

DOI: 10.37863/umzh.v73i7.6552

УДК 512.54

Ю. А. Дрозд, А. І. Плакош (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧЕРНІКОВСЬКІ 2-ГРУПИ З КЛЯЙНІВСЬКОЮ ВЕРХІВКОЮ І ЦІЛКОМ ЗВІДНОЮ БАЗОЮ

We give a classification of Chernikov 2-groups with Kleinian top and totally reducible bottom.

Наведено класифікацію черніковських 2-груп з кляйнівською верхівкою і цілком звідною базою.

1. Вступ. Нагадаємо, що *черніковською групою* називається група, яка містить нормальну підгрупу скінченного індексу, що є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних груп (або груп типу (p^∞)). Відомо [6], що такою є будь-яка локально розв'язна група з умовою мінімальності, а також будь-яка локально скінченна p -група з умовою мінімальності. Властивості таких груп вивчалися багатьма авторами, але питання про їхню класифікацію вперше було розглянуто в роботах [2, 3]. У цих роботах було встановлено зв'язок черніковських груп із зображеннями та когомологіями скінчених груп. Для p -груп цей зв'язок має такий вигляд. Нехай $R: H \rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{Z}_p)$ — зображення скінченної p -групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$ цілих p -адичних чисел. Оскільки $\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{Aut}(p^\infty)$, зображення R визначає групу $M = (p^\infty)^r$ як модуль над груповим кільцем $\mathbb{Z}_p H$ (ми казатимемо також *H -модуль*). Тому можна розглядати *розширення* групи H за допомогою H -модуля M , які класифікуються класами когомологій $H^2(H, M)$. Отже, пара (M, δ) , де $\delta \in H^2(G, M)$, визначає деяку черніковську p -групу G й усі черніковські p -групи отримуються таким способом. Групу H ми назвемо *верхівкою*, а модуль M — *базою* черніковської p -групи G . У роботах [2, 3] показано, що пари (M, δ) і (M', δ') визначають ізоморфні групи тоді і тільки тоді, коли вони одержуються одна з одної автоморфізмами групи H і H -модуля M . Цей результат є основою для класифікації черніковських p -груп.

Втім, вже класифікація p -адичних зображень даної p -групи, як правило, є дуже складною задачею, яка розв'язана лише для циклічних груп порядків p і p^2 , а також, при $p = 2$, для четверної групи Кляйна та циклічної групи порядку 8. Більш того, відомо, що для інших p -груп ця задача є *дикою*, тобто містить у собі задачу класифікації довільних наборів матриць з точністю до спряженості.

Для циклічних груп порядків p і p^2 класифікацію пар (M, δ) і p -груп з такою верхівкою наведено в роботі [3]. Когомології модулів, які одержуються з p -адичних зображень групи Кляйна, обчислено в роботі [8]. Ці групи швидко збільшуються зі збільшенням розмірності зображень, що вносить значні труднощі у класифікацію пар. У даній роботі ми розглянемо найпростіший випадок, коли зображення R є *цілком звідним*, тобто розкладається у пряму суму незвідних зображень. Для цього випадку ми одержимо повну класифікацію відповідних черніковських груп.

2. Когомології. Отже, нехай $H = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$ — четверна група Кляйна. Вона має чотири незвідні p -адичні зображення, в яких $r = 1$, $a \mapsto u1$, $b \mapsto v1$, де $u, v \in \{+, -\}$. Їм відповідають чотири модулі L_{uv} , $u, v \in \{+, -\}$, у яких адитивна група — квазіциклічна група (2^∞) . Когомології цих модулів обчислено у [5] у термінах резольвенти $\mathbb{P}$, побудованої в [7], в якій $\mathbb{P}_n$ — модуль однорідних многочленів від x, y степеня n над груповим кільцем $R = \mathbb{Z}G$, а

$$d(x^i y^j) = C_1 x^{i-1} y^j + (-1)^i C_2 x^i y^{j-1},$$

де

$$C_1 = \begin{cases} a + (-1)^i, & \text{якщо } i > 0, \\ 0, & \text{якщо } i = 0; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} b + (-1)^j, & \text{якщо } j > 0, \\ 0, & \text{якщо } j = 0. \end{cases}$$

Нагадаємо цей результат.

Твердження 2.1. 1. $H^2(H, L_{++}) \simeq \mathbb{Z}/2$; її ненульовий елемент — клас когомологій коциклу γ , в якому $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0$, $\gamma(xy) = \varepsilon$, де ε — елемент порядку 2 групи (2^∞) .

2. $H^2(H, L_{uv}) \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$, якщо $(u, v) \neq (+, +)$, її елементи — класи коциклів γ , в яких $\gamma(xy) = 0$, а $\gamma(x^2)$ і $\gamma(y^2)$ — або 0, або ε .

Для опису черніківських груп нам потрібно знати відповідні коцикли в термінах стандартної резольвенти [1]. Такий «переклад» наведено в [7]. У застосуванні до групи Кляйна він дає такі ненульові стандартні коцикли γ :

для модуля L_{++} : $\gamma[a, a] = \gamma[b, b] = \gamma[a, b] = 0$, $\gamma[b, a] = \varepsilon$;

для модуля L_{+-} :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{+-}[a, a] &= \gamma_1^{+-}[a, b] = \gamma_1^{+-}[b, a] = 0, \gamma_1^{+-}[b, b] = \varepsilon, \\ \gamma_2^{+-}[b, b] &= \gamma_2^{+-}[a, b] = \gamma_2^{+-}[b, a] = 0, \gamma_2^{+-}[a, a] = \varepsilon, \\ \gamma_3^{+-} &= \gamma_1^{+-} + \gamma_2^{+-}; \end{aligned}$$

для модуля L_{-+} :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{-+}[b, b] &= \gamma_1^{-+}[a, b] = \gamma_1^{-+}[b, a] = 0, \gamma_1^{-+}[a, a] = \varepsilon, \\ \gamma_2^{-+}[a, a] &= \gamma_2^{-+}[a, b] = \gamma_2^{-+}[b, a] = 0, \gamma_2^{-+}[b, b] = \varepsilon, \\ \gamma_3^{-+} &= \gamma_1^{-+} + \gamma_2^{-+}; \end{aligned}$$

для модуля L_{--} :

$$\begin{aligned} \gamma_1^{--}[b, b] &= \gamma_1^{--}[a, b] = \gamma_1^{--}[b, a] = 0, \gamma_1^{--}[a, a] = \varepsilon, \\ \gamma_2^{--}[a, b] &= \gamma_2^{--}[b, a] = 0, \gamma_2^{--}[a, a] = \gamma_2^{--}[b, b] = \varepsilon, \\ \gamma_3^{--} &= \gamma_1^{--} + \gamma_2^{--}. \end{aligned}$$

Нумерацію коциклів γ_i^{uv} підібрано так, що при автоморфізмі σ групи H такому, що $L_{uv}^\sigma = L_{u'v'}$, коцикл γ_k^{uv} переходить у $\gamma_k^{u'v'}$ (у випадку $+-$ з точністю до кограниці).

Якщо $M = \bigoplus_{u,v} m_{uv} L_{uv}$, то $H^2(H, M) = \bigoplus_{u,v} m_{uv} H^2(H, L_{uv})$. Отже, елементи цієї групи можна ототожнити з четвірками векторів $\mathbf{h}_{uv}$, $\mathbf{h}_{uv} = (h_1^{uv}, h_2^{uv}, \dots, h_{m_{uv}}^{uv})$, де $h_i^{uv} \in H^2(H, L_{uv})$. Автоморфізми модуля M діють окремо на кожний доданок $m_{uv} L_{uv}$, тобто такий автоморфізм задається четвіркою обертовних матриць S_{uv} з цілими p -адичними коефіцієнтами. При дії цього автоморфізму вектор когомологій $\mathbf{h}_{uv}$ переходить у $\mathbf{h}_{uv} S_{uv}$. Якщо $(u, v) = (+, +)$, легко бачити, що при $\mathbf{h}_{++} \neq 0$ існує автоморфізм модуля $m_{uv} L_{uv}$, який переводить цей вектор

у вектор $e^{++} = (\gamma^{++}, 0, \dots, 0)$. Якщо ж $(u, v) \neq (+, +)$, так само перевіряється, що або $h_{uv} = 0$, або h_{uv} можна перевести у вектор $e_k^{uv} = (\gamma_k^{uv}, 0, \dots, 0)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, або його можна перевести у вектор $e_{12}^{uv} = (\gamma_1^{uv}, \gamma_2^{uv}, 0, \dots, 0)$. (В усіх випадках це вектори довжини m_{uv} .)

Отже, пара (M, δ) , де $\delta \in H^2(H, M)$, з точністю до автоморфізму модуля M задається набором $H = \{m_{uv}, h_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\}$, в якому $h_{++} \in \{0, e^{++}\}$, а $h_{uv} \in \{0, e_k^{uv} \mid k \in \{1, 2, 3, 12\}\}$ при $(u, v) \neq (+, +)$.

Аutomорфізми групи H переставляють модулі L_{uv} з $(u, v) \neq (+, +)$ і залишають на місці модуль L_{++} . При цьому в наборі H , який задає пару (M, δ) , лише переставляються індекси uv . Для вибору канонічних представників уведемо такі порядок на множині індексів uv , множині векторів $\{0, e^{++}, e_k^{uv}\}$ і множині наборів H :

$$++ < +- < -+ < --;$$

$$0 < e^{++}, 0 < e_k^{uv} < e_l^{uv}, \text{ якщо } k < l \text{ і } e_3^{uv} < e_{12}^{uv};$$

$$H < H', \text{ де } H' = \{m'_{uv}, h_{uv}\} \neq H, \text{ причому}$$

$$\text{якщо } uv \text{ — найменший за цим порядком номер, для якого } m_{uv} \neq m'_{uv}, \text{ то } m_{uv} < m'_{uv};$$

$$\text{якщо } m_{uv} = m'_{uv} \text{ для всіх } uv, \text{ а } uv \text{ — перший за порядком номер, для якого } h_{uv} \neq h'_{uv}, \text{ то } h_{uv} < h'_{uv}.$$

Означення 2.1. *Набір $H = \{m_{uv}, h_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\}$ назовемо канонічним, якщо $H \leq H'$ для будь-якого набору H' , який одержується з нього перестановкою індексів uv з $(u, v) \neq (0, 0)$.*

Із попередніх розглядів випливає такий результат.

Теорема 2.1. *Кожна пара (M, δ) еквівалентна єдиній парі, яка задається канонічним набором.*

3. Черніковські групи. Згідно з результатами [3] і теоремою 2.1, черніковська група з кляйнівською верхівкою H і цілком розкладною базою M ізоморфна групі, яка відповідає парі, що задається канонічним набором H , причому цей набір визначено однозначно. Нагадаємо, що група G , яка відповідає парі (M, δ) , як множина збігається з декартовим добутком $M \times H$, а операція задається правилом

$$(x, h)(y, g) = (x + hy + \delta(h, g), hg).$$

Пари $(x, 1)$ утворюють підгрупу, ізоморфну M , і ми отожднюємо їх з елементами $x \in M$. Позначимо $\bar{a} = (0, a)$, $\bar{b} = (0, b)$. Група G породжується підгрупою M та елементами $\bar{a}, \bar{b}$. Нам відомо, що M — нормальна підгрупа, і знаємо, як комутують її елементи з $\bar{a}$ та $\bar{b}$ (це визначається дією H на M). Отже, щоб визначити групу G , потрібно знати елементи $\alpha = \bar{a}^2$, $\beta = \bar{b}^2$ і $\eta = [\bar{a}, \bar{b}]$, які є елементами підгрупи M . Вони визначаються коциклом δ .

Означення 3.1. *Нехай пара (M, δ) задається набором $H = \{m_{uv}, h_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\}$. Елементи групи $M = m_{uv}L_{uv}$ ми розглядаємо як вектори довжини m_{uv} з коефіцієнтами з групи (p^∞) . Через ϵ_i^{uv} позначимо вектор з $m_{uv}L_{uv}$, в якому на i -му місці стоїть ϵ , а інші координати є нулями. Визначимо елементи $\alpha_{uv}, \beta_{uv}, \eta_{uv}$ таким чином:*

$$\text{якщо } h_{uv} = 0, \text{ то } \alpha_{uv} = \beta_{uv} = \eta_{uv} = 0;$$

$$\text{якщо } h_{++} = e^{++}, \text{ то } \alpha_{++} = \beta_{++} = 0, \eta_{++} = \epsilon_1^{++};$$

$$\text{якщо } h_{+-} = e_1^{+-}, \text{ то } \alpha_{+-} = \epsilon_1^{+-}, \beta_{+-} = 0, \eta_{+-} = 0;$$

$$\text{якщо } h_{+-} = e_2^{+-}, \text{ то } \beta_{+-} = \epsilon_1^{+-}, \alpha_{+-} = 0, \eta_{+-} = 0;$$

$$\text{якщо } h_{+-} = e_3^{+-}, \text{ то } \alpha_{+-} = \beta_{+-} = \epsilon_1^{+-}, \eta_{+-} = 0;$$

$$\text{якщо } h_{+-} = e_{12}^{+-}, \text{ то } \alpha_{+-} = \epsilon_1^{+-}, \beta_{+-} = \epsilon_2^{+-}, \eta_{+-} = 0;$$

якщо $h_{-+} = e_1^{-+}$, то $\beta_{-+} = \varepsilon_1^{-+}$, $\alpha_{-+} = 0$, $\eta_{-+} = 0$;
 якщо $h_{-+} = e_2^{-+}$, то $\alpha_{-+} = \varepsilon_1^{-+}$, $\beta_{-+} = 0$, $\eta_{-+} = 0$;
 якщо $h_{-+} = e_3^{-+}$, то $\alpha_{-+} = \beta_{-+} = \varepsilon_1^{-+}$, $\eta_{-+} = 0$;
 якщо $h_{-+} = e_{12}^{-+}$, то $\alpha_{-+} = \varepsilon_2^{-+}$, $\beta_{-+} = \varepsilon_1^{-+}$, $\eta_{-+} = 0$;
 якщо $h_{--} = e_1^{--}$, то $\alpha_{--} = \varepsilon_1^{--}$, $\beta_{--} = 0$, $\eta_{--} = 0$;
 якщо $h_{--} = e_2^{--}$, то $\alpha_{--} = \beta_{--} = \varepsilon_1^{--}$, $\eta_{--} = 0$;
 якщо $h_{--} = e_3^{--}$, то $\beta_{--} = \varepsilon_1^{--}$, $\alpha_{--} = 0$, $\eta_{--} = 0$;
 якщо $h_{--} = e_{12}^{--}$, то $\alpha_{--} = \varepsilon_1^{--} + \varepsilon_2^{--}$, $\beta_{--} = \varepsilon_2^{--}$, $\eta_{--} = 0$.
 Покладемо

$$\alpha(H) = \alpha_{++} + \alpha_{+-} + \alpha_{-+} + \alpha_{--},$$

$$\beta(H) = \beta_{++} + \beta_{+-} + \beta_{-+} + \beta_{--},$$

$$\eta(H) = \eta_{++} + \eta_{+-} + \eta_{-+} + \eta_{--}.$$

Попередні розгляди дають повний опис черніковських груп із кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою.

Теорема 3.1. Для кожного набору $H = \{m_{uv}, h_{uv} \mid u, v \in \{+, -\}\}$ визначимо групу $G(H)$ як таку, що породжується групою $M = \bigoplus_{uv} m_{uv} L_{uv}$ та елементами $\bar{a}$, $\bar{b}$ такими, що $\bar{a}x\bar{a}^{-1} = ax$ і $\bar{b}x\bar{b}^{-1} = bx$ для всіх $x \in M$, $\bar{a}^2 = \alpha(H)$, $\bar{b} = \beta(H)$ і $[\bar{a}, \bar{b}] = \eta(H)$.

1. Група $G(H)$ є черніковською групою з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою.
2. Кожна черніковська група G з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою ізоморфна деякій групі $G(H)$, де H — канонічний набір, визначений однозначно групою G .

Література

1. К. С. Браун, *Когомології груп*, Наука, Москва (1987).
2. П. М. Гудивок, Ф. Г. Вашук, В. С. Дроботенко, *p-Группы Черникова и целочисленные p-адические представления конечных групп*, Укр. мат. журн., **44**, № 6, 742–753 (1992).
3. П. М. Гудивок, И. В. Шапочка, *О p-группах Черникова*, Укр. мат. журн., **51**, № 3, 291–304 (1999).
4. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
5. А. І. Плакош, І. В. Шапочка, *Про когомології четверної групи Клейна*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту, **30**, № 1, 95–102 (2017).
6. С. Н. Черников, *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, Наука, Москва (1980).
7. Yu. Drozd, A. Plakosh, *Cohomologies of finite Abelian groups*, Algebra and Discrete Math., **24**, № 1, 144–157 (2017).
8. Yu. Drozd, A. Plakosh, *Cohomologies of the Kleinian 4-group*, Arch. Math., **115**, № 2, 139–145 (2020).

Одержано 01.02.21