

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра математики

«Застосування Гіббсовських полей у відновленні зображень»

Текстова частина до курсової роботи

за напрямом підготовки 124 «Системний аналіз»

Керівник курсової роботи
к.ф.-м. н., доц. Чорней Р. К.

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала студентка Ровнік В.К.

“ ____ ” _____ 2020 р.

Київ 2020

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1: Обробка зображень: загальний огляд задач.....	7
Можливі сфери застосувань.....	7
РОЗДІЛ 2: Байєсівський підхід в обробці зображень.....	9
Алгоритми семплування.....	9
Формальне визначення підходу байєсівського моделювання.....	10
Модель марковського випадкового поля.....	11
Бінарні моделі для представлення зображень.....	16
Модель Ізінга.....	19
Модель Ізінга в алгоритмі Метрополіса.....	22
Модель Ізінга в семплуванні Гіббса.....	24
Зашумлені зображення і апостеріорний розподіл.....	25
Гауссівський адитивний шум.....	25
Алгоритм Метрополіса для моделі Ізінга з шумом.....	28
РОЗДІЛ 3. Результати реалізації алгоритму Гіббса та Метрополіса.....	29
Опис програмного модулю.....	29
Приклади результатів симуляцій розподілів зображень.....	31
ВИСНОВКИ.....	33
ЛІТЕРАТУРА.....	34

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Доцент

Чорней Р.К.

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

Студентці Ровнік В.К. факультету інформатики 1 курсу магістратури

ТЕМА «Застосування Гіббсовських полей у відновленні зображень» Вихідні дані:

1. Winkler, Gerhard. Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods.

Дата видачі “ ____ ” _____ 2020 р. Керівник Чорней Р.К.

Завдання отримала _____

ТЕМА: «Застосування Гіббсовських полей у відновленні зображень»

Календарний план виконання роботи:

№	Назва етапу курсового проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу	20.01. 2020	
2.	Огляд наукової літератури за темою роботи	02.02. 2020	
3.	Аналіз прочитаної літератури та написання текстової частини	07.03. 2020	
4.	Розробка алгоритму	15.03. 2020	
5.	Програмування розробленого алгоритму	28.03. 2020	
6.	Написання пояснювальної роботи	15.04. 2020	
7.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді	10.05. 2020	
8.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів	11.05.2020	
9.	Захист курсової роботи	18.05.2020	

Студент Ровнік В.К. _____

Керівник Чорней Р.К. _____ “ _____ ” _____ 2020 р.

ВСТУП

Актуальність теми

Цифрові зображення є невід’ємною частиною багатьох застосувань, таких як супутникове телебачення, магнітно-резонансна томографія, комп’ютерна томографія та інші сфери технологічних досліджень, такі як системи географічної інформації та астрономії. Дані зібрані датчиками зображення нерідко є зіпсовані стороннім шумом. Існує багато джерел шуму: несправне устаткування, проблеми, що виникають в процесі отримання даних, втручання різних природних явищ. Також шум може з’явитись через помилки передачі інформації та стиснення. [11] Тому, відновлення зображення від шуму є **актуальною задачею** і першим кроком перед аналізом самого зображення.

Відновлення зображень від шуму є фундаментальною задачею в обробці зображень, тому постає необхідність для знаходження ефективних технік для її вирішення. Основними підходами до задачі відновлення зашумлених зображень є **просторові** та **частотні**. В даній роботі увага приділяється статистичним методам, які є підмножиною частотних.

Метою даного дослідження є висвітлення байєсівських підходів до задач обробки зображень та відновлення зашумлених зображень за допомогою чисельних симуляцій алгоритмів Метрополіса та семплера Гіббса.

Об’єктом дослідження є чорно-білі зображення, представлені за допомогою моделі Ізінга.

Предметом дослідження є алгоритми для знаходження апостеріорного гіббсовського розподілу для зашумлених зображень.

Загальний підхід для вирішення задачі відновлення зашумленого зображення використаний в даній роботі можна описати наступною послідовністю кроків:

1. Проаналізувати найкращі моделі представлення зображення відповідно до контексту задачі
2. Обрати метод для відновлення зашумленого зображення
3. Розробити алгоритм для відновлення зашумленого зображення
4. Провести низку чисельних симуляцій за різних параметрів алгоритму для знаходження такого, який надає найкращі результати. Оцінку якості алгоритмів можна проводити за допомогою різних метрик оцінки якості вихідних зображень.

РОЗДІЛ 1: Обробка зображень: загальний огляд задач

Задачі обробки зображень поділяються на два основні типи [4]:

1. *Низькорівневі* - такі, що включають в себе спроби покращити якість зображення за допомогою локальних дій (деконволюція або прибирання шуму зображення).
2. *Високорівневі* - такі, що враховують більш глобальні властивості зображень, такі як ідентифікація і знаходження об'єктів.

Спільною рисою різних задач з обробки зображень є те, що вони зазвичай можуть бути представлені у вигляді композиції функції від зображення та шуму:

$$\text{Сигнал} = f(\text{Зображення}) \otimes \text{Шум} \quad (1)$$

де $\otimes$ - деякий оператор комбінування, f — функція, яка позначає те, що сигнал приходить у деякому вигляді, відмінному від оригінального зображення.

В даній роботі буде досліджене вирішення саме низькорівневої задачі, якою є відновлення зображень від шуму.

Можливі сфери застосувань

Сфери застосувань задач обробки зображень з розвитком технологій постійно розширюється. Одним із найбільш перспективних і соціально значущих застосувань є медична сфера.

Одним із прикладів задач, які виникають в медичному контексті, є отримання зображень за допомогою ПЕТ - позитронно-емісійної томографії. Як відомо, даний метод вимагає використання радіоактивних речовин, тому при таких

дослідженнях пацієнти зазнають впливу певного рівня опромінення. Перед тими, хто проводить дослідження, постає такий вибір:

1. Збільшити кількість опромінення
2. Зменшити вплив радіації

Перший сценарій передбачає покращення якості зображення, але має негативну дію на організм людини. Вибір другого сценарію, більш сприятливий для здоров'я людини, накладає певні обмеження на досягнення високої якості зображення. Необхідність такого компромісу може бути усунена завдяки застосуванню сучасних методів для обробки зображень, наприклад, для відновлення від розмиття (blurring) або шуму.

Медична сфера - це лише одна з областей застосування, в яких виникають подібні задачі. Але на думку автора даної роботи, саме ця предметна область може отримати найбільше переваг від застосування ефективних алгоритмів та технік. В контексті позитронно-емісійної томографії, дані алгоритми дозволили б лікарям працювати із зображеннями покращеної якості, а пацієнтам - отримувати менше шкідливого впливу на свій організм.

Також задача відновлення від шуму виникає при отримання зображення за допомогою ультразвуку. Найпоширеніший тип шуму, який виникає в цьому випадку, є так званий speckle noise.

РОЗДІЛ 2: Байєсівський підхід в обробці зображень

Надалі розглянемо, якою є роль байєсівської статистики в аналізі та обробці зображень. Але спочатку означимо її загальну мету та методи.

Як відомо з курсу теорії ймовірності, *метою байєсівського виводу є знаходження повного апостеріорного розподілу певної множини випадкових величин*. В контексті обробки зображень, апостеріорний розподіл узагальнює знання про справжнє зображення на основі апріорного знання та спостережуваних даних. Тому, якщо ми можемо надати вибірки з апостеріорного розподілу, вони можуть бути використані для статистичного виведення про справжнє зображення.

Однак, отримання такого розподілу часто вимагає обчислення інтегралів, які для нетривіальних моделей часто є складно обчислювані. Саме тому в таких випадках звертаються до *методів Монте-Карло з марковськими ланцюгами* (в англomовній науковій літературі зустрічається аббревіатура МСМС на позначення цього сімейства методів), які дозволяють *змодельовати невідомий ймовірнісний розподіл*. Такий розподіл генерується за допомогою ергодичних ланцюгів Маркова, для яких шуканий розподіл є *стаціонарним*.

Як відомо, за допомогою марковського ланцюга можна представити фізичну систему, яка описується еволюцією стану і задовольняє локальну характеристику. Далі буде розглянуто, що собою являє модель *марковського поля* і її роль в байєсівському підході та методах Монте-Карло, які використовуються для *семплування розподілу*.

Алгоритми семплування

Базовою ідеєю *алгоритмів семплування* є апроксимація певного складно обчислюваного інтегралу або суми за допомогою здійснення вибірок з

певного розподілу. Іншими словами, *семплування* – це пошук граничного розподілу.

Ідея семплування Монте-Карло з марковськими ланцюгами полягає в тому, що є можливою оцінка будь-якого математичного сподівання за допомогою ергодичних середніх. Тобто, можна обчислити будь-яку статистику апостеріорного розподілу, якщо в нас є N вибірок з цього розподілу, знайдених за допомогою симуляції:

$$E[f(s)]_P \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(s^{(i)}) \quad (2)$$

де P – шуканий апостеріорний розподіл, $f(s)$ – цільове математичне сподівання, $s^{(i)}$ – i – та симульована вибірка з розподілу P .

В алгоритмах обробки зображень за допомогою байєсівського підходу існують *три основні задачі*:

1. Адекватне моделювання структури шуму
2. Регуляризація недостатньо визначених систем за допомогою використання апіорного розподілу
3. Можливість надавати впевненість щодо результатів

Формальне визначення підходу байєсівського моделювання

Нехай $\mathbf{x}$ – деяке зображення, $\mathbf{y}$ – відповідний йому сигнал (певним чином спотворений). Найчастіше $\mathbf{y}$ представляють у вигляді *ґратки дискретних значень*, а індивідуальні компоненти $\mathbf{y}$ називають пікселями.

Теорема Байєса дозволяє записати умовний розподіл наступним чином:

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{y})} \propto \pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) \quad (3)$$

де $\pi(x|y)$ — функція правдоподібності, яка описує процес формування даних для окремого оригінального зображення, $\pi(x)$ — апіорна ймовірність, яка позначає будь-які апіорні знання про властивості оригінального зображення.

Маргінальний розподіл $\pi(y)$ є недостатньо інформативним відносно цільового зображення x . Оскільки, перш за все, нас цікавить можливість робити висновки про x на основі апостеріорного розподілу $\pi(x|y)$. Для цього необхідно визначити різні компоненти моделі. По-перше, необхідно вирішити, яке представлення для x є придатним. Це залежить від того, яка є мета обробки зображення. Далі необхідно прийняти рішення щодо відповідних апіорних та апостеріорних моделей. Розглянемо деякі можливості моделювання.

Модель марковського випадкового поля

Почнемо з моделей, в яких x та y можна представити як набір значень пікселів.

Нехай I - скінченна множина вузлів або пікселів зображення. Кожне значення $i \in I$ є координатою на ґратці. Для того, щоб визначити модель, яка базується на пікселях, необхідно звернутись до класу *марковських випадкових полей*.

Почнемо з введення *симетричного* відношення сусідства $\sim$, визначеного на I , яке задається наступним чином:

1. Якщо i є сусідом j (це записується як $i \sim j$), тоді j є сусідом i .
2. Вважається, що i не є сусідом самого себе, тобто відношення не є рефлексивним.

Означення. Випадкове поле - це набір випадкових змінних $\{x_i: i \in I\}$, в якому кожна змінна x_i приймає значення на скінченній множині X . Позначатимемо множину сусідів вузла i як ∂i . Для підмножини вузлів $A \subseteq I$ використовуватимемо позначення $x_A = \{x_i: i \in A\}$ та $x_{-A} = \{x_i: i \in I \setminus A\}$.

Означення. Конфігурація $\mathbf{x}$ – це елемент з $X^{|I|}$.

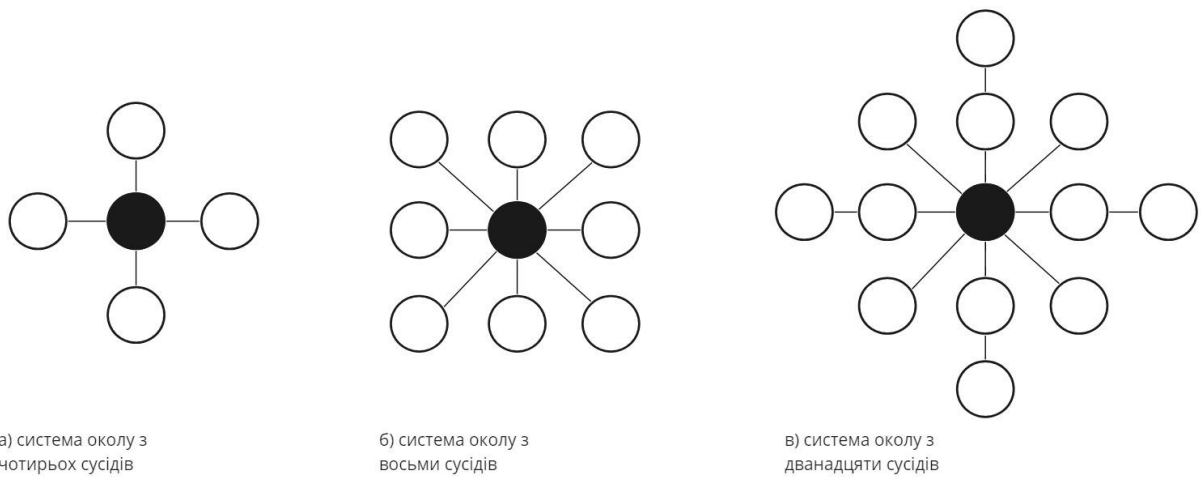
Означення. Клікою C називається така множина вузлів, що якщо $x_i, x_j \in C$, тоді x_j належить околу x_i ($x_j \in \partial i$), і, так само, x_i належить околу x_j ($x_i \in \partial j$).

Означення. Випадкове поле є **марковським**, якщо умовний розподіл довільного пікселя за умови наявності інших пікселів залежить тільки від значень своїх сусідніх пікселів, тобто:

$$\pi(x_i | \mathbf{x}_{-i}) = \pi(x_i | \mathbf{x}_{\partial i}) \quad (4)$$

Умова (4) називається *локальною характеристикою* випадкового поля.

Найпоширеніші структури систем околу в обробці зображень складаються з чотирьох, восьми або дванадцяти найближчих сусідів:



miro

Рис. 1.

Найбільш використовувана система околів складається з чотирьох сусідів. В симуляціях даної роботи використовується система з восьми сусідів, враховуючи діагональні елементи.

Найбільш використовувана система околів складається з чотирьох сусідів (рис. 1.б). В експериментальній частині даної роботи використовується система з восьми сусідів, яка враховує діагональні елементи.

Марковські випадкові поля є важливими в роботі із зображеннями завдяки двом основним причинам:

1. Моделювання сумісного розподілу зображення x на решітці I є складним завданням, оскільки не відразу зрозуміло, з чого варто розпочинати це робити. Підхід до проблеми за допомогою повних умовних ймовірностей розбиває дану задачу на більш керовані

підзадачі, в тому значенні, що ми можемо припустити, як веде себе піксель x_i , якщо ми знаємо конфігурації його сусідів.

2. Існує важливий зв'язок між *методами Монте-Карло на марковських ланцюгах* та *марковськими випадковими полями*, який полягає в тому, що повузлові схеми оновлення в методах Монте-Карло вимагають обчислення *лише локальних повних умовних ймовірностей* (4). Якщо припустити, що кількість сусідів є значно меншою ніж $n = |I|$, що має місце в більшості застосувань, то повне проходження зображенням використовуючи, наприклад, семпсування Гіббса вимагає $O(n)$ операцій для марковського випадкового поля, на противагу до $O(n^2)$ операцій для випадкового поля, яке не задовольняє дану локальну властивість.

Але в підході до моделювання задачі через систему околів та повні умовні ймовірності для кожного вузла виникає наступне питання:

Маючи набір локальних характеристик, за яких умов гарантовано, що граничний сумісний розподіл існує? Чи є він унікальним і як його знайти? На це питання дає відповідь теорема Гаммерслі-Кліффорда [4], яка стверджує, що множина повних умовних ймовірностей визначає щільність сумісного розподілу тоді і тільки тоді, коли їхня сумісна щільність має вигляд певної форми.

Теорема Гаммерслі-Кліффорда

Розподіл, який задовольняє $\pi(x) > 0$ для всіх конфігурацій з $X^{|I|}$ є марковським випадковим полем *тоді і тільки тоді*, коли його сумісну щільність розподілу можна виразити наступним чином:

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(-\sum_{c \in C} \Phi_c(\mathbf{x}_c)) \quad (5)$$

для деяких функцій $\{\Phi_c\}$, де C - множина всіх клік (нагадаємо, що *кліка* - це підмножина вузлів, де кожна пара цих вузлів є сусідами) і Z - нормалізуючий множник вигляду:

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} \exp(-\sum_{c \in C} \Phi_c(\mathbf{x}_c)) < \infty \quad (6)$$

Такий розподіл (5) називається **розподілом Гіббса**.

Теорему зручно використовувати як мінімум у двох випадках:

1. Для підтвердження, що набір повних умовних ймовірностей (тобто розподілу однієї компоненти за умови всіх інших) є валідною щільністю сумісного розподілу, якщо можна знайти розподіл форми (5).
2. Замість того, щоб конструювати повні умовні ймовірності, можна сконструювати їх неявно через вибір так званих потенціальних функцій Φ_c .

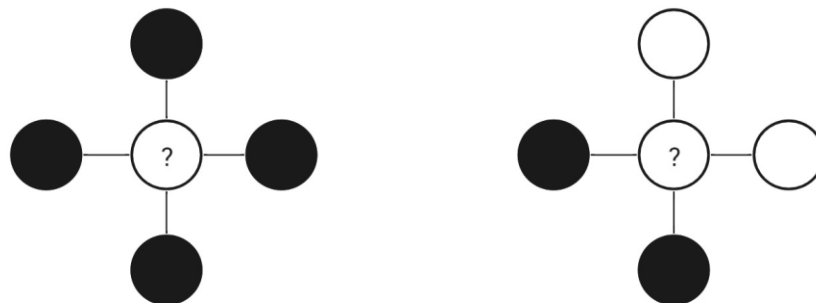
Означення. Множина випадкових змінних $\{x_i: i \in I\}$ називається *гіббсовським випадковим полем* відносно системи околів ∂i тоді і тільки тоді, коли конфігурації цієї множини підпорядковуються розподілу Гіббса (5).

Означення. Гіббсовське поле називається *однорідним*, якщо воно не залежить від відносного розташування кліки c в X . Також його називають *ізотропним*, якщо воно є незалежним від орієнтації c . Значно легше визначати розподіл гіббсовського випадкового поля, якщо поле є однорідним або ізотропним. Однорідність припускається у більшості моделей марковських випадкових полів для математичної та обчислювальної зручності.

Марковське випадкове поле характеризується своєю *локальною властивістю*, в той час як гіббсовське випадкове поле характеризується своєю *глобальною властивістю* (розподілом Гіббса). Теорема Гаммерслі-Кліфорда, викладена вище, встановлює еквівалентність між цими двома типами властивостей. Вона стверджує, що $\{x_i: i \in I\}$ є марковським випадковим полем над X відносно системи околу ∂i тоді і тільки тоді, коли $\{x_i: i \in I\}$ є гіббсовським випадковим полем на над X відносно ∂i .

Бінарні моделі для представлення зображень

Нехай $x_i = 1$ позначає піксель чорного кольору, $x_i = 0$ - білого. Необхідно зрозуміти, якими є наші апріорні знання про x — оригінальне зображення. Для початку, треба визначити, як окремий піксель x_i може себе поводити, враховуючи всі інші пікселі зображення. Припустимо, що маємо систему околу з чотирьох найближчих сусідів. Нехай пікселі забарвлені наступним чином:



miro

Рис. 2.

В першому випадку, чотири найближчі сусіди забарвлені в чорний колір. Яка ймовірність того, що розглядуваний піксель x_i теж чорного кольору?

Ймовірність залежить від контексту та від типу розглядуваного зображення, його структури, але видається логічним, що ця ймовірність має збільшуватись зі збільшенням кількості сусідніх чорних пікселів. Одним з варіантів є використання ймовірності, вираженої наступною формулою:

$$p(x_i = 1 \mid \text{кількість чорних сусідніх пікселів} = k) \propto \exp(\beta k) \quad (7)$$

β – деякий додатний параметр. Нормалізуючий множник в такому випадку має вигляд:

$$\exp(\beta * \text{кількість білих сусідніх пікселів}) + \exp(\beta * \text{кількість чорних сусідніх пікселів}) \quad (8)$$

Вибір такої моделі означає, що немає причин надавати перевагу окремому виду забарвлення, тому ймовірності для $x_i = 1$ та $x_i = 0$ – однакові, тобто дорівнюють $p = 1/2$. Якщо змінити місцями пікселі білого забарвлення з пікселями чорного, або навпаки, то змінена конфігурація матиме ту саму ймовірність як і початкова.

Тепер можна знову звернутись до теореми. Як можна знайти такі потенціальні функції, визначені на кліках, щоб вони мали такі локальні характеристики, як було запропоновано вище? Пригадаємо, що кліки - це такі множини вузлів з системи околу, в яких пікселі є попарно сусідніми. В такому разі, використовуючи чотирьохелементну множину сусідів, *кліками* є множини найближчих горизонтальних та найближчих вертикальних пар. Для кліки такого типу можна визначити потенціальну функцію:

$$\Phi_C(x_C) = \begin{cases} -\beta, & \text{якщо вузли в кліці } C \text{ одного кольору} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (9)$$

Тоді щільність сумісного розподілу матиме наступний вигляд:

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\exp(-\sum_{c \in \mathcal{C}} \Phi_c(\mathbf{x}_c))}{Z(\beta)} = \frac{\exp\left(\beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i=x_j]}\right)}{Z(\beta)} \quad (10)$$

де $i \sim j$ – пари сусідніх пікселів.

Нормалізуючий множник є функцією від β , яка має вигляд:

$$Z(\beta) = \sum_{\mathbf{x}} \exp\left(\beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i=x_j]}\right) \quad (11)$$

Можна перевірити, що даний розподіл містить такі самі повні умовні ймовірності, як і (7).

Запропонована функція сумісної щільності (10) є відомою як *модель Ізінга*, названа на честь американського вченого німецького походження Ернста Ізінга, який вперше презентував свою модель в 1925 році. Вона використовується як модель феромагнетизму, де кожний вузол представляє собою спін, орієнтований вгору (+) чи вниз (-). [3]

Для небінарних моделей зображень можна використовувати модель Поттса, яка, проте, не є об'єктом дослідження даної роботи.

Перейдемо до означення моделі Ізінга і розглянемо, в чому її особливість та роль в представленні зображень.

Модель Ізінга

Модель Ізінга - класична модель для пояснення явища феромагнетизму в статистичній механіці.

Модель Ізінга розглядає ідеалізовану систему взаємодіючих між собою частинок, розташованих у вузлах планарної ґратки. Кожна частинка володіє однією з двох магнітних спінових орієнтацій, які зазвичай позначаються $+$ та $-$ (див. рис. 3). З квантової фізики відомо, що спін - це фундаментальна властивість частинки (наприклад, елементарної частинки чи атомного ядра).

Кожна частинка в даній моделі може взаємодіяти тільки зі своїми найближчими сусідами. Внесок кожної частинки до загальної енергії системи залежить від орієнтації її спіна порівняно із сусідами. Суміжні частинки, які мають один і той самий спін, наприклад, $(-1, -1)$ або $(+1, +1)$ перебувають в стані нижчої енергії, ніж ті, які мають протилежні спіни $(+1, -1)$ або $(-1, +1)$. Знаючи орієнтації спінів всіх частинок системи, можна порахувати повну енергію системи.

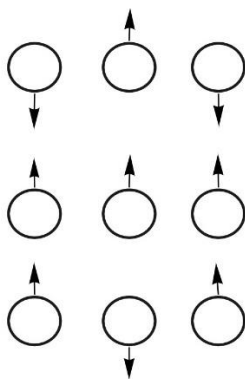


Рис. 3. Модель Ізінга

Отже, нехай змінна x_i позначає спін i -ї частинки.

Тоді Гамільтоніан (загальна енергія системи) моделі Ізінга виражається формулою:

$$H = -\sum_{i \sim j} J x_i x_j - \sum_j h x_j \quad (12)$$

де J - це коефіцієнт зв'язку між спінами, h - коефіцієнт впливу сили зовнішнього поля, x_i, x_j - індивідуальні спіни у вузлах сітки. Перша сума по всіх парах сусідніх вузлів (яка називається "зв'язками" ("bonds")) відповідає за попарні взаємодії між спінами. Друга сума по всіх вузлах сітки являє собою зовнішню силу, яка намагається вирівняти всіх спіни в одному напрямку.

Нехай множина C представляє собою всі можливі конфігурації і $E(c)$ - енергія конфігурації $c \in C$. Закони статистичної механіки стверджують, що ймовірність довільної конфігурації c виражається наступним чином:

$$p(c) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{E(c)}{kT} \right\} \quad (13)$$

де $Z = \sum_{c \in C} \exp \left\{ -\frac{E(c)}{kT} \right\}$.

Тут параметр T - температура. Конфігурації, що мають нижчу енергію, більш ймовірні, але вплив енергії більш виражений за низьких температур.

Значення k - константа Больцмана, фундаментальна константа в фізиці. За низьких температур, енергія конфігурації є дуже важливою у визначенні її ймовірності. Найбільш ймовірні стани - це ті, що мають найнижчу енергію.

Отже, в моделі Ізінга описано **два типи взаємодії** [5]:

1. Взаємодія через *зовнішнє поле*, яка виражається коефіцієнтом h .

Величина h свідчить про те, наскільки сильним є дія поля і наскільки

вищою є енергія одного спіна над іншим. Знак $\hbar$ свідчить про те, якому спіну (з орієнтацією вгору чи вниз) надається перевага. Оскільки кожен спін зазнає дії зовнішнього поля, то для того, щоб знайти загальний внесок до енергії, *необхідно сумувати по всіх вузлах*.

2. Взаємодія між сусідніми спінами, яка виражається коефіцієнтом J .

Величина J говорить про те, *наскільки сильно сусідні спіни пов'язані між собою і наскільки вони прагнуть впорядкуватись або розвпорядкуватись*. В фізиці, сила зв'язку між спінами може залежати, наприклад, від відстані між ними на ґратці. Знак J свідчить про те, чи сусіди надають перевагу впорядкуванню чи розупорядкуванню (в фізиці такі два типи поведінки спінів електронів відповідають явищами *феромагнетизму* та *антиферомагнетизму*). Оскільки взаємодія між спінами виникає тоді, коли вони є сусідами, то щоб знайти загальний внесок до енергії, *необхідно брати суму по всіх парах сусідніх вузлів*.

Деякі властивості моделі Ізінга:

- В квадратній d -вимірній сітці кожний вузол має $2d$ найближчих сусідів.
- Про взаємодію між найближчими сусідами говорять як про *енергію зв'язку* ("bond"), який з'єднує два суміжні вузли.
- В моделі Ізінга, кожний вузол взаємодіє тільки з вузлами, які прямо суміжні з ним на ґратці.
- Припускається, що взаємодія між спінами *ізотропна* - всі сусіди розглядаються однаково незалежно від напрямку.

Модель Ізінга в алгоритмі Метрополіса

Розглянемо бінарне випадкове поле на регулярній $N \times N$ решітці в просторі R^2 . Припустимо, що стани (вони ж пікселі) в позиції (i, j) можуть приймати значення $x_{ij} = -1$ або $x_{ij} = 1$.

Відповідно до моделі Ізінга (без впливу зовнішнього поля), ймовірність конфігурації $\mathbf{x}$ записується наступним чином:

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp (J \sum_{i \sim j} x_i x_j) \quad (14)$$

де $\mathbf{x}$ - це певна $N \times N$ конфігурація зі значеннями $+1$ та -1 , $x_i \sim x_j$ – пари сусідніх пікселів, Z – нормалізуючий множник.

Для симулювання цього розподілу, використаємо один із можливих алгоритмів сімейства Монте-Карло – *алгоритм Метрополіса*. *Мета алгоритму Метрополіса*: знайти стан (конфігурацію) мінімальної енергії. *Припущення алгоритму*: за достатньо низької температури, виникає впорядкований стан завдяки фазовому переходу, схожому на двовимірну модель Ізінга. [6]

Оскільки кожна пара сусідніх пікселів відповідає одній з граней регулярної ґратки $N \times N$, існує $N - 1$ вертикальних граней в кожному з N рядків, тобто всього $N(N - 1)$ вертикальних граней. Завдяки симетрії, кількість горизонтальних граней є такою самою, і всього є $2N(N - 1)$ пар. Вираз $\sum_{i \sim j} x_i x_j$ дорівнює $2N(N - 1) - 2d_x$, де d_x – кількість граней, які не узгоджуються (з крайніми пікселями зі значеннями 1 та -1) в $\mathbf{x}$.

Тому ймовірність конфігурації можна виразити таким чином:

$$P(x) \propto \exp(-2Jd_x) = \pi(x) - \text{ненормалізована ймовірність. (15)}$$

Кожну конфігурацію x з простору всіх конфігурацій C можна представити у вигляді вектора:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{N^2}) \quad (16)$$

Тут двовимірні індекси (i, j) представлені у вигляді одновимірних за допомогою перетворення:

$$(i, j) \rightarrow n = i + (N - 1) \times j \quad (17)$$

Опис алгоритму Метрополіса

1. Почати з певної конфігурації $x \in C$.
2. Обрати випадковим чином один піксель з цієї конфігурації, припустимо, x_n .
3. Запропонувати нове значення конфігурації x' , зі зміненням значенням випадково обраного пікселя на протилежне:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n, x_{n+1}, \dots, x_{N^2})$$

4. Визначити ймовірність переходу $x \rightarrow x'$:
 - 4.1. $g(x'|x) = 0$, якщо x та x' відрізняються більше ніж однією координатою або якщо $x = x'$.
 - 4.2. $g(x'|x) = \frac{1}{N^2}$, якщо x та x' відрізняються в точності однією координатою.
5. Прийняти нову конфігурацію з ймовірністю, яка визначається наступним чином:

$$a(x'|x) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(x')g(x|x')}{\pi(x)g(x'|x)} \right\} \quad (18)$$

де $\pi(x) = \exp(-2Jd_x)$.

Оскільки $g(x|x') = g(x'|x)$, то відношення $a(x'|x)$ можна записати наступним чином:

$$\exp(-2J(d_x - d_{x'})) = \exp(-2J(d_{x_n} - d_{x'_n})) = \exp(-2J(d_{x_n} - a_{x_n}))$$

де d_{x_n} – кількість неузгоджених граней між x_n та пікселями з околу x_n .

Кількість неузгоджених граней для x_n дорівнює a_{x_n} . Зазначимо, що $d_{x'_n} = a_{x_n}$.

6. Згенеруємо випадкове число за рівномірним розподілом $u \in U(0, 1)$ і приймемо нову конфігурацію x' , якщо $u < a(x'|x)$. Інакше, залишимо конфігурацію x .

Модель Ізінга в семплуванні Гіббса

Надалі опишемо алгоритм семплування з розподілу Гіббса, який також належить до сімейства методів Монте-Карло.

1. Як і в алгоритмі Метрополіса, почнемо з вибору деякої конфігурації зображення:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{N^2})$$

2. Почнемо обирати пікселі в певному порядку. Найпростішим є послідовний порядок, тобто $1, 2, 3, \dots, N^2, 1, 2, 3, \dots$
3. Для кожного пікселя n , обчислимо $w_n = \sum_{m \sim n} x_m$, де m – пікселі, які є сусідами n .
4. Визначимо дві ймовірності:

$$p^- = \frac{\exp(-\beta w_n)}{\exp(-\beta w_n) + \exp(\beta w_n)} \quad (19)$$

$$p^+ = \frac{\exp(\beta w_n)}{\exp(-\beta w_n) + \exp(\beta w_n)} \quad (20)$$

5. Генеруємо нове значення пікселя $x_n = x_n^{new}$. $x_n^{new} = 1$ з ймовірністю p^+ та $x_n^{new} = -1$ з ймовірністю p^- .

Замість впорядкованого, відвідування пікселів в конфігурації x може бути здійснене випадковим чином, і збіжність до стаціонарного розподілу Гіббса буде справджуватись.

Зашумлені зображення і апостеріорний розподіл

До цього ми розглядали моделі, які не враховують наявний в зображенні шум. Опишемо тепер моделі представлення бінарного зображення, які включають в себе не тільки апіорне знання, але й знання про тип шуму, наявного в сигналі. [4]

Припустимо, що y_i та y_j ($i \neq j$) є умовно незалежними від x :

$$\pi(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \pi(y_1|x_1) \cdots \pi(y_n|x_n) \quad (21)$$

Можна показати, як бінарне марковське випадкове поле може слугувати апіорним знанням при відновленні зашумлених зображень.

Для цього, розглянемо задачу відновлення чорно-білого зображення (такого, в якому кожний піксель має значення 1 або -1) за наявності спотвореного спостереження, наприклад, незалежним гауссівським шумом з нульовим середнім.

Гауссівський адитивний шум

Отже, нехай є зображення θ розміру $M \times N$ пікселів. Кожний піксель може приймати значення з множини $\{-1, 1\}$. Позначимо значення (m, n) -го пікселя як θ_{mn} . Як вже було згадано, простір станів всіх зображень θ має

потужність 2^{MN} . Припустимо, що спостережувані дані мають наступний вигляд:

$$y_{mn} = \theta_{mn} + \epsilon_{mn} \quad (22)$$

де змінні вектора ϵ_{mn} є однаково незалежно розподілені з нормальним розподілом з параметрами 0 та σ^2 ($\epsilon_{mn} \sim N$) – гауссівський шум.

Тоді функцію правдоподібності для цієї задачі можна виразити наступним чином:

$$f(y|\theta) \sim \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{m,n} (y_{mn} - \theta_{mn})^2\right) \quad (23)$$

Справжнє зображення θ можна знайти за допомогою байєсівського підходу.

Розглядають два типи апіорних моделей для θ :

1. Рівномірний розподіл $\pi(\theta) = 2^{-MN}$
2. Модель Ізінга, описана вище.

Вважається, що апіорне знання в рівномірному розподілі не є достатньо інформативним, в той час як апіорна модель Ізінга враховує “скупчення” в областях зображення в областях, чий розмір та міра скупчення залежать від параметра J . Якщо $J = 0$, то згладжування відсутнє, в той час за великого значення J акцентується увага на зображення з декількома областями одного й того ж кольору. [6]

Тому представимо зашумлене зображення за допомогою моделі Ізінга.

Тоді апостеріорний розподіл для оригінального зображення x можна записати таким чином:

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &\propto \exp \left(\beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i=x_j]} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right) \\
&\propto \exp \left(\beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i=x_j]} + \sum_i h_i(x_i, y_i) \right)
\end{aligned}
\tag{24}$$

$$\text{де } h_i(x_i, y_i) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2$$

Загальна формула функції шуму $h_i(x_i, y_i)$ має вигляд:

$$h_i(x_i, y_i) = \log(\pi(y_i|x_i)) \tag{25}$$

Дана функція шуму відповідає впливу зовнішнього поля, описаного в класичній моделі Ізінга.

Шум “Сіль-перець”

Виникає тоді, коли ймовірність того, що колір, записаний в пікселі бінарного зображення, є неправильним, підпорядковується розподілу Бернуллі.

Припускається, що ймовірність помилки p є константою і кожний піксель записується незалежно від інших:

$$\pi(y_i|x_i) = \begin{cases} 1-p, & y_i = x_i \\ p, & y_i \neq x_i \end{cases} \tag{26}$$

$p = \frac{1}{2}$ відповідає випадку, коли інформація про $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$ відсутня. Апостеріорний розподіл все ще може бути представлений у такому

$$h_i(x_i, y_i) = I_{[x_i=x_j]} \log \left(\frac{1-p}{p} \right), \tag{27}$$

де $I_{[x_i=x_j]}$ – індикаторна функція.

У випадку бінарного зображення візуально має такий самий вигляд як імпульсний шум.

Алгоритм Метрополіса для моделі Ізінга з шумом

Оскільки ми ввели представлення моделі зображення з шумом, доцільно розглянути алгоритм Метрополіса для симуляції апостеріорних розподілів для даних моделей.

1. Обираємо початкову конфігурацію x .
2. Оберемо випадковим або послідовним чином піксель x_i .
3. Визначимо протилежне значення цього пікселя $x'_i = 1 - x_i$
4. Обчислимо дві апостеріорні ймовірності:
 - a. $d = \beta \sum_{i \sim j} I_{[x_i = x_j]} + h_i(x_i, y_i)$
 - b. $d' = \beta \sum_{i \sim j} I_{[x'_i = x_j]} + h_i(x'_i, y_i)$
5. Згенеруємо випадкове число за рівномірним розподілом $u \in U(0, 1)$ і обчислимо $p = \exp(\min(d' - d), 0)$
6. Якщо $u < p$, змінюємо значення пікселя x_i на протилежне.

І так повторюємо N разів, де N – кількість ітерацій. Питання визначення достатньої кількості ітерацій для знаходження апостеріорного розподілу є предметом окремого дослідження.

РОЗДІЛ 3. Результати реалізації алгоритму Гіббса та Метрополіса

Вхідні дані

Дані зображень зібрані з відкритих джерел для досліджень, а саме з платформи Kaggle [10].

Оскільки застосування в медичній сфері видається найбільш перспективними корисним, було обрано дані знімків МРТ мозку.

Опис програмного модулю

Продемонструємо деякі аспекти реалізації програмного модуля для семплування методами Гіббса та Метрополіса.

Код до даного проекту може бути знайдений за посиланням:

<https://github.com/veronikaro/MonteCarloMarkovChainMethods>

Модуль працює із зображеннями довільних розмірів.

Для роботи з алгоритмом необхідно вхідне зображення перетворити спочатку в його бінарне (чорно-біле) представлення.

Якщо зображення в градаціях сірого, то для цього з підмодуля MCMC/images_processing.py можна використати функцію `convert_to_bw_and_greyscale`.

Далі, необхідно представити зображення за допомогою моделі Ізінга. Для цього використовується функція `convert_image_to_ising_model` з підмодуля MCMC/metropolis_sampler.py.

Оскільки в алгоритмі зручно працювати із зображенням у вигляді одновимірного масиву, то необхідно зменшити кількість каналів, яких за замовчуванням є 3, навіть якщо зображення є монохромним. Для цього використовується функція `reduce_channels_for_sampler`. Після знаходження

цільового розподілу зображення в алгоритмах, можна зробити зворотню конвертацію в стандартне представлення за допомогою функції `restore_channels`.

Для зручної роботи із зчитування та збереження зображень, а також знаходження їхніх розмірностей, в даному програмному модулі використана бібліотека `OpenCV` для мови `Python`.

В підмодулі `MCMC/noiser.py` є функції, які додають до зображення два типи шумів:

1. Salt & pepper (він же “сіль та перець” або flip noise). Функція `sp_noise` приймає параметр p – відсоток зашумлених пікселів.
2. Адитивний гауссівський шум. Функція `add_gaussian_noise` приймає параметр σ .

Функція `get_all_neighbors` дозволяє знаходити сусідів даного пікселя в залежності від його розташування. Параметрами передається розмір зображення, позиція пікселя, а також булева змінна, яка зазначає, чи включати в систему околу діагональних сусідів.

`potentials` - функція для знаходження енергії в системі околу.

`acceptance_probability` - функція для обчислення рівня прийняття $a(x'|x)$.

Підмодуль `MCMC/images_comparison` містить функції, які дозволяють порівняти два зображення та визначити значення певної метрики схожості між ними.

Функції для обчислення метрик схожості:

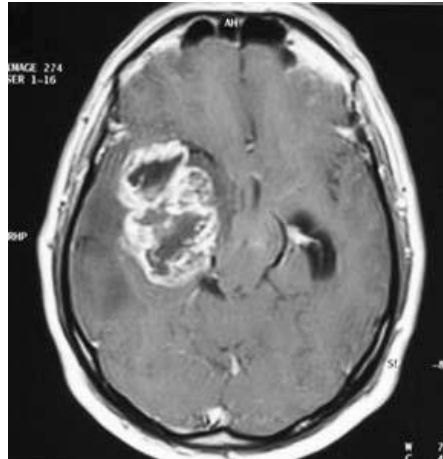
1. `mse` (середнє квадрату відхилення) – обчислює квадрат Евклідової відстані між оригінальним зображенням та відновленим.

2. `percentage_of_wrong_pixels` – повертає відсоток попиксельних неспівпадінь між двома зображеннями.
3. PSNR (peak signal-to-noise ratio)
4. `ssi` – індекс структурної схожості між двома зображеннями.
Використовує готову функцію з бібліотеки `skimage.metrics`.

Приклади результатів симуляцій розподілів зображень

Далі наведено результати роботи алгоритму Метрополіса та алгоритму семпсування Гіббса.

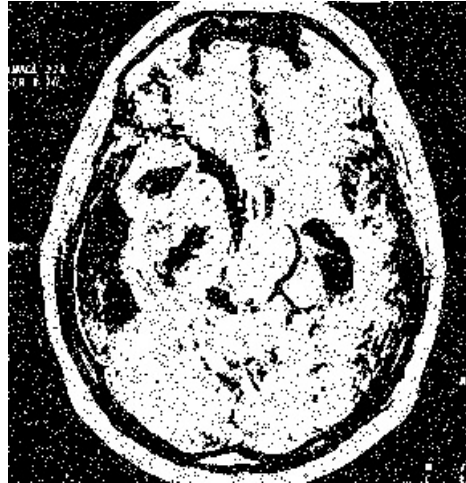
Оригінальне зображення:



Зображення, конвертоване в бінарне представлення:



Зашумлене зображення за допомогою шуму «сіль-перець» з ймовірністю 5%:



Відновлене зображення за допомогою методу Метрополіса:



ВИСНОВКИ

В даній роботі продемонстровано роботу двох алгоритмів:

1. Алгоритм Метрополіса
2. Алгоритм Гіббса

Обидва використовують модель Ізінга для представлення зашумлених зображень.

Плани для подальших досліджень

1. Покращити відновлення зашумлених зображень за допомогою варіацій різних параметрів та точнішого представлення моделі зображення
2. Відновлення якості зображень у відтінках сірого
3. Відновлення якості кольорових зображень
4. Відновлення якості відео

ЛІТЕРАТУРА

2. Yue, Chang. “Markov Random Fields and Gibbs Sampling for Image Denoising.” Electrical Engineering Stanford University.
3. Vidakovic, Brani. “Markov Random Fields.” Georgia Tech ISyE.
4. Hurn, Merrilee A., et al. “A Tutorial on Image Analysis.”
5. Bouman, Charles A. “Markov Random Fields and Stochastic Image Models.” School of Electrical and Computer Engineering.
6. Sheikh, Mohammed. “Markov Chain Monte Carlo and Image Restoration.” 19 Dec. 2012.
7. Roberts , G.O., and A.F.M. Smith . “Simple Conditions for the Convergence of the Gibbs Sampler and Metropolis-Hastings Algorithms .” Stochastic Processes and Their Applications, 15 July 1992, pp. 207–216.
8. Winkler, Gerhard. Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods.
9. Bagnell, Drew. “Gibbs Fields & Markov Random Fields.” Statistical Techniques in Robotics (16-831, F10).
10. Дани «Brain MRI Images for Brain Tumor Detection»
<https://www.kaggle.com/navoneel/brain-mri-images-for-brain-tumor-detection>
11. Rajni, Rajni. “Image Denoising Techniques - An Overview”

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

МСМС – методи Монте-Карло з марковськими ланцюгами