УДК 681.3.06

Шкільняк О. С.

КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ МОДАЛЬНІ ТА ТЕМПОРАЛЬНІ ЛОГІКИ: СЕМАНТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ, СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем вивчаються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки. Пропонується спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи для логік реномінативного та кванторного рівнів. Досліджуються семантичні властивості транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік. Для таких логік будуються числення секвенційного типу.

Апарат математичної логіки засвідчує високу ефективність при розв'язанні широкого спектра задач моделювання та програмування. Розширення сфери застосування математичної логіки робить вельми актуальною проблему побудови нових логічних формалізмів, орієнтованих на потреби моделювання різноманітних предметних областей та специфікації програмних систем. Таку побудову природно вести на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу [1]. Його основою є спільний для логіки та програмування композиційно-номінативний підхід [2], розширений принципом інтегрованості інтенсіонального та екстенсіонального аспектів. Застосування такого підходу дає змогу на єдиній методологічній основі будувати широкий спектр логічних формалізмів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності.

В останні роки для аналізу й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини дедалі більше використовуються модальні та темпоральні логіки. Особливого значення такі логіки набувають у зв'язку зі створенням та розвитком сучасних інформаційних та програмних систем. Апарат модальних і темпоральних логік успішно застосовується для моделювання складних динамічних систем, специфікації програмних систем. На базі темпоральної логіки збудовано низку систем та мов специфікації програм (Temporal Logic, Petri nets, TLA+, TLS, StateCharts, GIL, CSP).

На основі синтезу можливостей композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів та модальних логік запропоновані [3] композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, виділяються КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого - транзиційні КНМЛ. Композиційно-номінативні темпоральні логіки можуть трактуватися як окремий випадок транзиційних КНМЛ.

У пропонованій роботі на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу досліджуються семантичні властивості композиційно-номінативних модальних та темпоральних логік пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів. Для транзиційних та темпоральних КНМЛ будуються числення секвенційного типу.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачаться в сенсі робіт [3; 4].

1. Композиційно-номінативні модальні системи

Центральним поняттям композиційно-номінативної модальної логіки є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Такі системи описують світи розгляду модальної логіки, вони є семантичними моделями цих світів.

Пропоноване тут визначення композиційно-номінативної модальної системи дещо відрізняється від початкового визначення із [3; 4]. Відмінність полягає у тому, що світами (станами світу) будуть алгебраїчні системи. Така відмінність проявиться для логік номінативних рівнів.

Під композиційно-номінативною модальною системою у загальному випадку розуміють [3; 4] об'єкт вигляду $M = (Cms, Ds, Dns)$. Тут:

- *Cms* - композиційна модальна система, яка задає семантичні аспекти світу;
- *Ds* — дескриптивна система КНМС, яка визначає множину стандартних дескрипцій (формул мови модальної логіки);
- *Dns* — денотаційна система КНМС, яка визначає значення кожної стандартної дескрипції на семантичній моделі.

Композиційна модальна система - це об'єкт вигляду $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, \mathrm{Pr}, \mathrm{C})$. Тут:

- $\boldsymbol{S}$ - множина світів (або станів єдиного світу);
- $\boldsymbol{R}$ - множина відношень на станах світу;
- Pr - множина предикатів на даних станів світу;
- C - множина композицій на Pr.

Обмежимося тут відношеннями на станах світу вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}^n$.

Якщо множина композицій зафіксована, композиційну модальну систему будемо позначати у вигляді ***(S, R,*** Pr) і називати *модальною системою*.

Множина композицій КНМС визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями. Обмежимося тут 1-арними базовими модальними композиціями. Кожна така модальна композиція ⌘ кожному предиката $P \in \mathrm{Pr}$ ставить у відповідність предикат *⌘(P),* значення якого в кожному конкретному стані $\alpha \in \boldsymbol{S}$ визначається значеннями предиката P в певних станах світу таких, що α та ці стани перебувають у певних пов'язаних із ⌘ відношеннях з ***R.***

Композиції КНМС пропозиційного рівня визначаються базовими модальними композиціями та базовими пропозиційними композиціями $\neg$, $\vee$.

Композиції $\neg$ та $\vee$ задаються стандартно [3] із урахуванням частковості предикатів.

Для КНМС номінативного рівня множину станів світу S конкретизуємо як множину алгебраїчних систем вигляду α = (Aα, Prα), де Prα - множина V-квазіарних еквітонних предикатів вигляду $VA\alpha \to \{T, F\}$. У цьому випадку $\mathrm{Pr} = \bigcup_{\alpha \in S} \mathrm{Pr}_\alpha$ - множина предикатів на даних усіх станів світу. Множину $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ трактуємо як множину базових даних світу.

Зауважимо, що в початковому визначенні КНМС [2; 3] множина станів світу трактується як множина іменних даних вигляду ${}^{V}\!A$, де A - множина базових даних світу. Тоді множина Pr - це множина V-квазіарних еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}\!A \to \{T, F\}$.

Номінативний рівень розпадається на низку підрівнів. Обмежимося тут розглядом КНМС реномінативного та кванторного рівнів.

Базовими композиціями КНМС реномінативного рівня є базові модальні композиції та базові пропозиційні композиції $\neg$ і $\vee$, до яких додається композиція реномінації $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

На кванторному рівні додатково з'являються композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$. При цьому дія кванторів на предикат у стані світу обмежена базовими даними цього стану. Композиції квантифікації задаються стандартно [4] з урахуванням частковості предикатів.

Вибираючи ті чи інші базові модальні композиції та пов'язані з ними відношення з R, можна отримати [3; 4] відповідні різновиди КНМС. Наприклад, узявши за базові загальні модальні композиції $\Box$ (необхідно) і $\diamond$ (можливо) та множину $\boldsymbol{R}$ з єдиного бінарного відношення, отримуємо загальні (алетичні) КНМС. Якщо ж узяти за базові модальні композиції $\Box_\uparrow$ (завжди буде), $\Box_\downarrow$ (завжди було), $\diamond_\uparrow$ (колись буде) і $\diamond_\downarrow$ (колись було), то отримаємо темпоральні КНМС.

1.1. Пропозиційні КНМС

Для КНМС пропозиційного рівня множину станів світу $\boldsymbol{S}$ можна конкретизувати як множину абстрактних алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A, \mathrm{Pr}_\alpha)$, де Pr_α – множина абстрактних предикатів вигляду $A \to \{T, F\}$.

Мова пропозиційної модальної логіки описується [4] таким чином.

Алфавіт мови складається з множини *Ps* предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$ та множини *Ms* символів базових модальних композицій.

Множину *Ms* назвемо *модальною сигнатурою* КНМС.

Множину *Fpm* формул мови пропозиційної модальної логіки визначимо індуктивно:

1) Кожний $p \in Ps$ є формулою. Такі формули назвемо *атомарними.*

2) Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формули.

3) Нехай Φ – формула, $⌘ \in Ms$. Тоді $⌘\Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I}$: $Ps \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$. При цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha) \in \mathrm{Pr}_\alpha$, $\mathrm{Pr} = \bigcup_{\alpha \in S} \mathrm{Pr}_\alpha$. Символи базових композицій інтерпретуємо як відповідні композиції. Таке $\boldsymbol{I}$ продовжимо до відображення $\boldsymbol{Jm}$: $Fpm \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$:

1) $\boldsymbol{Jm}(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $\boldsymbol{Jm}(\neg\Phi, \alpha) = \neg(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;

3) $\boldsymbol{Jm}(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha), \boldsymbol{Jm}(\Psi, \alpha))$;

4) Для формул вигляду $⌘\Phi$ значення $\boldsymbol{Jm}(⌘\Phi, \alpha)(a)$ визначається значеннями $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \delta)(a)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з $\boldsymbol{R}$.

Таким чином, поняття КНМС пропозиційного рівня можна уточнити як об'єкт вигляду $\boldsymbol{M}$ = ((***S, R,*** Pr, C), *Fpm*, ***Jm***).

Тип пропозиційної КНМС визначається її модальною сигнатурою й однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного символу базової модальної композиції.

Без обмежень загальності можна вважати, що пропозиційні КНМС одного типу мають однакову множину *FPm*.

Предикат $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

Формула Φ істинна у пропозиційній КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо для кожних $\alpha \in \boldsymbol{S}$ та $a \in A$ маємо $\Phi_\alpha(a) \cong T$, тобто предикат Φ_α є істинним. Цей факт позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$.

Формула Φ *усюди істинна*, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Те, що формула Φ усюди істинна, позначаємо $\models \Phi$.

Значення $\Phi_\alpha(a)$ у пропозиційній КНМС визначається значеннями $\Psi_\beta(a)$ для підформул Ψ формули Φ та деяких станів β. Визначальним є те, що при цьому використовується один і той же елемент $a \in A$. Істинність формули Φ у пропозиційній КНМС означає однаковість значень $\Phi_\alpha(a)$ для довільних $a \in A$.

Таким чином, можна обмежитися розглядом пропозиційних КНМС, у яких стани світу - це абстрактні алгебраїчні системи з 1-елементним носієм. Відповідним чином уточнюються множини Pr_α та Pr. Це, своєю чергою, дозволяє трактувати стани світу як абстрактні елементи і задавати відображення інтерпретації атомарних формул у вигляді $\boldsymbol{I}_v: Ps \times \boldsymbol{S} \to \{T, F\}$, тобто за допомогою істиннісних оцінок, як це робиться у традиційних модальних логіках пропозиційного рівня. Відображення $\boldsymbol{I}_v: Ps \times \boldsymbol{S} \to \{T, F\}$ тоді продовжується до відображення $\boldsymbol{J}_v: Fpm \times \boldsymbol{S} \to \{T, F\}$:

1) $\boldsymbol{J}_v(p, \alpha) = \boldsymbol{I}_v(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;
2) $\boldsymbol{J}_v(\neg\Phi, \alpha) = \neg(\boldsymbol{J}_v(\Phi, \alpha))$;
3) $\boldsymbol{J}_v(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(\boldsymbol{J}_v(\Phi, \alpha), \boldsymbol{J}_v(\Psi, \alpha))$;
4) Для формул вигляду ⌘Φ значення $\boldsymbol{J}_v$(⌘Φ, α) визначається значеннями $\boldsymbol{J}_v(\Phi, \delta)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з $\boldsymbol{R}$.

Формула Φ істинна у пропозиційній КНМС $\boldsymbol{M}$ зазначеного вище вигляду, якщо для всіх $\alpha \in \boldsymbol{S}$ маємо $\boldsymbol{J}_v(\Phi, \alpha) = T$.

1.2. КНМС кванторного та реномінативного рівнів

Уточнимо поняття КНМС на ***кванторному*** рівні.

Мова КНМС кванторного рівня описується [4] таким чином.

Алфавіт мови складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів, символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ і множини Ms символів базових модальних композицій.

Множина Fm формул мови КНМС кванторного рівня визначається індуктивно:

1) Кожний $p \in Ps$ є формулою. Такі формули назвемо *атомарними*.

2) Нехай Φ та Ψ - формули. Тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ - формули.

3) Нехай Φ – формула. Тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула.

4) Нехай Φ – формула. Тоді $\exists x\Phi$ – формула.

5) Нехай Φ – формула, ⌘ $\in Ms$. Тоді ⌘Φ – формула.

Для кожного $p \in Ps$ визначається [4] множина його синтетично неістотних предметних імен за допомогою тотального відображення $\mu: Ps \to 2^V$.

Пару $\sigma = (Ps, \mu)$ називають сигнатурою синтетичної неістотності кванторної КНМС.

Символи модальних композицій утворюють модальну сигнатуру кванторної КНМС.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою, однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного символу базової модальної композиції та сигнатурою синтетичної неістотності.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I}: Ps \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$. При цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha) \in \mathrm{Pr}_\alpha$, $\mathrm{Pr} = \bigcup_S \mathrm{Pr}_\alpha$. Символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та символи базових модальних композицій інтерпретуємо як відповідні композиції.

Відображення $\boldsymbol{I}$ продовжимо до $\boldsymbol{Jm}: Fm \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$. При цьому $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha) \in \mathrm{Pr}_\alpha$.

1) $\boldsymbol{Jm}(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;
2) $\boldsymbol{Jm}(\neg, \alpha) = \neg(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;
3) $\boldsymbol{Jm}(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha), \boldsymbol{Jm}(\Psi, \alpha))$;
4) $\boldsymbol{Jm}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;
5) Для формул вигляду $\exists x\Phi$ маємо:

$$\boldsymbol{Jm}(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \textit{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \textit{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, \textit{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \textit{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \textit{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси для формул вигляду $\forall x\Phi$ отримуємо:

$$\boldsymbol{Jm}(\forall x\Phi, \alpha)(d) =$$

$$= \begin{cases} T, \textit{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \textit{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ F, \textit{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \textit{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ \textit{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

6) Для формул вигляду ⌘Φ значення $\boldsymbol{Jm}$(⌘Φ, α)(d) визначається значеннями $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із ⌘ відношеннях з $\boldsymbol{R}$.

Таким чином, поняття КНМС кванторного рівня можна уточнити як об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = ((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, \mathrm{Pr}, C), Fm, Jm)$.

Формула Φ істинна у стані α, якщо Φ_α - істинний предикат. Це позначаємо $\alpha \models \Phi$.

Формула Φ істинна в КНМС ***M***, якщо для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$ предикат Φ_α є істинним. Це позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$.

Формула Φ усюди істинна, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу. Це позначаємо $\models \Phi$.

Уточнимо поняття КНМС на ***реномінативному*** рівні.

Алфавіт мови КНМЛ реномінативного рівня складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів, символів базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ і множини Ms символів базових модальних композицій.

Множина Fm формул мови такої логіки визначається індуктивно (див. пп. 1-3 і 5 визначення мови КНМЛ кванторного рівня).

Відображення інтерпретації $\boldsymbol{I}: Ps \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$ продовжується до $\boldsymbol{Jm}: Fm \times \boldsymbol{S} \to \mathrm{Pr}$ так, як і для кванторного рівня (див. пп. 1-4, 6).

Поняття істинної в КНМС формули та всюди істинної формули для випадку КНМС реномінативного рівня аналогічні відповідним визначенням для КНМС кванторного рівня.

2. Транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки

Важливим випадком КНМС є *транзиційні модальні системи* (ТМС) [3; 4]. Вони є семантичною основою транзиційних модальних логік. У межах транзиційних модальних логік можуть розглядатися і традиційні модальні логіки [5; 6].

Для ТМС множина $\boldsymbol{R}$ відношень на станах світу складається з відношень вигляду $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, які природно назвати *відношеннями переходу*.

Якщо $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення, яке позначатимемо $\rhd$, то таку ТМС називають *стандартною*.

Стандартні ТМС із базовими модальними композиціями $\Box$ і $\Diamond$ називають *загальними* ТМС.

Для ТМС звичайно виділяємо певний $\alpha_0 \in \boldsymbol{S}$, який називаємо *початковим станом*.

Уточнимо відображення інтерпретації $\boldsymbol{Jm}$ стосовно формул вигляду $\Box\Phi$ та $\Diamond\Phi$ для загальних ТМС.

Для кожних $\alpha \in \boldsymbol{S}$ та $d \in {}^{V}\!A_{\alpha}$ визначимо:

$$\boldsymbol{Jm}(\Box\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Jm}(\Diamond\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = F \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta \in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Уведені поняття можуть бути конкретизовані на різних рівнях абстракції. Зокрема, отримуємо стандартні ТМС та загальні ТМС пропозиційного, реномінативного, кванторного рівнів.

Для загальних ТМС пропозиційного рівня можна трактувати стани світу як абстрактні елементи і задавати відображення інтерпретації атомарних формул у вигляді $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{v}}: Ps \times \boldsymbol{S} \to \{T, F\}$. У цьому випадку відображення інтерпретації $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{v}}$ стосовно формул вигляду $\Box\Phi$ та $\Diamond\Phi$ можна уточнити так.

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{v}}(\Box\Phi, \alpha) = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_v(\Phi,\delta) = T \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } J_v(\Phi,\delta) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{v}}(\Diamond\Phi, \alpha) = \begin{cases} F, \text{ якщо } J_v(\Phi,\delta) = F \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ T, \text{ якщо існує } \delta \in S \text{ такий, що } \alpha \rhd \delta \text{ та } J_v(\Phi,\delta) = T, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Стандартні ТМС кванторного рівня будемо також скорочено записувати у вигляді $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, \boldsymbol{I})$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_{\alpha}$ – множина базових даних світу.

Стандартні ТМС пропозиційного рівня скорочено записуємо у вигляді $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$.

Як і у традиційних атлетичних модальних логіках, композиції $\Box$ і $\Diamond$ пов'язані такими співвідношеннями: $\neg\Diamond P = \Box\neg P$ та $\neg\Box P = \Diamond\neg P$.

Отже, для випадку загальних ТМС можна обмежитись єдиною базовою модальною композицією, наприклад $\Box$. Тоді $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

Теорема 2.1. *Для довільних* α *та* Φ *виконується* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$.

Припустимо супротивне: для деякого $d \in {}^{V}\!A_{\alpha}$ маємо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi)_{\alpha}(d)\downarrow$, $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\alpha}(d)\downarrow$, причому $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi)_{\alpha}(d) \neq (\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\alpha}(d)$.

Нехай $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi)_{\alpha}(d) = F$. Тоді $(\Box\Phi)_{\alpha} d\nabla v \mapsto d(x)) = F$, звідки для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $\Phi_{\beta}(d\nabla v \mapsto d(x)) = F$. Але із $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\alpha}(d) = T$ випливає, що для такого β необхідно $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\beta}(d) = T$, звідки $\Phi_{\beta}(d\nabla v \mapsto d(x)) = T$. Отримали суперечність.

Нехай тепер $(\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\alpha}(d) = F$. Тоді для деякого стану $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd \beta$, маємо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi)_{\beta}(d) = F$, звідки $\Phi_{\beta}(d\nabla v \mapsto d(x)) = F$. Але із $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi)_{\alpha}(d) = T$ випливає, що $(\Box\Phi)_{\alpha} d\nabla v \mapsto d(x)) = T$, тому для такого β необхідно $\Phi_{\beta}(d\nabla v \mapsto d(x)) = T$. Знову суперечність.

Наслідок 1. *Для довільних* α *та* Φ *виконується* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$.

Наслідок 2. *Для довільних* α *та* Φ *виконується* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ *та* $\alpha \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Diamond\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$.

Наслідок 3. *Для довільної загальної ТМС* $\boldsymbol{M}$ *маємо:* $\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ *та* $\boldsymbol{M} \models R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$.

Наслідок 4. *Формули* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Box\Phi \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ *та* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Diamond\Phi \leftrightarrow \Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ *усюди істинні.*

Таким чином, можна проносити символи реномінації через символи модальних композицій, що за умови нескінченності множини $\bigcap_{p \in Ps} \mu(p)$

тотально неістотних імен дає змогу перетворити формулу до класичноподібного вигляду, коли символи реномінації застосовуються тільки до символів базових предикатів.

Теорема 2.2. *Для довільної загальної ТМС* $\boldsymbol{M}$ *маємо:* $\boldsymbol{M} \models \Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\in{}^{V}\!A_{\alpha}$ маємо $(\Box\forall x\Phi)_{\alpha}(d)=T$ та $(\forall x\Box\Phi)_{\alpha}(d)=F$. Друга умова означає, що для деякого $a\in A_{\alpha}$ маємо $(\Box\Phi)_{\alpha}(d\nabla x\mapsto a)=F$, тому для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$, маємо $\Phi_{\beta}(d\nabla x\mapsto a)=F$. Із визначеності $\Phi_{\beta}(d\nabla x\mapsto a)$ випливає $d\nabla x\mapsto a\in{}^{V}\!A_{\beta}$, звідки $a\in A_{\beta}$. Але із $(\Box\forall x\Phi)_{\alpha}(d)=T$ випливає, що згідно з $\alpha\rhd\beta$ для стану β маємо $(\forall x\Phi)_{\beta}(d)=T$, звідки $\Phi_{\beta}(d\nabla x\mapsto b)=T$ для всіх $b\in A_{\beta}$. Позаяк $a\in A_{\beta}$, це вірно і для a, тому $\Phi_{\beta}(d\nabla x\mapsto a)=T$. Отримали суперечність.

Наслідок. *Формули* $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ *та* $\exists x\Diamond\Phi\to\Diamond\exists x\Phi$ *усюди істинні.*

Формула $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ – це конверсія формули $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$, відомої як *формула Баркан*. Таким чином, конверсія формули Баркан істинна в кожній загальній КМС. У той же час відомо [5], що формула Баркан спростовується на деяких реляційних моделях алетичної модальної логіки. Проте суперечності тут немає, адже ми розглядаємо *часткові* предикати. При $d\notin{}^{V}\!A_{\beta}$ ми вважаємо значення $\Phi_{\beta}(d)$ невизначеним, а в реляційній моделі традиційної алетичної модальної логіки таке значення вважається хибним.

Приклад 1. Формула Баркан $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ не є всюди істинною.

Побудуємо загальну ТМС, у якій спростовується $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$. Нехай $\boldsymbol{S}=\{\alpha,\ \beta\}$, де $A_{\alpha}=\{a\}$, $A_{\beta}=\{a, b\}$. Нехай $\boldsymbol{R}=\{\alpha\rhd\beta\}$. Нехай для ПС p неістотні усі імена, окрім x.

Задамо $p_{\alpha}([x\mapsto a])=T$, $p_{\beta}([x\mapsto a])=T$, $p_{\beta}([x\mapsto b])=F$. Тоді $\alpha\models\forall x\,p$, $\beta\not\models\forall x\,p$, звідки $\alpha\not\models\Box\forall x\,p$. Позаяк $A_{\alpha}=\{a\}$, умова $\alpha\models\forall x\Box p$ означає $(\Box p)_{\alpha}([x\mapsto a])=T$. Але $p_{\beta}([x\mapsto a])=T$ та $\alpha\rhd\beta$, тому $(\Box p)_{\alpha}([x\mapsto a])=T$. Отже, $\alpha\models\forall x\Box p$ та $\alpha\not\models\Box\forall x\,p$, звідки $\alpha\not\models\forall x\Box p\to\Box\forall x\,p$.

Звідси як наслідок отримуємо: формула $\Diamond\exists x\Phi\to\exists x\Diamond\Phi$ не є всюди істинною.

Залежно від умов, які накладаються на $\rhd$, можна визначати різні типи загальних ТМС. Обмежимось розглядом випадків, коли відношення $\rhd$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним.

Якщо $\rhd$ рефлексивне, то в назві ТМС пишемо символ R; якщо $\rhd$ транзитивне, то в назві ТМС пишемо символ T; якщо $\rhd$ симетричне, то в ТМС пишемо символ S. Тоді отримуємо такі системи: R-ТМС, T-ТМС, S-ТМС, RT-ТМС, RS-ТМС, TS-ТМС, RTS-ТМС.

Зауважимо, що R-ТМС подібні до класичної T-модельної структури, RS-ТМС – до B-модельної структури, *RT-ТМС* - до S4-модельної структури, RTS-ТМС - до S5-модельної структури.

3. Темпоральні композиційно-номінативні модальні логіки

Розглянемо тепер окремий, дуже важливий випадок транзиційних модальних логік - темпоральні, або часові модальні логіки.

СТМС із базовими модальними композиціями $\Box_{\uparrow}$ (завжди буде), $\Box_{\downarrow}$ (завжди було), $\Diamond_{\uparrow}$ (колись буде) і $\Diamond_{\downarrow}$ (колись було) називають *темпоральними* КНМС (скор. ТмМС).

Композиції $\Box_{\uparrow}$, $\Box_{\downarrow}$, $\Diamond_{\uparrow}$, $\Diamond_{\downarrow}$ називають базовими часовими композиціями.

Для темпоральних КНМС відображення інтерпретації ***Jm*** стосовно формул вигляду $\Box_{\uparrow}\Phi$, $\Box_{\downarrow}\Phi$, $\Diamond_{\uparrow}\Phi$, $\Diamond_{\downarrow}\Phi$ уточнимо таким чином.

Для кожних $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\in{}^{V}\!A_{\alpha}$ визначимо:

$$\boldsymbol{Jm}(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d)=$$
$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha\rhd\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Jm}(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d)=$$
$$=\begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta\rhd\alpha,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta\rhd\alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Jm}(\Diamond_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d)=$$
$$=\begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha\rhd\delta,\\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=T,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Jm}(\Diamond_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d)=$$
$$=\begin{cases} F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=F \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta\rhd\alpha,\\ T, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta\rhd\alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=T,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Композиції $\Box_{\uparrow}$, $\Box_{\downarrow}$, $\Diamond_{\uparrow}$, $\Diamond_{\downarrow}$ пов'язані такими самими співвідношеннями, як і в разі традиційної темпоральної логіки:

$$\neg\Diamond_{\uparrow}P=\Box_{\uparrow}\neg P; \qquad \neg\Diamond_{\downarrow}P=\Box_{\downarrow}\neg P;$$
$$\neg\Box_{\uparrow}P=\Diamond_{\uparrow}\neg P; \qquad \neg\Box_{\downarrow}P=\Diamond_{\downarrow}\neg P.$$

Таким чином, для темпоральних КНМС можна вважати базовими часові композиції $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$. Тоді композиції $\Diamond_{\uparrow}$ та $\Diamond_{\downarrow}$ є похідними часовими композиціями. Як і для випадку традиційної темпоральної логіки, вони визначаються через базові так:

$\Diamond_{\uparrow}P$ означає $\neg\Box_{\uparrow}\neg P$;

$\Diamond_{\downarrow}P$ означає $\neg\Box_{\downarrow}\neg P$.

Конкретизуючи введені поняття на різних рівнях абстракції, отримуємо ТмМС пропозиційного, реномінативного й кванторного рівнів.

Для ТмМС пропозиційного рівня при трактуванні станів світу як абстрактних елементів задаємо відображення інтерпретації атомарних формул як $I_v : Ps \times S \to \{T, F\}$. У цьому випадку відображення J_v стосовно формул вигляду $\Box_{\uparrow}\Phi$ та $\Box_{\downarrow}\Phi$ уточнимо так.

$$J_v(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha) = \\ = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_v(\Phi,\delta)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } J_v(\Phi,\delta)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$J_v(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha) = \\ = \begin{cases} T, \text{ якщо } J_v(\Phi,\delta)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \delta\rhd\alpha \text{ та } J_v(\Phi,\delta)=F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Теорема 3.1. *У випадку ТмМС для довільних* α *та* Φ *маємо:* $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$.

Наслідок 1. *У випадку ТмМС для довільних* α *та* Φ *маємо:* $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \Box_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\uparrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \diamond_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\alpha \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\downarrow}\Phi \Leftrightarrow \alpha \models \diamond_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$.

Наслідок 2. *Для довільної ТмМС* $\boldsymbol{M}$ *маємо:* $\boldsymbol{M} \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\boldsymbol{M} \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\boldsymbol{M} \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $\boldsymbol{M} \models R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$.

Наслідок 3. *Формули* $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Box_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \Box_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\uparrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\uparrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\diamond_{\downarrow}\Phi \leftrightarrow \diamond_{\downarrow} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\,\Phi$ *усюди істинні.*

Як і для випадку загальних ТМС, залежно від властивостей відношення $\rhd$ отримуємо відповідні класи ТмМС.

Якщо відношення $\rhd$ рефлексивне, то в назві темпоральної КНМС пишемо символ R; якщо $\rhd$ транзитивне, то пишемо T; якщо $\rhd$ симетричне, то пишемо S. Тоді отримуємо такі системи: R-ТмМС, T-ТмМС, S-ТмМС, RT-ТмМС, RS-ТмМС, TS-ТмМС, RTS-ТмМС.

4. Секвенційні числення композиційно-номінативних модальних і темпоральних логік

Аксіоматичні системи Ґенценівського типу для модальних логік називають модальними секвенційними численнями. Такі числення розглянуті, зокрема, в [6; 7].

Пропонований тут варіант модальних секвенційних числень тісно пов'язаний із реляційною семантикою композиційно-номінативних модальних логік (загальних ТМЛ та темпоральних КНМС).

Специфікацією стану назвемо слово вигляду α|- чи α–|, де α - *префікс стану світу.* У такому префіксі вказується стан світу, в якому розглядається специфікована формула. Окрім того, спеціальний символ * вказуватиме на довільний стан, пов'язаний із даним станом відношенням досяжності (уточнимо це залежно від виду модальної чи темпоральної логіки).

Стани світу іменуємо натуральними числами. Початковий стан світу позначаємо 0.

Секвенції в пропонованому варіанті числень збагачуємо збудованими на даний момент множиною $\boldsymbol{S}$ станів світу та множиною $\boldsymbol{R}$ відношень на S. Для логік пропозиційного рівня достатньо вказати множину $\boldsymbol{R}$, тому для пропозиційних логік збагачену секвенцію записуємо у вигляді $\Sigma\,/\!/\,\boldsymbol{M}$, де Σ - множина специфікованих формул, $\boldsymbol{M}$ - схема моделі світу, тобто збудоване на даний момент відношення досяжності, записане для імен станів.

Для логік номінативного рівня для кожного зі станів $\alpha\in\boldsymbol{S}$ треба вказати збудовану на даний момент множину його базових даних A_{α}. Тому для номінативних логік збагачена секвенція має вигляд $\Sigma\,/\!/\,St\,/\!/\,\boldsymbol{M}$, де St - збудована на даний момент множина імен станів із множинами їх базових даних.

Секвенційні форми збагачених секвенцій назвемо розширеними секвенційними формами. Для секвенційних числень КНМЛ будемо використовувати розширені форми.

4.1. Секвенційні числення загальних ТМЛ та ТмМЛ пропозиційного рівня

Форми $_{\vdash}\neg$, $_{\dashv}\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$ аналогічні відповідним формам секвенційних числень класичної логіки. Вони не змінюють префікси стану нових формул, що є предками основної формули, та схему моделі світу $\boldsymbol{M}$, яка на пропозиційному рівні визначається множиною $\boldsymbol{R}$.

$$\vdash\neg\ \frac{_{\alpha\dashv}A,\ \Sigma/\!/M}{_{\alpha\vdash}\neg A,\ \Sigma/\!/M} \qquad \dashv\neg\ \frac{_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma/\!/M}{_{\alpha\dashv}\neg A,\ \Sigma/\!/M}$$

$$\vdash\vee\ \frac{_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma/\!/M \quad _{\alpha\vdash}B,\ \Sigma/\!/M}{_{\alpha\vdash}A\vee B,\ \Sigma/\!/M} \qquad \dashv\vee\ \frac{_{\alpha\dashv}A,\ _{\alpha\dashv}B,\ \Sigma/\!/M}{_{\alpha\dashv}A\vee B,\ \Sigma/\!/M}$$

Новими для секвенційних числень транзиційних та темпоральних модальних логік є форми модалізації.

Числення загальних ТМЛ. Для випадку загальних ТМЛ секвенційні форми модалізації - це форми $_{\vdash}\Box$ та $_{\dashv}\Box$, якщо базовий модальний оператор – $\Box$, або форми $_{\vdash}\diamond$ та $_{\dashv}\diamond$, якщо базовий модальний оператор – $\diamond$.

Секвенційні форми $_{\vdash}\diamond$ та $_{\dashv}\diamond$ (форми $_{\vdash}\Box$ та $_{\dashv}\Box$) записуються по-різному залежно від властивостей відношення досяжності $\rhd$ на станах світу.

Наведемо декілька прикладів секвенційних числень загальних ТМЛ.

1. ***Загальний випадок.*** Якщо на $\rhd$ не накладено додаткові умови, то маємо:

$$_{\dashv}\Diamond\ \frac{_{\alpha*\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}A,\ \Sigma//M}{_{\alpha\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Тут $_{\alpha*\dashv}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується в даній секвенції через специфіковані формули $_{\beta_1\dashv}A$, ..., $_{\beta_n\dashv}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1$, ..., $\alpha\rhd\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу $_{\beta\dashv}A$.

$$_{\vdash}\Diamond\ \frac{_{\beta\vdash}A,\ _{\beta\dashv}B_1,\ \ldots,_{\beta\dashv}B_m,\ \Sigma//M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\vdash}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Тут β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду $_{\alpha*\dashv}B_i$, породжених формулами $_{\alpha\dashv}\Diamond B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули). Останнє означає, що при появі нового стану β, досяжного зі стану α, для допоміжних специфікованих формул вигляду $_{\alpha*\dashv}B_i$ треба записати нові конкретні специфіковані формули $_{\beta\dashv}B_i$.

Відповідні секвенційні форми для випадку базового модального оператора $\Box$:

$$_{\vdash}\Box\ \frac{_{\alpha*\vdash}A,\ _{\beta_1\vdash}A,\ \ldots,\ _{\beta_n\vdash}A,\ \Sigma//M}{_{\alpha\vdash}\Box A,\ \Sigma//M}.$$

$$_{\dashv}\Box\ \frac{_{\beta\dashv}A,\ _{\beta\vdash}B_1,\ \ldots,\ _{\beta\vdash}B_m,\ \Sigma//M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\dashv}\Box A,\ \Sigma//M}.$$

Тут $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду $_{\alpha*\vdash}B_i$, породжених формулами $_{\alpha\vdash}\Box B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули).

2. $\rhd$ ***симетричне.*** Отримуємо S-числення. У цьому випадку маємо:

$$_{\dashv}\Diamond\ \frac{_{*\alpha*\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}A,\ \Sigma//M}{_{\alpha\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Тут $_{*\alpha*\dashv}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується у даній секвенції через специфіковані формули $_{\beta_1\dashv}A$, ..., $_{\beta_n\dashv}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_i$ чи $\beta_i\rhd\alpha$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd\beta$ та $\beta\rhd\alpha$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу $_{\beta\dashv}A$.

$$_{\vdash}\Diamond\ \frac{_{\beta\vdash}A,\ _{\beta\dashv}B_1,\ \ldots,\ _{\beta\dashv}B_m,\ \Sigma//M\cup\{\alpha\rhd\beta,\ \beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha\vdash}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Тут враховуємо симетричність відношення $\rhd$.

3. $\rhd$ ***транзитивне та рефлексивне.*** Отримуємо RT-числення. Маємо:

$$_{\dashv}\Diamond\ \frac{_{\alpha*\dashv}A,\ _{\alpha\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}\lozenge A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}{_{\alpha\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Допоміжна специфікована формула $_{\alpha*\dashv}A$ конкретизується через специфіковані формули $_{\beta_1\dashv}A$, ..., $_{\beta_n\dashv}A$ та $_{\beta_1\dashv}\lozenge A$, ..., $_{\beta_n\dashv}\lozenge A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1$, ..., $\alpha\rhd\beta_n$. Специфіковані формули $_{\beta_1\dashv}\lozenge A$, ..., $_{\beta_n\dashv}\lozenge A$ тут необхідні внаслідок транзитивності $\rhd$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковані формули $_{\beta\dashv}A$ та $_{\beta\dashv}\lozenge A$. Згідно з рефлексивністю відношення $\rhd$ маємо $\alpha\rhd\alpha$, тому необхідно записати $_{\alpha\dashv}A$.

$$_{\vdash}\Diamond\ \frac{_{\beta\vdash}A,\ _{\beta\dashv}B_1,\ \ldots,\ _{\beta\dashv}B_m,\ _{\beta\dashv}\lozenge B_1,\ \ldots,\ _{\beta\dashv}\lozenge B_m,\ \Sigma//M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha\vdash}\lozenge A,\ \Sigma//M},$$

де β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду $_{\alpha*\dashv}B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули). Специфіковані формули $_{\beta\dashv}\lozenge B_i$ необхідні внаслідок транзитивності відношення $\rhd$.

4. $\rhd$ ***транзитивне, рефлексивне та симетричне.*** Отримуємо RTS-числення. Маємо:

$$_{\dashv}\Diamond\ \frac{_{*\alpha*\dashv}A,\ _{\alpha\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}A,\ _{\beta_1\dashv}\lozenge A,\ \ldots,\ _{\beta_n\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}{_{\alpha\dashv}\lozenge A,\ \Sigma//M}.$$

Тут допоміжна $_{*\alpha*\dashv}A$ конкретизується через $_{\beta_1\dashv}A$, ..., $_{\beta_n\dashv}A$ та $_{\beta_1\dashv}\lozenge A$, ..., $_{\beta_n\dashv}\lozenge A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_i$ чи $\beta_i\rhd\alpha$. Згідно з рефлексивністю відношення $\rhd$ необхідно записати $_{\alpha\dashv}A$.

$$_{\vdash}\Diamond\ \frac{_{\beta\vdash}A,\ _{\beta\dashv}B_1,\ \ldots,\ _{\beta\dashv}B_m,\ _{\beta\dashv}\lozenge B_1,\ \ldots,\ _{\beta\dashv}\lozenge B_m,\ \Sigma//M\cup\{\alpha\rhd\beta,\ \beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha\vdash}\lozenge A,\ \Sigma//M}$$

де β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду $_{*\alpha*\dashv}B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули).

Числення ТмМЛ. Для випадку ТмМЛ секвенційні форми модалізації – це форми $_{\vdash}\Diamond_{\uparrow}$, $_{\vdash}\Diamond_{\downarrow}$, $_{\dashv}\Diamond_{\uparrow}$, $_{\dashv}\Diamond_{\downarrow}$ (форми $_{\vdash}\Box_{\uparrow}$, $_{\vdash}\Box_{\downarrow}$, $_{\dashv}\Box_{\uparrow}$, $_{\dashv}\Box_{\downarrow}$, якщо базовими є $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$). Такі форми записуються порізному залежно від властивостей відношення досяжності $\rhd$ на станах світу. При цьому форми $_{\vdash}\Diamond_{\uparrow}$ та $_{\dashv}\Diamond_{\uparrow}$ ($_{\vdash}\Box_{\uparrow}$ та $_{\dashv}\Box_{\uparrow}$) ідентичні формам $_{\vdash}\Diamond$ та $_{\dashv}\Diamond$ ($_{\vdash}\Box$ та $_{\dashv}\Box$) відповідного секвенційного числення ТМЛ. Форми $_{\vdash}\Diamond_{\uparrow}$ і $_{\vdash}\Diamond_{\downarrow}$ відрізняються тільки врахуванням «напряму» відношення $\rhd$, те саме стосується форм $_{\dashv}\Diamond_{\uparrow}$ і $_{\dashv}\Diamond_{\downarrow}$ ($_{\vdash}\Box_{\uparrow}$ і $_{\vdash}\Box_{\downarrow}$ та $_{\dashv}\Box_{\uparrow}$ і $_{\dashv}\Box_{\downarrow}$).

Якщо відношення $\rhd$ симетричне, то маємо симетрію майбутнього та минулого, тому часові оператори $\Diamond_{\uparrow}$ та $\Diamond_{\downarrow}$ діють ідентично, аналогічно діють ідентично оператори $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$. Тому формально часові оператори $\Diamond_{\uparrow}$ та $\Diamond_{\downarrow}$ (відповідно $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$) можна вважати єдиним оператором $\Diamond$ (відповідно $\Box$). Фактично такі темпоральні секвенційні числення ідентичні відповідним секвенційним численням ТМЛ.

Наведемо два приклади темпоральних секвенційних числень.

1. *Загальний випадок.* Якщо на $\rhd$ не накладені додаткові умови, то маємо:

$$ {}_{\dashv}\diamondsuit_{\uparrow}\ \frac{{}_{\alpha*\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}A,\ \Sigma // M}{{}_{\alpha\dashv}\Diamond_{\uparrow}A,\ \Sigma // M}. $$

Допоміжна специфікована формула ${}_{\alpha*\dashv}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\dashv}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \dots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1, \dots, \alpha\rhd\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta\dashv}A$.

$$ {}_{\dashv}\diamondsuit_{\downarrow}\ \frac{{}_{*\alpha\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}A,\ \Sigma // M}{{}_{\alpha\dashv}\Diamond_{\downarrow}A,\ \Sigma // M}. $$

Допоміжна специфікована формула ${}_{*\alpha\dashv}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\dashv}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \dots, \beta_n$ таких, що $\beta_1\rhd\alpha, \dots, \beta_n\rhd\alpha$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\beta\rhd\alpha$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta\dashv}A$.

$$ {}_{\vdash}\diamondsuit_{\uparrow}\ \frac{{}_{\beta\vdash}A,\ {}_{\beta\dashv}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}B_m,\ \Sigma // M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{{}_{\alpha\vdash}\Diamond_{\uparrow}A,\ \Sigma // M}, $$

$$ {}_{\vdash}\diamondsuit_{\downarrow}\ \frac{{}_{\beta\vdash}A,\ {}_{\beta\dashv}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}B_m,\ \Sigma // M\cup\{\beta\rhd\alpha\}}{{}_{\alpha\vdash}\Diamond_{\downarrow}A,\ \Sigma // M}, $$

де β – новий стан світу, $B_1, \dots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\dashv}B_i$ для форми ${}_{\vdash}\diamondsuit_{\uparrow}$ чи вигляду ${}_{*\alpha\dashv}B_i$ для форми ${}_{\vdash}\diamondsuit_{\downarrow}$ (якщо секвенція Σ містить такі формули).

2. $\rhd$ *транзитивне та рефлексивне.* Отримуємо темпоральне RT-числення. Маємо:

$$ {}_{\dashv}\diamondsuit_{\uparrow}\ \frac{{}_{\alpha*\dashv}A,\ {}_{\alpha\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}\Diamond_{\uparrow}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}\Diamond_{\uparrow}A,\ \Sigma // M}{{}_{\alpha\dashv}\Diamond_{\uparrow}A,\ \Sigma // M}. $$

Допоміжна специфікована формула ${}_{\alpha*\dashv}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\dashv}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}A$ та ${}_{\beta_1\dashv}\Diamond_{\uparrow}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}\Diamond_{\uparrow}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \dots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1, \dots, \alpha\rhd\beta_n$. Внаслідок рефлексивності відношення $\rhd$ тут записана ${}_{\alpha\dashv}A$.

$$ {}_{\dashv}\diamondsuit_{\downarrow}\ \frac{{}_{*\alpha\dashv}A,\ {}_{\alpha\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}A,\ {}_{\beta_1\dashv}\Diamond_{\downarrow}A,\ \dots,\ {}_{\beta_n\dashv}\Diamond_{\downarrow}A,\ \Sigma // M}{{}_{\alpha\dashv}\Diamond_{\downarrow}A,\ \Sigma // M}. $$

Допоміжна специфікована формула ${}_{*\alpha\dashv}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\dashv}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}A$ та ${}_{\beta_1\dashv}\Diamond_{\downarrow}A, \dots, {}_{\beta_n\dashv}\Diamond_{\downarrow}A$ для всіх наявних у даний момент станів $\beta_1, \dots, \beta_n$ таких, що $\beta_1\rhd\alpha, \dots, \beta_n\rhd\alpha$. Внаслідок рефлексивності відношення $\rhd$ тут записана ${}_{\alpha\dashv}A$.

$$ {}_{\vdash}\diamondsuit_{\uparrow}\ \frac{{}_{\beta\vdash}A,\ {}_{\beta\dashv}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}B_m,\ {}_{\beta\dashv}\Diamond_{\uparrow}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}\Diamond_{\uparrow}B_m,\ \Sigma // M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{{}_{\alpha\vdash}\Diamond_{\uparrow}A,\ \Sigma // M}, $$

де β – новий стан світу, $B_1, \dots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\dashv}B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули).

$$ {}_{\vdash}\diamondsuit_{\downarrow}\ \frac{{}_{\beta\vdash}A,\ {}_{\beta\dashv}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}B_m,\ {}_{\beta\dashv}\Diamond_{\downarrow}B_1,\ \dots,\ {}_{\beta\dashv}\Diamond_{\downarrow}B_m,\ \Sigma // M\cup\{\beta\rhd\alpha\}}{{}_{\alpha\vdash}\Diamond_{\downarrow}A,\ \Sigma // M}, $$

де β – новий стан світу, $B_1, \dots, B_m$ – усі формули, що фігурують у допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{*\alpha\dashv}B_i$ (якщо секвенція Σ містить такі формули).

Процедура побудови секвенційного дерева для пропозиційних числень загальних ТМЛ та ТмМЛ в основному аналогічна відповідній процедурі для пропозиційних секвенційних числень [4], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схеми моделей світу. Схема моделей світу оновлюється при використанні форми типу ${}_{\dashv}\Box$ (чи типу ${}_{\vdash}\diamondsuit$), яка додає нові стани.

Побудова секвенційного дерева розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. При цьому спочатку виконуємо форми типу ${}_{\dashv}\Box$ (чи типу ${}_{\vdash}\diamondsuit$), які додають нові стани.

4.2. Секвенційні числення загальних ТМЛ та ТмМЛ кванторного рівня

Секвенційні форми для числень КНМЛ номінативних рівнів повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу. На кванторному рівні це форма ${}_{\vdash}\exists$ (в окремих випадках, можливо, також форми ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$). Тому для числень логік номінативного рівня для кожного зі станів $\alpha\in\boldsymbol{S}$ треба вказувати збудовану на даний момент множину його базових даних A_{α}. Збагачену секвенцію для випадку числень номінативних рівнів записуємо у вигляді $\Sigma // \alpha\{A_{\alpha}\}, \beta\{A_{\beta}\}, \dots // M$, де Σ – множина специфікованих формул, $\alpha\{A_{\alpha}\}, \beta\{A_{\beta}\}, \dots$ – збудовані на даний момент стани із множинами базових даних, M – схема моделі світу на цей момент. Вживатимемо також скорочений запис $\Sigma // St // M$.

Секвенційні форми ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}\mathbf{RT}$, ${}_{\dashv}\mathbf{RT}$, ${}_{\vdash}\mathbf{RR}$, ${}_{\dashv}\mathbf{RT}$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\neg$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\neg$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\vee$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\vee$, ${}_{\vdash}\Phi\mathbf{N}$, ${}_{\dashv}\Phi\mathbf{N}$ для числень КНМЛ реномінативного рівня подібні до відповідних секвенційних форм реномінативних неокласичних числень [4]. Вони не змінюють множини базових даних станів і схему моделі світу. До таких секвенційних форм додаються форми ${}_{\vdash}\mathbf{R}$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}$ чи ${}_{\vdash}\mathbf{R}\diamondsuit$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}\diamondsuit$, а також форми відповідного типу для модальних операторів. Для загальних ТМЛ це форми ${}_{\vdash}\Box$ та ${}_{\dashv}\Box$, якщо базовий модальний оператор – $\Box$, або форми ${}_{\vdash}\diamondsuit$ та ${}_{\dashv}\diamondsuit$, якщо базовий модальний оператор – $\diamondsuit$. Для ТмМЛ це форми ${}_{\vdash}\Box_{\uparrow}$, ${}_{\vdash}\Box_{\downarrow}$ та ${}_{\dashv}\Box_{\uparrow}$, ${}_{\dashv}\Box_{\downarrow}$, якщо базові темпоральні оператори – $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$, або форми ${}_{\vdash}\diamondsuit_{\uparrow}$, ${}_{\vdash}\diamondsuit_{\downarrow}$ та ${}_{\dashv}\diamondsuit_{\uparrow}$, ${}_{\dashv}\diamondsuit_{\downarrow}$, якщо базові темпоральні оператори – $\diamondsuit_{\uparrow}$ та $\diamondsuit_{\downarrow}$.

Секвенційні форми для числень кванторного рівня утворюємо додаванням форм ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\exists$ до зазначених вище форм реномінативного рівня. Вони не змінюють схему моделі світу M, але форми ${}_{\vdash}\exists$ (в окремих випадках, можливо, також форми ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$) змінюють стани.

Наведемо для прикладу секвенційні форми ${}_{\vdash}\mathbf{R}$✧, ${}_{\dashv}\mathbf{R}$✧ та ${}_{\vdash}\exists$:

$${}_{\vdash}\mathbf{R}✧ \quad \frac{{}_{\alpha\vdash}\Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma\,//\,St\,//\,M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Diamond A), \Sigma\,//\,St\,//\,M}.$$

$${}_{\dashv}\mathbf{R}✧ \quad \frac{{}_{\alpha\dashv}\Diamond R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma\,//\,St\,//\,M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Diamond A), \Sigma\,//\,St\,//\,M}$$

$${}_{\vdash}\exists \quad \frac{{}_{\alpha\vdash}R_{y}^{x}(A), \Sigma\,//\,St'\,//\,M}{{}_{\alpha\vdash}\exists xA, \Sigma\,//\,St\,//\,M}$$

Для форми ${}_{\vdash}\exists$ така умова: y тотально неістотне та $y\notin nm(\Sigma, A)$. При цьому до носія A_{α} стану α додається новий елемент y.

Процедура побудови секвенційного дерева для числень загальних ТМЛ та ТмМЛ кванторного рівня в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень КНМЛ [4], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схеми моделей світу. Схема моделей світу оновлюється при використанні форми типу ${}_{\dashv}\Box$ (чи типу ${}_{\vdash}$✧), яка додає нові стани. Побудова дерева розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Спочатку виконуємо форми типу ${}_{\dashv}\Box$ (чи типу ${}_{\vdash}$✧), які додають нові стани. Потім виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми, після цього – всі $\mathbf{R}\exists\exists$-форми, далі – всі інші секвенційні форми.

4.3. Коректність і повнота секвенційних числень загальних ТМЛ та ТмМЛ

Розглядаємо тут випадок загальних ТМЛ та ТмМЛ пропозиційного рівня.

Нехай Γ та Δ – множини специфікованих станами формул, тобто формул вигляду Φ^{α}, де $\alpha\in S$ – певній множині, яку трактуємо як множину імен станів.

Скажемо, що в КНМС $\boldsymbol{M} = ((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), FPm, \boldsymbol{Jm})$ із Γ випливає Δ, або Δ є логічним наслідком Γ в КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо із того, що $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)=T$ для всіх $\Phi^{\alpha}\in\Gamma$, випливає, що неможливо $\boldsymbol{Jm}(\Psi, \beta)=F$ для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$. Цей факт позначаємо $\Gamma\models_{M}\Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ відносно узгоджених з ними КНМС певного типу (узгодженість означає, що множина станів узгоджена з множиною специфікацій формул із $\Gamma\cup\Delta$, тобто задана ін'єкція S у $\boldsymbol{S}$), якщо $\Gamma\models_{M}\Delta$ для кожної такої КНМС $\boldsymbol{M}$.

Те, що Δ є логічним наслідком Γ, позначаємо $\Gamma\models\Delta$.

Отже, $\Gamma\not\models\Delta \Leftrightarrow$ існує узгоджена КНМС $\boldsymbol{M}$ така, що для всіх $\Phi^{\alpha}\in\Gamma$ маємо $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)=T$ та для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$ маємо $\boldsymbol{Jm}(\Psi, \beta)=F$.

Наведемо властивості відношення логічного наслідку для множин формул на пропозиційному рівні. У першу чергу це властивості, успадковані від традиційної логіки.

Для кожної узгодженої КНМС $\boldsymbol{M}$ якщо $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\Gamma\models_{M}\Delta$.

Для кожної узгодженої КНМС $\boldsymbol{M}$ маємо:

П1) $\neg\Phi^{\alpha}, \Gamma\models_{M}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\models_{M}\Delta, \Phi^{\alpha}$.

П2) $\Gamma\models_{M}\Delta, \neg\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma\models_{M}\Delta$.

П3) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \Gamma\models_{M}\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma\models_{M}\Delta$ та $\Psi^{\alpha}, \Gamma\models_{M}\Delta$.

П4) $\Gamma\models_{M}\Delta, \Phi\vee\Psi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\models_{M}\Delta, \Phi^{\alpha}, \Psi^{\alpha}$.

У разі загальних ТМЛ для модального оператора $\Box$ маємо:

1) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma\models\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\beta}, \Gamma\models\Delta$ для всіх станів β таких, що $\alpha\triangleright\beta$.

2) $\Gamma\models\Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\models\Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\triangleright\beta$.

У разі темпоральних КНМЛ 1 та 2 розщеплюються на ${}_{\uparrow}1$ і ${}_{\downarrow}1$ та ${}_{\uparrow}2$ і ${}_{\downarrow}2$.

Наведемо теорему коректності для секвенційних числень КНМЛ.

Теорема 4.1. *Нехай секвенція* ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma\models\Delta$.

Теорема доводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень композиційно-номінативних модальних логік використаємо метод систем модельних множин.

Розглянемо випадок загальних транзиційних КНМЛ пропозиційного рівня.

Система модельних множин – це пара (Ω, M), де $\Omega = \{\boldsymbol{H}_{\alpha} \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}$, M – схема моделі світу (відношення $\boldsymbol{R}$, записане для імен світів), $\boldsymbol{H}_{\alpha}$ – модельна множина стану α.

Модельна множина стану $\boldsymbol{H}_{\alpha}$ – це множина специфікованих формул, для якої виконуються такі умови.

1) Для кожної атомарної Φ лише одна з формул ${}_{\vdash}\Phi$ чи ${}_{\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

2) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

3) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ або ${}_{\alpha\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ та ${}_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

4) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для всіх станів $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\triangleright\beta$ (тобто $\alpha\triangleright\beta\in M$);

якщо ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\triangleright\beta$ (тобто $\alpha\triangleright\beta\in M$).

Якщо процедура побудови секвенційного дерева завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершується негативно або не завершується, то маємо незамкнене дерево. В такому дереві існує незамкнений скінченний чи нескінченний шлях $\Sigma=\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$, всі його вершини – незамкнені секвенції.

Теорема 4.2. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві.* H_α *– множина всіх специфікованих* $_{\alpha\vdash}$ *чи* $_{\alpha\dashv}$ *формул секвенції цього шляху, де* $\alpha \in S$, M *– схема моделі світу. Тоді* $\mathbf{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$ *– система модельних множин.*

Теорема 4.3. *Нехай* $\mathbf{H}_M$ *– система модельних множин. Тоді існує істиннісна оцінка* $Jm : Fpm \times S \to \{T, F\}$ *така, що:*

1) *з умови* $_{\alpha\vdash}\Phi \in H_\alpha$ *випливає* $J_\nu(\Phi, \alpha) = T$;
2) *з умови* $_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha$ *випливає* $J_\nu(\Phi, \alpha) = F$.

Доводимо для випадку загальних транзиційних КНМЛ. Доведення проводиться індукцією за складністю формули згідно з побудовою системи модельних множин.

Для атомарних формул (пропозиційних змінних) покладемо:

– якщо $_{\alpha\vdash}A \in H_\alpha$, то $J_\nu(A, \alpha) = T$;
– якщо $_{\alpha\dashv}A \in H_\alpha$, то $J_\nu(A, \alpha) = F$.

Для всіх інших пропозиційних змінних Jm можна задати довільно.

Нехай $_{\alpha\vdash}\neg\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \alpha) = F$, звідки $J_\nu(\neg\Phi, \alpha) = T$.

Нехай $_{\alpha\dashv}\neg\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\alpha\vdash}\Phi \in H_\alpha$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \alpha) = T$, звідки $J_\nu(\neg\Phi, \alpha) = F$.

Нехай $_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\alpha\vdash}\Phi \in H$ або $_{\alpha\vdash}\Psi \in H$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \alpha) = T$ або $J_\nu(\Psi, \alpha) = T$, звідки $J_\nu(\Phi\vee\Psi, \alpha) = T$.

Нехай $_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha$ та $_{\alpha\dashv}\Psi \in H_\alpha$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \alpha) = F$ та $J_\nu(\Psi, \alpha) = F$, звідки $J_\nu(\Phi\vee\Psi, \alpha) = F$.

Нехай $_{\alpha\vdash}\Box\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\beta\vdash}\Phi \in H_\beta$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \beta) = T$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd \beta$, звідки $J_\nu(\Box\Phi, \alpha) = T$.

Нехай $_{\alpha\dashv}\Box\Phi \in H_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо $_{\beta\dashv}\Phi \in H_\beta$ для деякого стану β такого, що $\alpha \rhd \beta$. За припущенням індукції $J_\nu(\Phi, \beta) = F$, звідки $J_\nu(\Box\Phi, \alpha) = F$.

Звідси отримуємо теорему повноти секвенційних числень КНМЛ.

Теорема 4.4. *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $_\vdash\Gamma_\dashv\Delta$ *вивідна.*

Доводимо для випадку загальних транзиційних КНМЛ.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ (тобто $\Gamma \models_M \Delta$ для кожної узгодженої КНМС M) та секвенція $_\vdash\Gamma_\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = {}_\vdash\Gamma_\dashv\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Тоді $\mathbf{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$ – система модельних множин. Згідно з теоремою 4.3 існує істиннісна оцінка $J_\nu : Fpm \times S \to \{T, F\}$ така: $_{\alpha\vdash}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow J_\nu(\Phi, \alpha) = T$ та $_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow J_\nu(\Phi, \alpha) = F$. Зокрема це справджується для формул секвенції Σ. Тому для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $J_\nu(\Phi, \alpha) = T$ та для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $J_\nu(\Psi, \alpha) = F$. Це заперечує $\Gamma \models_M \Delta$.

Висновки

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем у роботі розглянуто композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки. Запропоновано спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи для логік реномінативного та кванторного рівнів. Досліджено семантичні властивості транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік. Для таких логік збудовано числення секвенційного типу.

Дослідження секвенційних числень транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік номінативних рівнів буде продовжено в наступних статтях.

1. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем // Проблеми програмування. - 2007. - № 2. - С. 15-40.
2. *Никитченко Н. С.* Предикатные композиционно-номинативные системы // Проблемы программирования. - 1999. - № 2. - С. 3-19.
3. *НікітченкоМ. С., Шкільняк С. С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Проблемы программирования. - 2002. - № 1-2. - С. 27-33.
4. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Основи математичної логіки. - К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. - 246 с.
5. Семантика модальных и интенсиональных логик. - М.: Прогресс, 1981. - 494 с.
6. *Фейс Р.* Модальная логика. - М.: Наука, 1974. - 520 с.
7. *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. - Новосибирск: НГУ 2000. - 521 с.

O. Shkilnyak

COMPOSITION NOMINATIVE MODAL AND TEMPORAL LOGICS: SEMANTIC PROPERTIES, SEQUENT CALCULI

On the basis of integrated intensional-extensional approach to construction of logical and program systems composition nominative modal and temporal logics are studied. A special refinement of the notion of a composition nominative modal system for logics of renominative and quantifier levels is proposed. Semantic properties of composition nominative transitional and temporal logics are investigated. For such logics sequent calculi are constructed.