavatskyi K. M. Mathematical Modelling of Chemical Mass Transport in Saturated Porous Media // "Modelling and investigation of systems stability". Thesis of international conference reports. - Kyiv: Kyiv University Press, 1997.— P. 19.
2. Махмадіяров С., Николаевский В. Н. Анизотропная фильтрация ННО-КДвективная диффузия при подземном выщелачивании. // Изв. АН СССР, МЖП- 1987, №1. - С. 96-101.
3. Арене В. Ж., Гайдин А. М. Геолого-гидрогеологические основы геотехнологических методов добычи полезных ископаемых. - М.: Недра, 1978.— 215 с.
4. Булавацкий В. М. Специальные краевые задачи подземной гидродинамики.—К.: Наукова думка, 1993,— 132 с.
5. Голубев В. С. Динамика геохимических процессов.— М.: Недра, 1981.— 208 с.
6. Пеньковский В. И., Рыбакова С. Т. Численное моделирование процессов массопереноса при подземном выщелачивании // Фильтрация и массоперенос в пористых средах.— Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1989.— С. 81-92.

7. Хчян Г. Х., Нафтулин Н. С. Геотехнологические процессы добычи полезных ископаемых.— М.: Недра, 1983.— 221 с.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высш. шк., 1967.— 599 с.
9. Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В. Релаксационная фильтрация.— Казань: Изд. Казане, ун-та, 1980.— 136 с.
10. Фуцич В. И., Голицын А. С., Полубинский А. С. О новой математической модели процессов теплопроводности // Укр. мат. журнал.— 1990.— 42, № 2.— С. 237-245.
- П. Фуцич В. И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— К.: Ин-т математики НАН Украины, 1983.— С. 3-23.
12. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
13. Гладкий А. В., Ляшко И. И., Мистецкий Г. Е. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем.— К.: Вища школа, 1981.— 288 с.

V.M. Bulavatskyi, V.I. Lavryk

**NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SYSTEM
FILTRATION-CONVECTIVE EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER**

The boundary-value problem for system filtration-convective diffusion equations for biparabolic filtration model is considered.