

Національний університет
“Києво-Могилянська академія”

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Пономарчук Богдан Сергійович

УДК 519.11+519.173

ДИСЕРТАЦІЯ
Метрична розмірність метричних та
ультраметричних просторів з умовами
скінченності

спеціальність — 113 “Прикладна математика”
(галузь знань — 11 “Математика та статистика”)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на
відповідне джерело Пономарчук Б. Б. С. Пономарчук

Науковий керівник:
Олійник Богдана Віталіївна
доктор фізико-математичних
наук, професор

Київ — 2021

АНОТАЦІЯ

Пономарчук Б. С. Метрична розмірність метричних та ультраметричних просторів з умовами скінченності. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії у галузі 11 “Математика та статистика” за спеціальністю 113 — “Прикладна математика” — Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, 2021.

У дисертаційній роботі розглянуто задачу пошуку метричної розмірності для скінченних ультраметричних просторів, а також описано метричну розмірність для деяких конструкцій метричних просторів з умовами скінченності.

Визначення метричної розмірності метричного простору було запропоноване Блюменталем в 1953 році. 20 років потому Харарі та Мелтер у своїй роботі застосували це визначення до метричних просторів визначених графами. Після чого, концепт метричної розмірності знайшов широке коло застосувань: комбінаторний аналіз, робототехніка, біологія, хімія та інші.

У 2013 році С. Бау та Ф. Беардон продовжили ідеї Блументаля щодо дослідження метричної розмірності метричних просторів. Вони вивчали метричну розмірність підпросторів Евклідового простору. Пізніше, М. Хейдарпур та С.Магсауді підраховали метричну розмірність геометричних просторів.

Відомо що, пошук метричної розмірності метричного простору є NP-складною задачею. Є декілька шляхів дослідження метричної

розмірності. Один з них — дослідження метричної розмірності для певних родин метричних просторів чи графів. Другим підходом є дослідження метричної розмірності конструкцій метричних просторів, що побудовані на основі метричних просторів, метрична розмірність яких вже відома.

У дисертаційній роботі дослідження здійснюються в обох описаних вище напрямках. А саме повністю охарактеризовано метричну розмірність скінченних ультраметричних або неархімедових просторів. Показано, що для довільного скінченного ультраметричного простору його метрична розмірність може бути знайдена за поліноміальний час. Наведено поліноміальний алгоритм знаходження метричної розмірності для довільного ультраметричного простору. Для побудови цього алгоритму було використано ізометричне зображення ультраметричних просторів деревами. Показано, що складність побудови такого зображення дорівнює $O(n^5)$, де n — кількість точок ультраметричного простору. Також доведено, що метрична розмірність ультраметричного простору, який визначається на кореневому дереві, або дорівнює метричній розмірності цього дерева як графа, або на одиницю менше. В роботі також повністю описано ультраметричні простори метрична розмірність яких дорівнює одиниці.

Окрім ультраметричних просторів в дисертаційній роботі розглянуто метричну розмірність різних конструкцій метричних просторів. Зокрема показано, що для довільної шкали трансформації метрична розмірність метричного простору дорівнює метричній розмірності його трансформації.

Наведено формулу для підрахунку метричної розмірності вінце-

вого добутку скінченного метричного простору і рівномірно дискретного метричного простору. У випадку коли метрична розмірність рівномірно дискретно метричного простору дорівнює нескінченності, метрична розмірність конструкції також дорівнює нескінченності. Крім того, для прямої суми метричних просторів скінченного діаметра показано, що її метрична розмірність дорівнюватиме сумі метричних розмірностей цих просторів. Показано, що для довільних метричних просторів скінченного діаметра метрична розмірність їх прямої суми дорівнює двом тоді і тільки тоді коли метрична розмірність кожного з просторів дорівнює 1. В останньому розділі також розглянуто метричну розмірність прямого добутку евідистантних метричних просторів з метриками d_1 , d_2 та d_∞ . Показано, що хоча ці метрики є топологічно еквівалентними, відповідні метричні простори мають різну метричну розмірність.

Таким чином, в дисертаційній роботі містяться наступні нові наукові результати:

1. Наведено алгоритм зображення ультраметричного простору кореневим деревом, часова складність якого $O(n^5)$.
2. Для довільного скінченного ультраметричного простору показано, що існує поліноміальний алгоритм обчислення його метричної розмірності.
3. Охарактеризовано всі ультраметричні простори розмірність яких дорівнює одиниці.
4. Отримано формулу для обчислення метричної розмірності вінцевого добутку скінченного метричного та рівномірно дискретного метричного просторів.

5. Охарактеризовано метричну розмірність прямої суми метричних просторів скінченного діаметра.
6. Описано метричну розмірність прямого добутку евідистантних метричних просторів з метриками d_1 , d_2 та d_∞ .

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть використовуватися в теорії графів, робототехніці, теорії метричних просторів.

Дисертація може бути використана для читання спецкурсів з теорії графів для студентів математичних спеціальностей.

Ключові слова: метричний простір, ультраметричний простір, метричний базис, метрична розмірність, кореневе дерево, часова складність, поліноміальний алгоритм.

ABSTRACT

Ponomarchuk B. S. Metric dimension of metric and ultrametric spaces with conditions of finiteness. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining Ph.D. degree in the field “Mathematics and statistics” and the specialty 113 — “Applied mathematics” — National University of Kyiv–Mohyla Academy, Kyiv, 2021.

In the thesis, the problem of finding of metric dimension for finite ultrametric spaces and for some constructions of metric spaces with conditions of finiteness is described.

The definition of the metric dimension for metric spaces was firstly introduced by Blumenthal in 1953. 20 years later Harari and Melter in their paper applied it to the metric spaces defined on graphs. After that, the metric dimension concept found a range of applications, like in combinatorial analysis, robotics, biology, chemistry, etc.

In 2013 S. Bau and F. Beardon proceeded with the research of Blumenthal’s ideas about the metric spaces metric dimension. They have studied the metric dimension of the subspaces of the Euclidean space. Later, M. Heydarpour and S. Maghsoudi calculated the metric dimensions of geometric spaces.

It is known, that finding the metric dimension of a metric space is an NP-hard problem. There are several ways of conducting metric dimension research. One of those is researching the metric dimension of some specific families of metric spaces or graphs. Second one is metric

dimension research of constructions of metric spaces, which is being created using metric spaces for which metric dimension is known.

In thesis research is being conducted in both mentioned ways. Namely, the metric dimension of finite ultrametric spaces or non-archimed spaces is completely characterized. It is shown that for an arbitrary finite ultrametric space its metric dimension can be found in polynomial time. Polynomial algorithm for finding metric dimension for any ultrametric space is described. To do this, isometric image of ultrametric spaces to trees was used. It was shown that complexity of such image is $O(n^5)$, where n — the number of points of ultrametric space. It is also shown that the metric dimension of the ultrametric space, that is defined on the rooted tree is either equal to the metric dimension of this tree as a graph, or is lesser by one. The paper also fully characterizes ultrametric spaces whose metric dimension is equal to one.

In addition to ultrametric spaces, the thesis considers the metric dimension of different constructions of metric spaces. In particular, it is shown that for an arbitrary transform scale the metric dimension of the metric space is equal to metric dimension of its metric transform.

A formula for calculating the metric dimension is given for the wreath product of finite metric space and uniformly discrete metric space. When metric dimension of uniformly discrete metric space is equal to infinity, then metric dimension of its construct is equal to infinity. Besides, for the direct sum of metric spaces of finite diameter, it is shown that its metric dimension will be equal to the sum of the metric dimensions of these spaces. It is shown that for any uniformly discrete metric space metric dimension of their direct sum is equal to two, if, and only if metric dimension of each space is equal to one. The last section also considers

the metric dimension of the direct product of equidistant metric spaces with d_1 , d_2 та d_∞ metrics. It is shown that although these metrics are topologically equivalent, the corresponding metric spaces have different metric dimensions.

Thus, the thesis contains the following new scientific results:

1. The algorithm of constructing isometric tree to the ultrametric space by a rooted tree with time complexity $O(n^5)$ is given.
2. For an arbitrary finite ultrametric space, it is shown that there is a polynomial algorithm for calculating its metric dimension.
3. All ultrametric spaces whose dimension is equal to one are characterized.
4. The metric dimension of the wreath product of a finite metric space and uniformly discrete metric space is described.
5. The metric dimension of the direct sum of metric spaces of finite diameter is described.
6. Describes the metric dimension of the direct product of equidistant metric spaces with metrics d_1 , d_2 and d_∞ .

The practical significance of the results. The results of this work are mainly theoretical. They can be used in graph theory, robotics, theory of metric spaces.

The thesis can be used for lecturing special courses of the graph theory for students learning at mathematical specialties.

Key words: metric space, ultrametric space, metric basis, metric dimension, rooted tree, time complexity, polynomial algorithm.

Список публікацій за темою дисертації

Публікації, які відображають основні наукові результати дисертації

1. Ponomarchuk B. Metric dimension of metric transform and wreath product // Carpathian Math. Publ. – 2019 – **11**(2), P. 10–13 .
2. Oliynyk B. Ponomarchuk B. Metric dimension of ultrametric spaces // Serdica Math. J. – 2020 – **46** (2020), P. 195–206.
3. Пономарчук Б. Метрична розмірність прямої суми та прямого добутків метричних просторів // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка – 2020. – **1-2**. – С. 41–48.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Ponomarchuk B. Metric dimension of metric transform and wreath product. // XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. – Vinnytsia, 2019 – **142**, P. 83-85.
5. Пономарчук Б. С. Метрична розмірність прямого добутку метричних просторів // IX всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Тези доповідей. – Київ, 2020 – С. 30.
6. Oliynyk B., Ponomarchuk B. Metric dimension of ultrametric spaces // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Book of abstracts. – 2020, Kyiv – **93** – P. 59.

Зміст

АНОТАЦІЯ	2
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	12
ВСТУП	13
1 НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	29
1.1. Метричні простори. Приклади	29
1.2. Графи. Основні означення, приклади	35
1.3. Метрична розмірність графів і метричних просторів .	42
1.4. Складність алгоритмів. Складність задачі обчислення метричної розмірності	48
1.5. Конструкції метричних просторів	55
1.5.1. Метрична трансформація	55
1.5.2. Вінцевий добуток метричних просторів	57
1.5.3. Пряма сума метричних просторів	59
1.5.4. Прямий добуток метричних просторів	60
1.6. Огляд відомих результатів	62
1.7. Висновки до розділу	68
2 МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ	70
2.1. Метрична розмірність кореневих дерев	70
2.2. Метрична розмірність ультраметричного простору . .	74
2.3. Висновки до розділу	101

3	МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ МЕ-	
	ТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ	103
3.1.	Метрична трансформація	103
3.2.	Вінцевий добуток метричних просторів	106
3.3.	Метрична розмірність прямої суми метричних просторів	108
3.4.	Метрична розмірність прямого добутку метричних про- сторів	112
3.5.	Висновки до розділу	120
	ВИСНОВКИ	121
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	123
	ДОДАТКИ	128

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$md(X)$ — метрична розмірність простору X .

$d(x, y)$ — відстань між точками x та y .

$diam(A)$ — діаметр множини A .

$|X|$ — потужність множини X .

M — матриця відстаней.

G — граф.

V — множина вершин графа G .

E — множина ребер графа G .

T_m — кореневе дерево всі листки якого знаходяться на рівні m .

L_m — множина вершин m -го рівня кореневого дерева T_m .

$deg(v)$ — степінь вершини v .

n_v — кількість листків, близьких до внутрішньої вершини v .

P_n — простий ланцюг з n вершинами.

C_n — простий цикл з n вершинами.

K_n — повний граф на n вершинах.

$B_X(x, r)$ — відкрита куля радіусом r з центром в точці x в метричному просторі X .

$s(d_X)$ — шкала.

$Xwr_s Y$ — вінцевий добуток метричних просторів X та Y з метрикою ρ_s побудованій використовуючи шкалу s .

$(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \tau_c)$ — c -пряма сума метричних просторів $X_i, i = 1, \dots, n$.

$(X \times Y, d_1)$ — прямий добуток метричних просторів з визначеною метрикою d_1 .

ВСТУП

Актуальність теми

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню метричної розмірності ультраметричних просторів та деяких конструкцій метричних просторів з умовами скінченності.

Для довільного скінченного метричного простору (X, d) підмножина A , $A \subset X$ називатиметься *розділяючою множиною*, якщо для довільних двох точок b та c з простору X існує точка a з множини A , така що відстані $d(a, b)$ та $d(a, c)$ різні. *Метричним базисом* метричного простору X називатимемо розділяючу множину A мінімальної потужності. *Метричною розмірністю* $md(X)$ простору X буде потужність його метричного базису. Для метричного простору X розміру n , справедливим є наступне твердження:

$$1 \leq md(X) \leq n - 1.$$

Метрична розмірність як поняття було введено в 1953 році Л. Блюменталем [1]. 20 років потому Р. Харарі, Р. А. Мелтер та П. Слатер застосували її до метричних просторів визначених на графах [2, 3], в яких для деякого графу $G = (V, E)$ *відстань* між двома вершинами p та q визначається як довжину найкоротшого шляху між p та q та

$$d_G(p, q) = 0,$$

якщо $p = q$.

Метрична розмірність широко використовується в таких галузях як робототехніка, біологія, комбінаторний аналіз, хімія та ін-

ші [3, 4, 5]. Наприклад, у своїй статті [4] Кулер, Розенфельд та Рагавачарі описують навігацію як графічну структуру, де робот переміщується по вершинах в метричному просторі описаному графом. Робот орієнтується за вершинами-орієнтирами. І в деякий момент часу за допомогою них може однозначно віднайти своє місцезнаходження, якщо знає відстань до достатньої кількості таких орієнтирів. Як наслідок виникла потреба знаходження мінімальної кількості таких вершин в мережі, щоб мати змогу завжди оцінити своє місцезнаходження. Також у своїй праці [3] Слатер наводить ідею пошуку метричної розмірності в засобах навігації.

Задача пошуку метричної розмірності полягає у знаходженні метричної розмірності метричного простору. В роботі [6] Гері й Джонсон показали, що задача пошуку метричної розмірності в графах є NP-складною зведенням її до задачі 3-мірного узгодження. Проте для деяких сімейств графів, наприклад дерев [4], графів-коліс [7], ланцюгових графів [8], графів-сіток [9], лінійних графів [10], уніциклічних графів [11] і зовнішньопланарних графів [12] або певних конструкцій [13, 14] існують поліноміальні алгоритми знаходження метричної розмірності.

Відомі також результати щодо характеристизації сімейств графів зі сталою метричною розмірністю. Було показано, що скінченний граф може мати метричну розмірність один тоді й тільки тоді, коли він — ланцюг [4]. У випадку метричних просторів, якщо метричний простір (X, d) компактний і зв'язний, а також його метрична розмірність дорівнює одиниці, то він гомеоморфний відрізку $[0; 1]$ [15]

Одним з напрямків дослідження метричних розмірностей графів є дослідження метричної розмірності результатів виконання опера-

цій над графами метрична розмірність яких вже відома. Наприклад, в роботі [16] описано метричну розмірність декартового добутку двох графів отриманих. В роботах [17, 18, 19, 20, 21] було розглянуто метричну розмірність повного n -дольного графа, декартового добутку, вінцевого добутку та лексикографічних добутків графів.

У 2013 році С. Бау та Ф. Беардон [15] обчислили метричну розмірність Евклідового простору $\mathbb{R}^n$, сфери в k -вимірному Евклідовому просторі, охарактеризували метричну розмірність гіперболічних просторів. Згодом, М. Хейдарпур та С. Магсауді отримали певну характеристизацію метричної розмірності геометричних просторів [22].

Ультраметричні простори є важливим окремим видом метричних просторів, які використовуються в різних розділах математики (див. [23, 24, 25, 26]).

Ультраметричним називається метричний простір (X, d) для довільних точок x, y, z якого, виконується така умова:

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z)).$$

У дисертаційній роботі показано, що для довільного ультраметричного простору його метрична розмірність може бути обчислена за поліноміальний час. Наведено алгоритм зображення ультраметричного простору кореневим деревом часова складність якого $O(N^5)$.

Поняття метричної трансформації Блюменталь в 1953 р. [27]. Техніку метричних трансформацій розвивали такі відомі математики як Шоенберг та фон Нейман [28, 29]. Метрична трансформація використовується при побудові таких конструкцій метричних просторів як вінцевий добуток [30, 31] та пряма сума. Метрична розмірність цих конструкцій метричних просторів повністю охарактеризована в дисертаційній роботі.

Наведено формули для обчислення метричної розмірності прямого добутку метричних просторів для скінченних еквідістантних просторів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційні дослідження проводилися на кафедрі математики Національного університету «Києво-Могилянська Академія» як частина науково-дослідної теми «Дискретний аналіз і керування випадковими процесами» (номер державної реєстрації 0118U000648).

Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є характеристика метричної розмірності скінченних ультраметричних просторів, а також дослідження метричної розмірності конструкцій метричних просторів з умовами скінченності.

Об'єктом дослідження є ультраметричні простори, метрична трансформація, пряма сума, прямий добуток, а також вінцевий добуток метричних просторів.

Предметом дослідження є властивості ультраметричних та метричних просторів, характеристика умов за яких обчислення метричної розмірності має поліноміальну часову складність.

Методи дослідження

Основними методами використаними в роботі є такі: методи теорії графів, теорії комбінаторного аналізу та метричних просторів.

Наукова новизна одержаних результатів

У дисертаційній роботі автором отримано такі нові наукові результати:

1. Наведено алгоритм зображення ультраметричного простору кореневим деревом, часова складність якого $O(n^5)$.
2. Для довільного скінченного ультраметричного простору показано, що існує поліноміальний алгоритм обчислення його метричної розмірності.
3. Охарактеризовано всі ультраметричні простори розмірність яких дорівнює одиниці.
4. Описано метричну розмірність метричної трансформації метричного простору.
5. Повністю охарактеризовано метричну розмірність вільного добутку скінченного метричного та рівномірно дискретного метричного просторів.
6. Охарактеризовано метричну розмірність прямої суми метричних просторів скінченного діаметра.
7. Описано метричну розмірність прямого добутку евідистантних метричних просторів з метриками d_1 , d_2 та d_∞ .

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть використовуватися в теорії графів, теорії метричних просторів, робототехніці.

Дисертація може бути використана для читання спецкурсів з теорії метричних просторів для студентів математичних спеціальностей.

Особистий внесок автора

Основні результати дисертаційної роботи отримані автором особисто. Перший розділ дисертації є допоміжним, в ньому викладені відомі результати з посиланнями на відповідні джерела. У спільній роботі [50] з науковим керівником Олійник Б. В. постановки задач належать керівнику, а ряд конкретних ідей та практична реалізація належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації оприлюднено на наукових конференціях та наукових семінарах:

1. Семінар "Під кінець року" при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, Київ, 26 грудня 2018 р.);
2. XII International Algebraic Conference in Ukraine (Вінниця, 2 – 6 липня 2019 р.)
3. Семінар "Під кінець року" при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники — доктор фізико-математичних наук, член-

кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, Київ, 26 грудня 2019 р.);

4. ІХ всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, 10-11 квітня 2020 р.);
5. The international mathematical conference devoted to the 60-th anniversary of Department of Algebra and Mathematical Logic (Київ, 14-17 липня 2020 р.)

Публікації

Результати дисертації опубліковано у 6 наукових працях, з яких 1 — у журналі, що входить до міжнародних наукометричних баз Web of Science та Scopus [46], 1 — у фаховому виданні категорії Б з «Переліку», затвердженого Міністерством освіти й науки України [51], 1 — у періодичному науковому виданні держави, що входить до Європейського союзу [50], 1 — у матеріалах всеукраїнської наукової конференції [48], 2 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій [47, 49].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг дисертації — 129 сторінок. Обсяг основного тексту — 109 сторінок. Список використаних джерел займає 5 сторінок (45 найменувань). Додатки займають 2 сторінки та містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи

Дисертаційна робота складається з трьох розділів.

У **першому розділі** вводяться необхідні твердження та означення, а також оглядаються актуальні результати близькі за проблематикою дисертаційної роботи.

В першому підрозділі наводиться визначення метричного простору та ультраметричного простору.

Ультраметричним простором називається такий метричний простір для якого виконується посиленна нерівність трикутника:

$$x, y, z \in X, d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z)).$$

Також в першому підрозділі розглядаються способи задання метричних просторів. Описуються визначення метричних просторів, що використовуються в загальній теорії та у її застосуваннях.

В другому параграфі наведені основні визначення з теорії графів, розглянуто також способи їх задання. Охарактеризовано й описано основні види графів, підграфів, індукованих графів, дерев.

В третьому підрозділі для графів наведено визначення метричної розмірності, метричного генератора і метричного базису.

Означення 1.20 *Кажуть, що вершина $t \in V(G)$ розділяє дві різні інші вершини x та y якщо*

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

Означення 1.21 *Множина T називається метричним генератором графу G , якщо будь-яка пара вершин з G розділяється деяким елементом $t \in T$. Метричний генератор з мінімальною*

кількістю елементів називають метричним базисом, а його потужність метричною розмірністю, її позначають $md(G)$.

Для метричних просторів визначення подібне:

Означення 1.25 Метричною розмірністю $md(X)$ метричного простору (X, d) називають найменшу з потужностей k розділяючих підмножин множини X , а саму підмножину мінімальної розмірності називають метричним базисом простору (X, d) .

Окрім цього в третьому підрозділі розглянуто приклади метричних розмірностей для відомих родин графів.

Четвертий підрозділ присвячено опису понять і тверджень з теорії складності алгоритмів. Визначено класи P , NP , NP -повних та NP -складних задач, обговорюються проблеми визначення складності алгоритмів. Розглянуто класичні приклади NP -повних та NP -складних задач, зокрема задача 3-мірного узгодження до якої зводиться задача пошуку метричної розмірності графа.

В п'ятому параграфі вводяться конструкції метричних просторів, які надалі розглядаються в дисертаційній роботі.

Відповідно до роботи [1] наводиться поняття шкали метричного простору. Шкалою s метричного простору (X, d) називається неперервна монотонно зростаюча функція, для якої $s(0) = 0$ і $s(d)$ є метрикою. При цьому простір $(X, s(d))$ називається метричною трансформацією простору X .

Також в цьому розділі розглянуто конструкцію вінцевого добутку метричних просторів. Вона називається так оскільки група ізометрій вінцевого добутку двох метричних просторів ізоморфна вінцевому добутку груп ізометрій цих метричних просторів. Вінцевим добутком двох метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називають

метричний простір визначений на множині $X \times Y$ з метрикою ρ_s наступного вигляду:

$$\rho_s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_X(x_1, x_2), & \text{якщо } x_1 \neq x_2 \\ s(d_Y(y_1, y_2)), & \text{якщо } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Прямою сумою метричних просторів

$$(X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2}), \dots, (X_n, d_{X_n}),$$

кожен з яких є скінченного діаметра, називається метричний простір на множині $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ з метрикою

$$\tau_c(u, v) = \begin{cases} d_{X_i}(u, v), & \text{якщо } u, v \in X_i \\ c, & \text{в іншому випадку} \end{cases}, \quad (0.1)$$

де c деяка константа, що більше за найбільший діаметр просторів $\text{diam}(X_1), \text{diam}(X_2), \dots, \text{diam}(X_n)$.

Прямим добутком метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називається метричний простір визначений на множині $X \times Y$ з однією з наступних метрик:

1. $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$;
2. $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$;
3. $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}$.

У **другому розділі** описується алгоритм зображення ультраметричного простору кореневим деревом. Показано, що даний алгоритм має складність по часу $O(n^5)$. Зокрема, в першому підрозділі наведено формулу для підрахунку метричної розмірності дерев у яких всі вершини $m - 1$ -го рівня внутрішні.

В цьому розділі T_m позначає кореневе дерево в якого всі листки знаходяться на рівні m .

Твердження 2.1 *Припустимо, що T_m кореневе дерево всі вершини $(m-1)$ -го рівня якого — внутрішні. Тоді метрична розмірність кореневого дерева T_m дорівнюватиме $|L_m| - |L_{m-1}|$.*

Нехай $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ — скінченна послідовність дійсних чисел, така що

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m-1} < \alpha_m.$$

Визначимо метрику ρ на підмножині L_m вершин m -го рівня дерева T_m . Для довільних вершин $u, v \in L_m$ відстань $\rho(u, v)$ дорівнює α_{m-k} тоді й тільки тоді, коли спільна частина шляхів, що з'єднують корінь дерева v_0 та вершини v і u має довжину k , $0 \leq k \leq m$.

Послідовність $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ називається *визначальним набором* кореневого дерева T_m [32].

Також показано, що метрична розмірність метричного простору (L_m, ρ) , визначеного на листках дерева T_m або дорівнює метричній розмірності дерева, або на одиницю менше.

Теорема 2.3 *Нехай маємо кореневе дерево T_m з визначальним набором $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$. Якщо для кореневого дерева T_m виконуються такі умови:*

1. *ступінь кореня дорівнює двом;*
2. *одне з підкореневих дерев з коренем v_0 є ланцюгом;*
3. *одне з кореневих піддерев T_v , яке є піддеревом дерева T_m і з коренем у внутрішній вершині найближчій до кореня v_0 є ланцюгом,*

Метрична розмірність

$$md(T_m) - 1 = md(L_m).$$

В усіх інших випадках метрична розмірність L_m дорівнює метричній розмірності T_m .

В другому підрозділі наведено алгоритм побудови відображення ультраметричного простору кореневим деревом:

Теорема 2.4 *Припустимо, що (X, d) — скінченний ультраметричний простір, кількість точок в якому $|X| > 3$. Тоді для нього існує поліноміальний алгоритм для побудови кореневого дерева T_m і визначального набору $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ таких, що метричні простори (X, d) та (L_m, ρ) — ізометричні.*

Казатимемо, що кореневе дерево T_m зображує метричний простір (X, d) .

Як наслідок з теореми 2.4 отримуємо формулу, що дозволяє нам підрахувати метричну розмірність ультраметричного простору:

Наслідок 2.5 *Нехай (X, d) — скінченний ультраметричний простір, а T_m — його зображення у вигляді кореневого дерева. Припустимо, що для будь-якого $x \in X$ існує таке $y \in X$, що $d(x, y) = \alpha_1$. В такому випадку метричну розмірність простору X можна визначити за формулою:*

$$mdX = |L_m| - |L_{m-1}|.$$

А також отримуємо характеристику усіх ультраметричних просторів метрична розмірність яких дорівнює один:

Наслідок 2.6 *Ультраметричний простір X , $|X| = n$ має метричну розмірність один тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

- кількість різних відстаней дорівнює n , тобто визначальний

набір має вигляд $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;

- існує впорядкування точок простору $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ таке, що точка x_{m-i} знаходиться на відстані α_{m-i} від всіх точок $x_1, \dots, x_{m-i-1}$.

Оскільки відомо [4], що для довільного дерева його метрична розмірність обчислюється за поліноміальний час, то має місце наступна теорема.

Теорема 2.8 *Для довільного скінченного ультраметричного простору (X, d) існує поліноміальний алгоритм для визначення його метричної розмірності.*

Третій розділ присвячено характеристиці метричної розмірності конструкцій метричних просторів. Зокрема, розглядається метрична розмірність метричної трансформації.

Твердження 3.1 *Нехай маємо деякий метричний простір (X, d) , також припустимо, що $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ метрична трансформація. Тоді метричний базис X є також метричним базисом метричної трансформації $(X, s(d))$.*

З твердження 3.1 безпосередньо випливає наслідок, що для будь-якої шкали s метрична розмірність метричної трансформації $(X, s(d))$ дорівнює метричній розмірності метричного простору (X, d) .

Також показано, що якщо простори (X, d_X) та (Y, d_Y) ізоморфні, то їх метрична розмірність буде рівною.

В другому підрозділі досліджується значення метричної розмірності вінцевого добутку метричних просторів.

Теорема 3.4 *Нехай X – скінченний метричний простір, а Y – рівномірно дискретний метричний простір обмеженого діаметра, $td(Y) < \infty$. Тоді розмірність вінцевого добутку метричних про-*

сторів (X, d_X) та (Y, d_Y) дорівнює

$$md(Xwr_s Y) = |X| * md(Y).$$

У випадку коли $md(Y) = \infty$, то

$$md(Xwr_s Y) = \infty.$$

В третьому підрозділі повністю охарактеризовано метричну розмірність прямої суми метричних просторів. Сформульовано й доведено такі твердження:

Лема 3.7 *Метричний базис n -точкового еквідистантного простору складається з $n - 1$ точок, тобто*

$$md(Y) = |Y| - 1.$$

Твердження 3.8 *Нехай I — деяка множина індексів, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ — підмножина множини дійсних чисел, для якої існує найбільший або найменший елемент x_0 . Тоді точка x_0 є метричним базисом простору X з Евклідовою метрикою, і, відповідно,*

$$md(X) = 1.$$

Метрична розмірність прямої суми метричних просторів повністю характеризується наступною теоремою:

Теорема 3.9 *Метрична розмірність прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ метричних просторів скінченного діаметра $X_1, \dots, X_n$ дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів*

$$md(X_1 \oplus \dots \oplus X_n) = \sum_{i=1}^n (md(X_i)).$$

Описана теорема дозволяє сформулювати 2 наслідки, перший з яких накладає обмеження на метричну розмірність прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ метричних просторів знизу, а другий — умову при якій пряма сума метричних просторів може дорівнювати двом.

Наслідок 3.10 *Для довільних скінченних метричних просторів скінченного діаметра $X_1 \dots X_n$*

$$md(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n) \geq n.$$

Наслідок 3.11 *Для довільних метричних просторів X_1, X_2 скінченного діаметра метрична розмірність $md(X_1 \oplus X_2) = 2$ тоді й тільки тоді, коли метрична розмірність X_1 дорівнює метричній розмірності X_2 і дорівнює одиниці.*

В четвертому підрозділі досліджується метрична розмірність прямого добутку еквідистантних метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) з використанням метрик d_1, d_2 та d_∞ . Метрики d_1, d_2 та d_∞ топологічно еквівалентні на декартовому добутку $X \times Y$. Проте, з точки зору метричної розмірності всі три конструкції різні, і для відповідних метричних просторів метрична розмірність обчислюватиметься по-різному.

Отримано такі результати:

Теорема 3.12 *Нехай X — деякий метричний простір, всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, $|Y| = m \geq 4$. Тоді для метричного простору $(X \times Y, d_1)$ виконується рівність*

$$md(X \times Y, d_1) = md(Y) = m - 1.$$

Теорема 3.13 *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метрична розмірність прямого добутку цих просторів з визначеною метрикою d_1 дорівнює*

$$md(X \times Y, d_1) = md(X) + md(Y).$$

Теорема 3.14 *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метричний простір визначений на їх добуткові з Евклідовою метрикою*

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$$

матиме метричну розмірність, що дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів

$$(X \times Y, d_2) = md(X) + md(Y).$$

Варто зазначити, що значення метричної розмірності $md(X \times Y, d_1)$ та $md(X \times Y, d_2)$ збігається не завжди.

Теорема 3.15 *Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, на яких визначено прямий добуток $X \times Y$ з метрикою*

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Метрична розмірність метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$ в такому випадку дорівнюватиме

$$md(X \times Y, d_\infty) = \begin{cases} |X| \times (|Y| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X > c_Y, \\ |Y| \times (|X| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X < c_Y, \\ |X| \times |Y| - 1, & \text{у випадку, якщо } c_X = c_Y, \end{cases}$$

де c_X і c_Y ненульові значення метрик просторів X і Y відповідно.

Розділ 1

НЕОБХІДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Метричні простори. Приклади

Метричним простором називатимемо пару (X, d) , де X — деяка множина, а d — метрика. *Метрикою* називатимемо функцію d визначену на $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, де для довільних $x, y, z \in X$ виконуються наступні умови:

1. якщо $d(x, y) = 0$, то $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ — симетричність
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — нерівність трикутника.

З цих умов випливає, що функція d є невід'ємною. Також, функцію d ще називають *функцією відстані*, чи просто *відстанню*.

З прикладів метричних просторів можемо навести наступні:

- Множина дійсних чисел з визначеною на ній метрикою у вигляді

$$d(x, y) = |x - y|$$

абсолютної різниці двох елементів. В більш загальному вигляді n -вимірний Евклідовий простір з Евклідовою відстанню.

- Будь-який нормований векторний простір на $\mathbb{R}^n$ з метрикою

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

яку можна визначити до прикладу Мангеттенською відстанню

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

у якої відстань між двома точками чи векторами є сумою модулів різниць їх відповідних координат. Чи $\mathbb{R}^n$ з метрикою Чебишева

$$d(x, y) = \|y - x\| = \max_{i=1..n} |x_i - y_i|,$$

яка є максимумом модуля різниці компонент цих векторів.

- Нехай $a_1 \dots a_n \in A$ — деякий алфавіт. Розглянемо множину всіх скінченних послідовностей над A^* . Відстань Левенштайна визначена на множині символьних рядків A^* характеризує відмінність двох послідовностей символів. Вона обчислюється як мінімальна необхідна кількість символів, які необхідно видалити, вставити чи замінити, щоб перетворити послідовність символів x в y , $x, y \in A^*$.
- Множина визначених неперервних дійсних функцій $C_{[u,v]}$ на проміжку $[u, v]$, $u, v \in \mathbb{R}$ з метрикою

$$d(f, g) = \max(g(t), f(t))_{u \leq t \leq v},$$

де $f, g \in C_{[u,v]}$.

Окрім функції відстані існують узагальнення цього поняття. Розглянемо також їх.

Ультраметрика.

Слабкою ультраметрикою або *C-інфраметрикою* називають відстань $d(x, y) > 0$, $x \neq y$ визначену на множині X таку, що виконується нерівність:

$$d(x, y) \leq C \max\{d(x, z), d(z, y)\},$$

для будь-яких $x, y, z \in X$ та деякої константи $C \geq 1$.

Метричний простір (X, d) називається ультраметричним, якщо для нього виконується посилена нерівність трикутника, тобто для довільних $x, y, z \in X$,

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z)).$$

З цього визначення матимемо, що хоча б дві відстані $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(y, z)$ рівні. Таким чином будь-які три точки простору формують рівнобедрений трикутник, тому ультраметричний простір також називають *рівнобедреним простором*. Ультраметрика на множині X має щонайбільше $|X|$ різних значень[33]. Як приклад ультраметричного простору може слугувати простір ізольованих точок чи p -адичних чисел.

Розглянемо також деякі властивості метричних просторів. Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) — метричні простори.

Функція $f : X \rightarrow Y$ називається *гомеоморфізмом*, якщо вона є бієктивною, неперервною і її обернена функція f^{-1} також неперервна. Метричні простори X та Y називаються *гомеоморфними*, якщо між ними існує гомеоморфізм.

Бієктивне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *ізометрією*, або таким, що зберігає відстані, якщо для будь-яких $u, v \in X$,

$$d_X(u, v) = d_Y(f(u), f(v)).$$

Таким чином ізометрія є відображенням, яке ставить у відповідність елементи одного простору елементам іншого, при чому відстань між образами в новому метричному просторі еквівалентні праобразам елементів з оригінального простору.

Припустимо, що (X, d_X) та (Y, d_Y) — метричні простори із визна-

ченою ізометрією $f : X \rightarrow Y$. В такому випадку f буде обов'язково бієкцією, а функція обернена до неї

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow X$$

також буде ізометрією. Ізометричні простори X та $f(X)$ мають однакові значення метрик для відповідних пар точок, але при цьому можуть мати різну структуру (див. [34]).

Приклад 1. Покажемо, що простори $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою ізометричні. Справді, для довільної точки $x \in \mathbb{C}$, $x = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ образом $f(X)$ визначимо пару $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Відображення f є бієкцією і зберігає відстані, тобто є ізометрією.

Метричний простір (X, d_X) називається *ізометричним* до простору (Y, d_Y) якщо існує бієктивна ізометрія з X в Y . Всі ізометричні відображення простору в себе називаються ізометріями цього простору. Відносно операції суперпозиції ізометрії утворюють групу, яка називається групою ізометрій метричного простору.

В цілому, метрики дали можливість міряти відстані між точками. Вони дозволяються визначати діаметр для множин, а також міряти відстані між точками та множинами чи відстані між однією множиною та іншою.

Означення 1.1. Нехай маємо деякий метричний простір (X, d) та деяку його підмножину $A \subset X$. Діаметром множини A називатимемо максимальну з відстаней між точками, що входять до A .

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(u, v) | u, v \in A\}$$

Теорема 1.2. [34] Нехай маємо метричний простір (X, d) і дві підмножини A, B множини X для яких виконується наступне співвідношення $A \subset B \subset X$. В такому випадку $\text{diam}(B) \geq \text{diam}(A)$.

Природно припустити, що відстанню від деякої точки x до непорожньої множини A в деякому метричному просторі є відстань від x до найближчої точки з A . Але такої найближчої точки може не існувати, тому використовують інфімум відстаней між точкою x та точками з множини A .

Означення 1.3. Припустимо, що (X, d) — деякий метричний простір A — підмножина множини X . Відстанню від деякої точки $x \in X$ до підмножини A називатимемо

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

Деяка точка $s \in A$ обов'язково матиме нульову відстань з підмножиною A , але не обов'язково матиме нульову відстань до решти A , тобто до множини $A \setminus \{s\}$. Точки, що мають ненульову відстань до решти A називають ізольованими точками.

Означення 1.4. Нехай маємо метричний простір (X, d) і підмножину A множини X . Точку $s \in A$ називатимемо ізольованою точкою множини A , тоді й тільки тоді коли

$$\text{dist}(s, A \setminus \{s\}) \neq 0.$$

Теорема 1.5. [34] *Нехай маємо метричний простір X та деяку його непорожню скінченну підмножину A . В такому випадку кожна точка з A ізольована в A .*

Означення 1.6. Метричний простір (Z, d_Z) називається *еквідистантним*, якщо існує таке додатне дійсне число $c \in \mathbb{R}^+$, що

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_1 = z_2 \\ c, & \text{в іншому випадку для всіх } z_1, z_2 \in Z \end{cases} \quad (1.1)$$

Зауваження. Якщо $c = 1$, то еквідистантний простір є простором ізольованих точок.

Самі ж метричні простори можна задавати через матриці відстаней.

Означення 1.7. Нехай маємо деякий метричний простір (X, d) , $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, його *матрицею відстаней* називатимемо симетричну матрицю

$$M = (d_{ij})_{n \times n},$$

де $d_{ij} = d(x_i, x_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

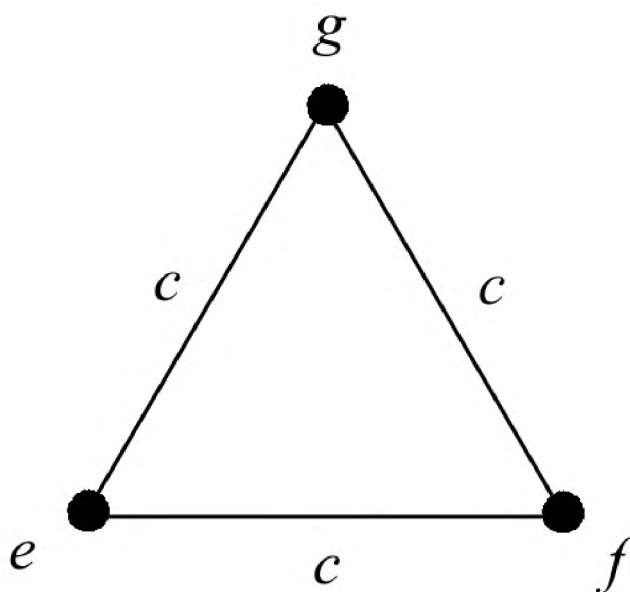
Для матриці відстаней справедливо наступне:

1. значення елементів, що знаходяться на головній діагоналі дорівнюють нулю $(d_{ii}) = 0, 1 \leq i \leq n$;
2. матриця є невід'ємною, тобто всі її недіагональні елементи є додатними;
3. матриця є симетричною $(d_{ij}) = (d_{ji}), 1 \leq i \leq n$;
4. виконується нерівність трикутника, таким чином $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$ для будь-яких i, j та k .

Приклад 2. Розглянемо матрицю відстаней для еквідистантного метричного простору на рисунку 1.1..

В такому випадку матимемо:

$$M = \begin{array}{c|ccc} \text{Точка} & e & f & g \\ \hline e & 0 & c & c \\ f & c & 0 & c \\ g & c & c & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.1. Метричний простір X

1.2. Графи. Основні означення, приклади

Означення 1.8. *Графом* називають пару $G = (V, E)$ множин, що задовільняють $E \subseteq [V]^2$, тобто елементи множини E є 2-елементними підмножинами множини V . Елементи множини V називаються *вершинами* (або *вузлами*, або *точками*) графу G , елементи множини E у свою чергу називають його *ребрами* [35]. Приклад графу зображено на рисунку 1.2..

Означення 1.9. Вершини v_1 та v_2 є *інцидентними* до ребра e , якщо вони з'єднані цим ребром, а самі ж вершини називають *суміжними* або *сусідніми* по відношенню одна до одної.

Стосовно ребра вершини називають *кінцевими вершинами* або просто *кінцями*, і ребро з'єднує кінці. Два ребра $e \neq f$ називають суміжними, якщо вони мають спільний кінець.

Означення 1.10. Якщо всі вершини графу G є попарно суміжни-

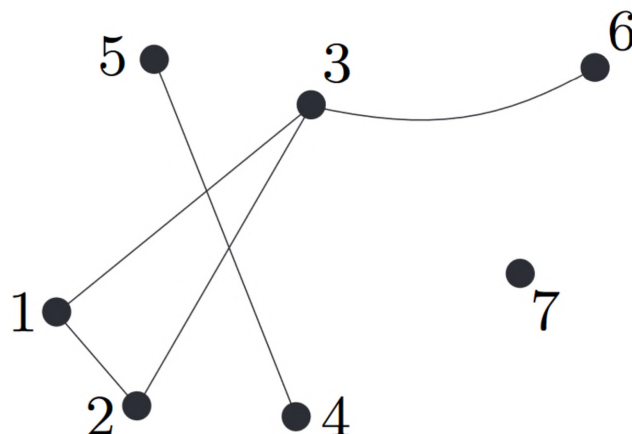


Рис. 1.2. Граф з множиною вершин $V = \{1, \dots, 7\}$ і множиною ребер $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (3, 6)\}$

ми, то такий граф називають *повним*.

Кількість вершин графу G називають його *порядком* і позначають як $|G|$. Графи можуть бути скінченними й нескінченними в залежності від їх порядку. Якщо іншого не вказано, то вважатимемо, що граф є скінченним.

Означення 1.11. *Шлях* uw — послідовність різних вершин $u = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ таких, що вершини v_{i-1} є суміжними з v_i для всіх $i = 1 \in n$, і кажуть, що такий шлях має довжину n .

Шлях uv довжиною n формує *цикл* і позначається як C_n . Серед усіх шляхів uw , шлях з мінімальною довжиною називається *найкоротшим шляхом*, який також називають *геодезичним*. Трикутник сформований в графі G називають *циклом довжини 3*. Граф називають *з'єднаним* якщо існують шляхи між довільною парою його вершин.

Граф який є скінченним і неорієнтованим (тобто таким, в якого ребра не мають напрямку) без кратних ребер і петель називають *простим*.

Одним з варіантів задання графу може бути матриця суміжності.

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\ \hline v_1 & * & * & * & \dots & * \\ v_2 & * & * & * & \dots & * \\ v_3 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & * & * & * & \dots & * \end{array} \right).$$

Елементи матриці вказують на те чи є пари вершин суміжними в графі чи ні. Матриця ж у свою чергу є квадратною. У випадку коли граф є ненаправленим матриця суміжності буде симетричною.

Також можуть використовувати *реберну матрицю суміжності* для опису простих графів.

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ \hline e_1 & * & * & * & \dots & * \\ e_2 & * & * & * & \dots & * \\ e_3 & * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n & * & * & * & \dots & * \end{array} \right),$$

де $*$ дорівнюватиме 1, якщо два ребра e_i та e_j суміжні та 0 — в іншому випадку.

Для простого графа $G = (V, E)$ матрицю суміжності $A = (a_{ij})_{n \times n}$ можна визначити як:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i v_j \in E; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тобто елементами матриці A будуть 1, якщо існує ребро з вершини v_i до вершини v_j і 0, якщо ребра нема. На діагоналі завжди ма-

тимемо нулі бо ребра від вершини до неї ж заборонені в простих графах.

Приклад 3. Для графу зображеного на рисунку 1.2. матриця суміжності матиме наступний вигляд:

$$B = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

За аналогією для простих графів розглядають також реберну матрицю суміжності в якій елементи дорівнюють одиниці, якщо відповідні ребра e_i та e_j суміжні, і нулю — якщо ні. Також деякий граф $G = (V, E)$ з $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ та $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ можна визначати через матрицю інцидентності $B = (b_{ij})_{n \times m}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq$

$j \leq m$ як:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \in e_j; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Приклад 4. В нашому випадку граф зображений на рисунку 1.2.

матиме матрицю інцидентності наступного вигляду:

$$B = \begin{array}{c|ccccc} & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (4,5) & (3,6) \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо подивитись на матрицю інцидентності, то можна відмітити, що сума кожної колонки дорівнюватиме двом, оскільки кожне ребро має дві вершини прикріплені до кожного з кінців.

Граф L називають *підграфом* графу G , якщо кожна вершина L є вершиною графу G і кожне ребро в L є також ребром в G . Якщо L є підграфом графу G і містить всі ребра G , що з'єднують дві вершини

$V(L)$, тоді L називають *індукованим підграфом* й позначають $\langle L \rangle$.
Максимальний з'єднаний підграф G називають *компонентою*.

Означення 1.12. Нехай маємо два графи $G = (V, E)$ та $G' = (V', E')$. Називатимемо G та G' ізоморфними, якщо існує бієкція

$$\phi : V \rightarrow V', xy \in E \leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E',$$

для будь-яких $x, y \in V$. А саме таке відображення ϕ називається *ізоморфізмом*.

Ациклічний граф, тобто такий, що не має циклів, називається *лісом*.

Означення 1.13. *Деревом* називають неорієнтований зв'язний граф в якому між довільними двома вершинами існує рівно один шлях. Також еквівалентно можна визначити дерево як з'єднаний ациклічний неорієнтований граф. Таким чином ліс це граф компоненти якого — дерева.

Теорема 1.14. [35] Для графа T еквівалентними будуть наступні твердження:

1. T — дерево;
2. дві будь-які вершини графу T з'єднані унікальним шляхом;
3. граф T — мінімально з'єднаний, тобто для будь-якого ребра $e \in T, T - e$ — незв'язний;
4. граф T — максимально ациклічний, тобто граф T не містить циклів, але граф $T + uv$ міститиме, для будь-яких двох несуміжних вершин $u, v \in T$.

Наслідок 1.15. [35] Ми завжди можемо пронумерувати вершини дерева як $u_1, u_2, \dots, u_n$ таким чином, що для кожного $u_i, i > 1$ знайдеться єдина суміжна вершина з множини $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$.

Наслідок 1.16. [35] З'єднаний граф з n вершинами буде деревом тоді й тільки тоді, якщо він має $n - 1$ ребро.

Для дерева T_m листком називатимемо всі вершини, що мають степінь 1, і внутрішніми вершинами, ті з вершин, що мають розмірність щонайменше 3. Будь-яке нетривіальне дерево матиме хоча б 2 вершини. Казатимемо, що внутрішня вершина v є близькою до листка l , якщо на шляху між ними немає жодних інших внутрішніх вершин. Іншими словами, v та l з'єднані шляхом з вершинами степеня 2. Кількість листків внутрішньої вершини v позначатимемо n_v .

Дерево T називається *кореневим*, якщо в ньому зафіксовано вершину v_0 *корінь дерева*. Вибір кореню v_0 в дереві T вводить відношення часткового порядку на множині вершин $V(T)$ припускаючи, що $q \leq p$, якщо q належить унікальному шляху від кореня v_0 до вершини p . Варто зазначити, що v_0 буде найменшим елементом, а кожен листок буде максимальним.

Означення 1.17. Вершина v називається вершиною m -го рівня, якщо виконується рівність $d_t(v_0, v) = m$, тобто відстань від кореня до цієї вершини дорівнює m .

Всі вершини m -го рівня в дереві T позначатимемо L_m .

1.3. Метрична розмірність графів і метричних просторів

Для довільного графа G можна визначити метрику d_G між двома вершинами x та y , яка дорівнюватиме довжині найкоротшого шляху між цими вершинами або 0, якщо ці вершини рівні.

Означення 1.18. Діаметром скінченного графа G називатимемо максимальну серед відстаней між всіма парами вершин графа.

$$\text{diam}_G = \sup_{x,y \in V(G)} d_G(x,y)$$

Скінченні метричні простори на графах описуються теоремою:

Теорема 1.19. [36] *Деякий метричний простір визначений графом буде ізометричний деякому метричному простору (X, d) тоді й тільки тоді коли:*

1. метрика d приймає тільки цілі значення;
2. для двох довільних точок $x, y \in X$ для яких виконується

$$d(x, y) \geq 2$$

існує така точка $z \in X$, що виконуватиметься наступна рівність:

$$d(x, y) = d(z, x) + d(z, y)$$

Приклад 5. Як приклад метричного простору визначеному на графі розглянемо матрицю відстаней для метричного простору на рисунку 1.3..

Як відстань візьмемо відстань визначену на графах. В такому

випадку матимемо:

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} \text{Точка} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} & \text{f} & \text{g} \\ \hline \text{a} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ \text{b} & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ \text{c} & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \text{d} & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{e} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \text{f} & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \text{g} & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

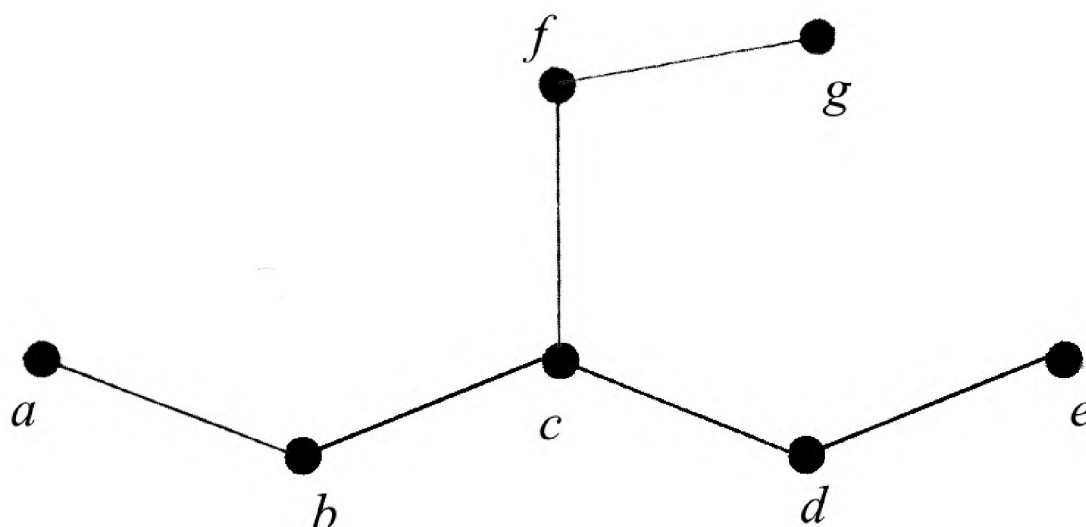
Також, можна розглянути дещо інший варіант метрики на графі. Визначимо функції відстані наступним чином:

$$\bar{d}_G(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y : \\ 1, & \text{якщо } x, y \text{ — суміжні;} \\ 2, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Таку метрику $\bar{d}$ на графі G називають зрізаною або редукованою відстанню[37].

Означення 1.20. Кажуть, що вершина $t \in V(G)$ розділяє дві різні інші вершини x та y якщо

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

Рис. 1.3. Метричний простір X

Означення 1.21. Множина T називається *метричним генератором* графу G , якщо будь-яка пара вершин з G розділяється деяким елементом $t \in T$. Метричний генератор з мінімальною кількістю елементів називають *метричним базисом*, а його потужність *метричною розмірністю*, й позначають $md(G)$.

Для генератора T і вершини $x \in V(G)$, $(d_G(t, x))_{t \in T}$ — є вектором *метричних координат* вершини x (див. [5]).

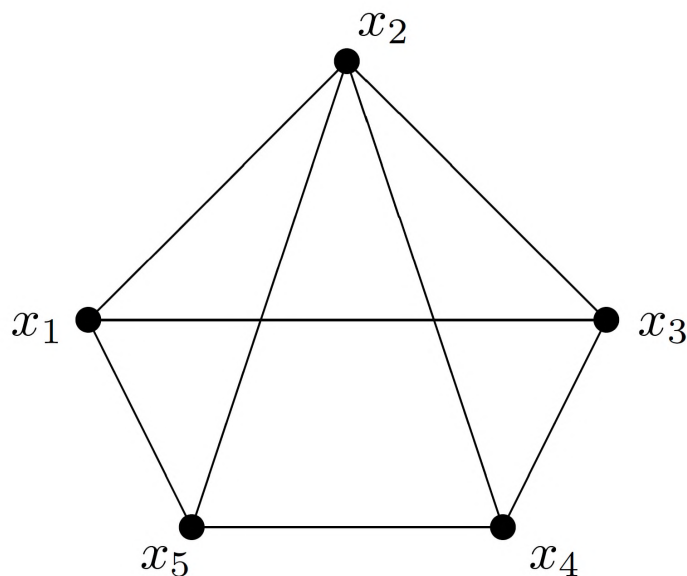
Приклад 6. Розглянемо граф зображений на рисунку 1.3.. В даному графі в метричний базис входять вершини x_3 і x_4 . Вузол x_3 не розділятиме x_1 і x_2 , бо

$$d_G(x_1, x_3) = d_G(x_2, x_3) = 1.$$

Оскільки

$$d_G(x_1, x_4) = 2 \text{ і}$$

$$d_G(x_2, x_4) = 1$$

Рис. 1.4. Граф G

матимемо, що x_4 розділяє x_1 і x_2 . В свою чергу x_4 не є розділяючою для x_3 і x_5 , але ці вершини розділятимуться x_3 , бо,

$$d_G(x_3, x_3) = 0, \text{ і}$$

$$d_G(x_3, x_5) = 2.$$

Таким чином, довільна пара вершин з V розділятиметься x_3 і x_4 . Як результат маємо, що множина $\{x_3, x_4\}$ є метричним генератором графу G . Зауважимо, що жодна з цих двох вершин не утворює метричний генератор, а відповідно $\{x_3, x_4\}$ є метричним базисом.

Приклад 7. Метрична розмірність графу Петерсона $G(5, 2)$ зображеного на рисунку 1.3. дорівнює 3 і його метричний базис складається з вершин u_1, u_2, u_3 .

Теорема 1.22. [38] З'єднаний граф G порядку n матиме розмірність 1 тоді й тільки тоді коли він є ланцюгом $G = P_n$

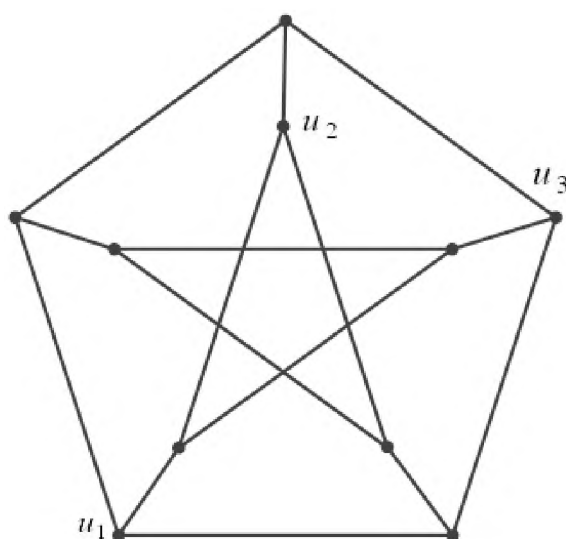


Рис. 1.5. Граф Петерсона

Теорема 1.23. [38] З'єднаний граф G порядку $n \geq 2$ матиме розмірність $n - 1$ тоді й тільки тоді коли він є повним $G = K_n$

Теорема 1.24. [5] Якщо T_m дерево, не ланцюг, то

$$\dim(T) = \sum_{v \in V'(T), n_v \geq 1} (n_v - 1), \quad (1.2)$$

де $V'(T)$ — множина всіх внутрішніх вершин дерева T .

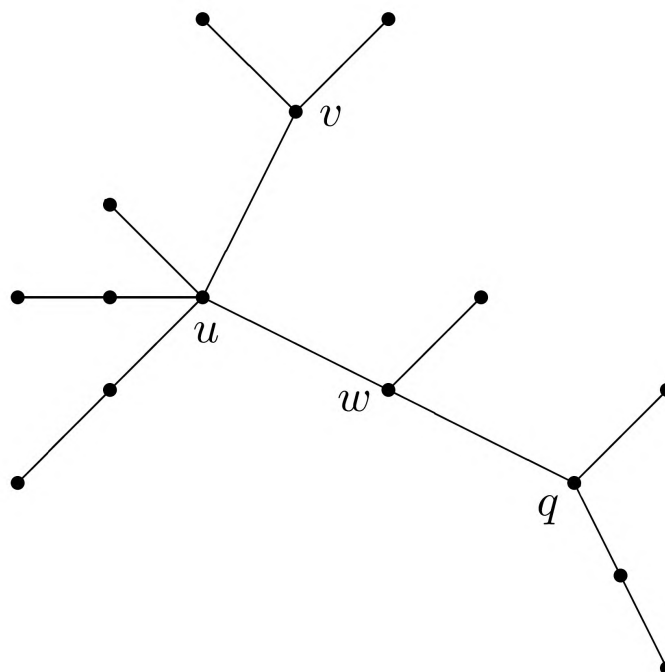
Приклад 8. Підрахуємо метричну розмірність дерева T , що зображено на рисунку 1.3.. На ньому можна побачити, що внутрішні вершини мають наступну розмірність:

$$n_u = 3, n_v = 2, n_w = 1, n_q = 2.$$

Таким чином матимемо:

$$\dim(T) = (3 - 1) + (2 - 1) + (1 - 1) + (2 - 1) = 2 + 1 + 0 + 1 = 4.$$

За аналогією до метричної розмірності графу вводять поняття метричної розмірності метричного простору.

Рис. 1.6. Дерево T

Нехай (X, d) — метричний простір. Кажуть, що непорожня підмножина A множини X розділяє (X, d) якщо для будь-яких $a \in A$ з $d(x, a) = d(y, a)$ випливає, що $x = y$.

Означення 1.25. Метричною розмірністю $md(X)$ метричного простору (X, d) називають найменшу з потужностей k розділяючих підмножин множини X , а саму підмножину мінімальної розмірності називають метричним базисом простору (X, d) .

Приклад 9. Припустимо, що X — деяка множина, що має потужність s , $2 \leq s < \infty$, а на ній визначено дискретну метрику d . В такому випадку метричний простір (X, d) матиме метричну розмірність $s - 1$. Оскільки метрика визначена на множині вершин графа G буде дискретною метрикою V , для будь-якої додатної потужності s , то існує повний граф G множина вершин якого має метричну розмірність $s - 1$.

1.4. Складність алгоритмів. Складність задачі обчислення метричної розмірності

Алгоритмом називається покрокова процедура пошуку розв'язку задачі, тобто це послідовне виконання простих кроків, що перетворюють слова вхідного алфавіту в вихідний.

Згідно з [39], алгоритми мають розв'язувати задачі які є конкретно сформульовані та мають наперед відомі варіанти відповіді, заданої для елементів деякої множини K . Для будь-якого елементу $t \in K$ алгоритм знаходить значення $p \in P$. Алгоритм $\mathcal{A}$ має задовольняти таким умовам:

- 1) для будь-якого елементу $t \in K$ має бути однозначно визначено елемент $p \in P$, $\mathcal{A}$ мусить бути *універсальним*;
- 2) алгоритм мусить бути *направленим*, таким чином на кожному етапі алгоритму мусить чітко визначатись, що буде отримано в результаті виконання цього етапу, навіть у випадку коли процедура, яка мала б виконуватись на цьому етапі, не застосовувалась;
- 3) кроки алгоритму є *елементарними*, це означає, що їх виконання має бути локальним та простим;
- 4) виконання алгоритму мусить бути *дискретним*. Це означає, що в дискретні моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_n$ алгоритм виконує елементарні процедури $E_1, E_2, \dots, E_n$ так, що

$$p = E_n(\dots E_2(E_1(m))),$$

де n — деяка кількість елементарних процедур, що залежить від m ;

- 5) $\mathcal{A}$ має бути *детермінованим*, тобто на кожному етапі його виконання результат роботи цього етапу визначає лише елементарна процедура, яка виконується на цьому етапі, а також результати виконання елементарних процедур, що виконувались раніше;
- 6) $\mathcal{A}$ має бути *масовим*, таким чином множина K є або нескінченною, або принаймні дуже великою.

Для деякого алгоритму, що переводить вхідний алфавіт X у вихідний алфавіт Y множину всіх слів в алфавіті X позначатимемо як X^* , а конкретне слово $w \in X^*$ називатимемо *екземпляром задачі*, або *індивідуальною задачею*. Тобто екземпляр задачі це деяка вхідна послідовність над алфавітом. Обсяг вхідної інформації ж визначають як довжину слова w . Довільну задачу можна розглядати як нескінченну кількість екземплярів цієї задачі разом з рішенням цих екземплярів. Поняття задачі, в теорії складності обчислювань, відноситься до абстрактного питання яке потребує вирішення.

Як приклад можна навести задачу сортування цілих чисел в зростаючому порядку. Формально її можна визначити наступним чином:

- вхід, що складатиметься з деякої послідовності чисел довжиною n , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- вихід, який у свою чергу представлятиме перестановку $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ початкової послідовності таку, що $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$.

Таким чином, якщо вхідна послідовність матиме наступний вигляд $\{14, 43, 32, 87, 56\}$, то вихідна послідовність буде наступною $\{14, 32, 43, 56, 87\}$. Екземпляром задачі сортування буде подібний приклад вхідної послідовності.

Кажуть, що алгоритм *розв'язує* задачу Π , якщо алгоритм можна застосувати до будь-якого екземпляру l задачі Π і ми гарантовано отримаємо розв'язок для цього екземпляру l . [6]

При дослідженні алгоритмів оцінюється складність, яку у свою чергу поділяють на *складність за об'ємом пам'яті* та *складністю за часом виконання*. Ми зосередимось на складності за часом виконання, тому надалі визначення наводитимуться в контексті цього варіанту.

Загалом ми зацікавлені в пошуку найбільш ефективного алгоритму для розв'язання задачі

$$A : K \rightarrow Y^*, K \subseteq X^*,$$

й оцінюємо деяку функцію $f_A(n) = s$, де n — довжина $|w|$ вхідного слова $w \in K$, а s — необхідна кількість кроків, щоб перетворити вхідне слово на вихідне. Тобто такого алгоритму, який можна виконати за найменшу кількість кроків. Часові вимоги до алгоритму виражаються однією змінною, а саме розміром задачі, що відображає кількість вхідних даних необхідних для опису екземпляру задачі.

Функція часової складності алгоритму описує необхідний час, для кожної з можливих вхідних довжин, необхідний для вирішення екземпляру задачі цього розміру.

Казатимемо, що функція $f_A(n)$ являє собою $O(g(n))$, якщо існує така константа c , що $|f(n)| \leq c|g(n)|$ для будь-яких $n \geq 0$. *Поліноміальним алгоритмом* називатимемо такий алгоритм, функція часової складності якого становить $O(p(n))$ для деякої поліноміальної функції p , $f_A(n) \leq cp(n)$, де n — вхідна довжина. Алгоритм, часову складність якого ми не можемо так обмежити, називатимемо *експоненційним алгоритмом*. Тобто називатимемо алгоритм A

експоненційним, якщо існує $C > 0$ при якому справедлива наступна нерівність

$$f_A(n) \geq 2^{n^C},$$

для довільної довжини n .

Порівнюючи складності алгоритмів використовують поняття *оракульного алгоритму*. Оракулом називатимемо певну функцію $\mathcal{O} : X^* \rightarrow Y^*$ над алфавітами X, Y . Під алгоритмом зі зверненням до оракула мають на увазі звичайний алгоритм A , який на певному кроці може отримати деяке слово $q \in X^*$, що надалі використовуватиметься в алгоритмі, в результаті запиту до оракула $\mathcal{O}(q)$. Вважається, що запит до оракула виконують за один елементарний крок, час роботи якого не враховується. Алгоритм A , що здійснює запит до оракула $\mathcal{O}$ позначатимемо $A^{\mathcal{O}}$.

Для того, щоб показати зв'язок між задачами їх зводять одна до іншої. Кажуть, що задача Π_1 зводиться до задачі Π_2 , якщо існує оракульний алгоритм $A^{\mathcal{O}}$, що розв'язує Π_1 , в тому випадку коли функція, що знаходить розв'язок Π_2 виступає оракулом цього алгоритму. Таким чином встановлюється трансформація, яка відображає всі екземпляри однієї задачі в еквівалентний екземпляр іншої. Стівеном Куком було показана [40] важливість зведення задач за поліноміальний час, тобто можливість побудувати трансформації для відображення однієї задачі до іншої за поліноміальний час.

Задача Π_1 за поліноміальний час зводиться до Π_2 , якщо є поліноміальний за часом алгоритм, який зводить задачу Π_1 до задачі Π_2 .

Теорема 1.26. [41] *Нехай маємо деякі алгоритмічні задачі Π_1, Π_2, Π_3 , тоді*

- 1) Якщо задача Π_1 зводиться поліноміально до Π_2 , а задача Π_2 поліноміально зводиться до Π_3 , то задача Π_1 буде поліноміально зводитись до задачі Π_3 .
- 2) Якщо задача Π_1 може бути поліноміально зведена до Π_2 , а задача Π_2 розв'язується за поліноміальний час, то й задача Π_1 також може бути розв'язана за поліноміальний час.
- 3) Якщо є ймовірнісне поліноміальне зведення задачі Π_1 до задачі Π_2 з наявністю ймовірності помилки, і Π_2 в свою чергу розв'язується за поліноміальний час, то задача Π_1 розв'язується ймовірнісний поліноміальним алгоритмом з такою ж вірогідністю помилки.

Задачі відносять до класу P задач, якщо існує алгоритм знаходження їх розв'язку за поліноміальний час. У свою чергу клас NP задач характеризується як задачі які можуть бути вирішені за поліноміальний час на недетермінованому комп'ютері, тобто ми можемо за поліноміальний час перевірити чи є об'єкт розв'язком. На сьогодні невідомо чи $P=NP$, і є найбільш відомим питанням теорії обчислень.

Також Куком (див. [40]) було показано, що задача перевірки чи є булева функція тотожно істинною є NP -повною. NP -повною називають таку задачу, до якої можна звести довільну задачу класу NP . Задача перевірки булевих функцій перевіряє чи задана формула є тотожно істинною

$$SAT = \{f, f \text{ — тотожно істинна булева функція}\}$$

Теорема 1.27. *Перевірка булевих формул є NP -складною задачею.*

Одним з окремих випадків перевірки булевих функцій є задача перевірки тотожної істинності булевих функцій в 3-кон'юнктивній нормальній формі 3-CNF-SAT або просто 3-SAT. Визначають цю задачу наступним чином.

Теорема 1.28. [42] *Задача перевірки булевих функцій в третій кон'юнктивній нормальній формі є NP -повною.*

Окрім поняття NP -повних задач, також використовують поняття NP -складних задач. Задачу Π називають NP -складною, якщо для всіх задач H з класу NP існує поліноміальне зведення з H в Π .

Теорема 1.29. [42] *Якщо будь-яка з NP -повних задач розв'язується за поліноміальний час, то $P=NP$. Еквівалентним до цього твердження буде сказати, що якщо будь-яка задача з класу NP не розв'язується за поліноміальний час, то жодна з NP -повних задач не розв'язується за поліноміальний час.*

Саме з цієї причини дослідження навколо питання чи $P=NP$ зосереджено навколо NP -повних задач. Більшість дослідників вірять, що $P \neq NP$. Різні погляди щодо відношення різних класів складності алгоритмів можна побачити на рисунку 1.4..

Як приклад NP -повної задачі можна навести задачу з пошуку кліки в графах.

Клікою неорієнтованого графа $G = (V, E)$ називають підмножину вершин $V' \subset V$, кожна пара яких з'єднана ребром з множини E . Тобто кліка це повний підграф графу G . Розміром кліки називають кількість вершин, що до неї входять. Задача пошуку кліки полягає в пошуку кліки максимального розміру в графі, і ця задача є задачею оптимізації. Як задачі перевірки ми можемо просто диви-

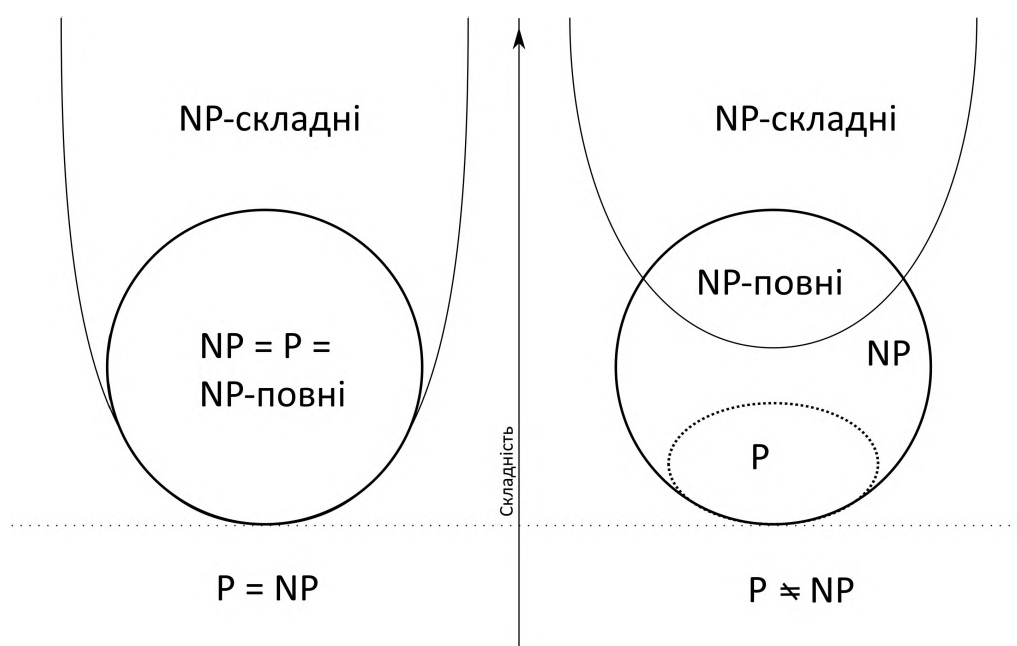


Рис. 1.7. Співвідношення між класами P, NP, NP-повних та NP-складних задач

тись чи існує кліка заданого розміру n в графі й формальний опис виглядає наступним чином [42]

$$CLIQUE = \{(G, n) : G \text{ граф, що містить кліку розміру } n\}.$$

Базовий алгоритм перевірки чи граф $G = (V, E)$ містить кліку розміру n полягає в перерахуванні всіх n -підмножин множини вершин V і перевірки кожної чи формує вона кліку.

В роботі [6] Гері й Джонсон показали, що задача пошуку метричної розмірності в графах є NP-складною зведенням її до задачі 3-мірного узгодження.

Сама ж задача 3-мірного узгодження є більш загальною версією задачі про "проблему одруження". Нехай ми маємо m незаміжніх жінок та m неодружених чоловіків, а також список всіх пар жінок та чоловіків, які були б не проти одружитися разом. То питання полягає в тому чи можна організувати так m шлюбів, щоб уникнути полігамних стосунків і кожен би отримав задовільного партнера? В

задачі 3-мірного узгодження, маємо 3 множини X, Y та Z , що не перетинаються, а також множину P , що є підмножиною множини $X \times Y \times Z$. Множина $D \subseteq P$ буде 3-мірною відповідністю, якщо виконуватиметься наступна умова: для довільних двох точок $u, v \in D$ відповідні координати різні $x_u \neq x_v, y_u \neq y_v, z_u \neq z_v$.

Теорема 1.30. [6] *Задача 3-мірного узгодження — NP-повна.*

Також, питання NP-складності задачі пошуку метричної розмірності було розглянуто в роботі[4], де було показано, що задача перевірки чи є метрична розмірність менше якогось заданого значення зводиться до задачі здійсненності булевої формули у вигляді 3-кон'юнктивної нормальної форми.

Теорема 1.31. [4] *Для довільного графа $G = (V, E)$, а також цілого додатного числа k , перевірка чи $md(G) \leq k$ є NP-повною задачею.*

1.5. Конструкції метричних просторів

1.5.1. Метрична трансформація

Нехай s – неперервна монотонно зростаюча функція і $s(0) = 0$. Таку функцію називатимемо *шкалою*. *Трансформацією* метричного простору (X, d_X) називають простір $(X, s(d_X))$, де для функції $s(d_X)$ може не виконуватись нерівність трикутника [27]. Трансформація називається *метричною*, якщо $s(d_X)$ – метрика.

Твердження 1.32. [1] *Якщо (X, d_X) – метричний простір і $g(u, v) = s(d_X(u, v))$ для будь-яких $u, v \in X$, то (X, g) буде також метричним простором.*

Означення 1.33 ([27]). Якщо для метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) існує бієкція $g : X \rightarrow Y$ та шкала s така, що для будь-яких елементів $u, v \in X$ виконується

$$d_X(u, v) = s(d_Y(g(u), g(v))),$$

тоді такі метричні простори називаються *ізоморфними*.

Зокрема, метрику трансформації можна отримати з початкової метрики d (або початкових метрик d_1 та d_2) використовуючи наступні операції (для деякої дійсної константи $t > 0$) [33]:

1. $td(x, y)$ – розширена метрика, масштабована метрика;
2. біотопна метрика трансформації

$$d^p(x, y) = \frac{2d(x, y)}{d(x, p) + d(y, p) + d(x, y)},$$

де p - фіксована точка простору X .

3. $d^t(x, y), 0 < t \leq 1$;
4. $\ln(d(x, y) + 1)$;
5. $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

Приклад 10. Як приклад метричної трансформації розглянемо розширену метрику з константою $t = 3$ і застосуємо її до метричного простору X , з відстанню визначеною на графах, зображеному на рисунку 1.3.. В такому випадку матриця відстаней метричного

простору матиме наступний вигляд:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 9 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 12 & 9 & 6 & 3 & 0 & 9 & 12 \\ 9 & 6 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 9 & 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Розглянемо конструкції метричних просторів

1.5.2. Вінцевий добуток метричних просторів

Означення 1.34. Метричний простір (X, d) називається рівномірно дискретним якщо існує радіус $r > 0$, що для будь-яких $u, v \in X$, $d(u, v) > r$ або $u = v$.

Метричний простір називається обмеженим метричним простором, або метричним простором обмеженого діаметра, якщо існує $c \in \mathbb{R}^+$, таке, що для будь-яких $y_1, y_2 \in Y$ виконується нерівність $d(y_1, y_2) \leq c$. Нехай (X, d_X) – рівномірно дискретний метричний простір, а (Y, d_Y) обмежений метричний простір. Оскільки простір (X, d_X) рівномірно дискретний, то існує радіус r такий, що для двох довільних елементів x_1, x_2 множини X виконується нерівність $d_X(x_1, x_2) \geq r$. Визначимо також шкалу $s(x)$ таку, що

$$\text{diam}(s(Y)) < r \tag{1.3}$$

Визначимо також функцію ρ_s на вінцевому добутку просторів

$X \times Y$:

$$\rho_s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_X(x_1, x_2), & \text{якщо } x_1 \neq x_2 \\ s(d_Y(y_1, y_2)), & \text{якщо } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Метричний простір з такою метрикою називається *вінцевим добутком* просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) , а також позначається як $XwrY$ [30].

Твердження 1.35. [30] *Нехай s_1 та s_2 шкали для яких виконується нерівність 1.3. Тоді простори $(X \times Y, \rho_{s_1})$ та $(X \times Y, \rho_{s_2})$ ізоморфні.*

Вінцевий добуток просторів X та Y з визначеною шкалою s можна описати також наступним чином. Кожна точка з X заміщується ізометричною копією $s(Y)$, тобто ізоморфною копією Y . І відстань між елементами u та v визначається за наступними правилами:

- якщо u та v належать до різних копій $s(Y)$, $u \in s(Y)_{x_1}$ та $v \in s(Y)_{x_2}$, $x_1 \neq x_2$ тоді відстань між ними буде $d_X(x_1, x_2)$
- якщо u та v належать до тієї ж копії $s(Y)$, то відстань між ними буде $s(d_Y(u, v))$

Твердження 1.36. [30] *Нехай маємо метричні простори (X, d_X) , (Y, d_Y) та (Z, d_Z) . Припустимо, що простори X та Y мають обмежені знизу деяким додатним числом метрики d_X та d_Y . Також припустимо, що діаметри метричних просторів Y та Z скінченні. В такому випадку ізоморфними будуть простори $(XwrY)wrZ$ та $Xwr(YwrZ)$.*

Основні ж властивості вінцевого добутку метричних просторів можна визначити наступною теоремою:

Теорема 1.37. [30]

1. $XwrY$ — сепарабельний простір тоді й тільки тоді, коли X та Y сепарабельні метричні простори.
2. $XwrY$ — ультраметричний простір тоді й тільки тоді, коли X та Y ультраметричні метричні простори.
3. $XwrY$ — компактний простір тоді й тільки тоді, коли X є скінченним простором, а Y — компактным.
4. $XwrY$ — повним простором тоді й тільки тоді, коли Y є повним метричним простором.

1.5.3. Пряма сума метричних просторів

Розглянемо скінченну послідовність просторів скінченного діаметра

$$(X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2}), \dots, (X_n, d_{X_n}).$$

Нехай c — деяка додатна константа, для якої виконується нерівність наступного вигляду:

$$\max\{\text{diam}(X_1), \dots, \text{diam}(X_n)\} < c. \quad (1.4)$$

Також визначимо функцію на об'єднанні множин $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$

$$\tau_c(u, v) = \begin{cases} d_{X_i}(u, v), & \text{якщо } u, v \in X_i \\ c, & \text{в іншому випадку} \end{cases}, \quad (1.5)$$

тобто значення функції $\tau_c(u, v)$ буде відповідати відстані між елементами u та v в метричному просторі $X_i, i = 1, \dots, n$ у випадку коли обидва елементи u, v належать одній і тій же множині X_i . В іншому ж випадку, коли вони знаходяться в різних множинах X_i та $X_j, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ значення функції дорівнюватиме константі c .

Конструкція названа прямою сумою метричних просторів, оскільки група ізометрій прямої суми метричних просторів ізоморфна як група підстановок прямій сумі груп ізометрій цих просторів (див. [45]).

Теорема 1.38. [45] *Функція визначена на множині $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ формулою 1.5 є метрикою на цій множині.*

Означення 1.39. Простір $(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \tau_c)$ називається c -прямою сумою метричних просторів $X_i, i = 1, \dots, n$

Твердження 1.40. *Нехай c_1 та c_2 додатні числа, для яких виконується нерівність 1.5. В такому випадку простори $(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \tau_{c_1})$ та $(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \tau_{c_2})$ ізоморфні.*

1.5.4. Прямий добуток метричних просторів

Прямим добутком метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називається метричний простір визначений на множині $X \times Y$ та заданою на ній однією з трьох метрик d_1 , d_2 або d_∞ (див. [34]):

1. $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2);$
2. $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2};$
3. $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$

Оскільки метричні простори $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$, $(X \times Y, d_\infty)$ топологічно еквівалентні, то часто не уточнюють, як саме задається метрика.

Для описаних вище метрик і для будь-яких $u, v \in \prod_{i=1}^n X_i$ виконується наступна нерівність:

$$d_\infty(u, v) \leq d_2(u, v) \leq d_1(u, v). \quad (1.6)$$

Метрика d_2 часто називається Евклідовою метрикою на добутку метричних просторів.

Приклад 11. Розглянемо відстань між двома точками u та v в метричних просторах з метриками d_1, d_2 та d_∞ визначених на добуткові метричних просторів (X_i, d_{X_i}) як зображено на рисунку 1.5.4.. Нехай відстань між ними в першому просторі становить $d_{X_1}(u, v) = 1.1$, в другому $d_{X_2}(u, v) = 2.2$, і за аналогією в інших $d_{X_3}(u, v) = 0.3$, $d_{X_4}(u, v) = 0.5$, $d_{X_5}(u, v) = 0.8$, $d_{X_6}(u, v) = 0.7$, $d_{X_7}(u, v) = 1$. В такому випадку $d_1(u, v) = 6.6$, $d_2(u, v) = 2.92$, $d_\infty(u, v) = 2.2$.

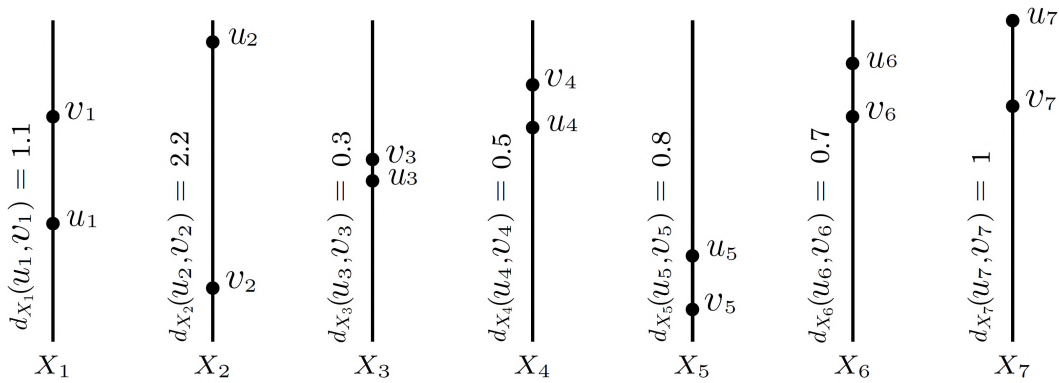


Рис. 1.8. Графічне представлення двох точок u та v в добуткові метричних просторів $\prod_{i=1}^7 X_i$

Теорема 1.41. [34] Припустимо, що ми маємо непорожні метричні простори (X_i, d_i) , $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Нехай d буде однією з метрик d_1, d_2, d_∞ , визначеною на добутку $P = \prod_{i=1}^n X_i$. Для кожного $j = 1..n \in \mathbb{N}$ та $a \in P$ визначимо множини

$$X_{j,a} = \{x \in P \mid x_i = a_i \text{ для всіх } i = 1, \dots, n \setminus \{j\}\}.$$

В такому випадку відображення $x \rightarrow x_j$ буде ізометрією з $X_{j,a}$ в X_j .

1.6. Огляд відомих результатів

Більш дослідженою є метрична розмірність графів. Розглянемо деякі відомі результати.

Ланцюг це непустий граф $P = (V, E)$, де множина вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, а множина ребер $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Вершини v_1 та v_n називаються кінцями та є з'єднаними шляхом P [35].

Граф є напівнескінченим ланцюгом, якщо він має вершини v_j і ребра $[v_j, v_{j+1}]$ де $j = 1, 2, \dots$; нескінченим в обидва боки ланцюгом якщо він має вершини v_k і ребра $[v_k, v_{k+1}]$ для всіх цілих k .

Теорема 1.42. [4] *Граф має метричну розмірність 1 тоді й тільки тоді коли він є скінченим чи напівнескінченим ланцюгом. Нескінчений в обидва боки шлях має метричну розмірність, що дорівнює 2.*

Для графів H та G диз'юнктивне об'єднання позначатимемо як $G \cup H$, а граф отриманий диз'юнктивним об'єднанням H та G з'єднуючи кожную вершину H з кожною вершиною G позначатимемо як $H + G$

Теорема 1.43. [38] *Нехай G — зв'язаний граф порядку $n \geq 4$. Тоді метрична розмірність графу G :*

$$\dim(G) = n - 2$$

тоді й тільки тоді, коли G :

- повний дводольний ($G = K_{s,t}$, $s, t \geq 1$)
- створений через приєднання графів: $G = K_s + K_t$, ($s \geq 1, t \geq 2$);
- $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$, ($s, t \geq 1$).

Колесом W_{n+1} або $W_{1,n}$ називають граф з $n+1$ -вершинами $n \geq 3$, який будують з'єднуючи єдину вершину з іншими, утворюючи n циклів. Приклади зображені на рисунку 1.6.

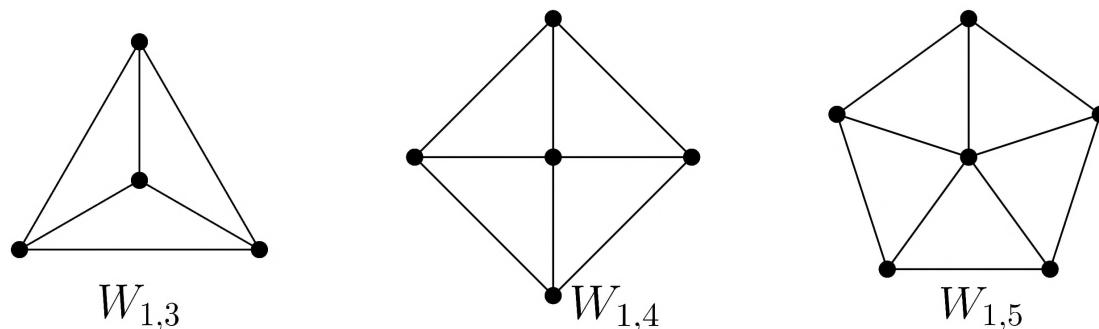


Рис. 1.9. Приклади коліс

В 1976 Ф. Харарі та Р. Мелтер[2] написали, що метрична розмірність коліс дорівнює двом $md(W_{1,n}) = 2$. Б. Шапмуха в роботі [7] було показано, що цей результат не відповідає дійсності для великих значень n . Згідно з теоремою 1.23 маємо, що метрична розмірність повного графа K_n для $n > 1$ становить $n - 1$, також колесо $W_{1,3}$ ізоморфне повному графу K_4 і таким чином матимемо, що $md(W_{1,3}) = md(K_4) = 3 \neq 2$. В цій статті автори також показали як знайти метричну розмірність коліс.

Теорема 1.44. [7] *Нехай маємо деякий граф колесо $W_{1,n}$, де $n \geq 3$. Тоді*

$$dim(W_n) = \begin{cases} 3, \text{ якщо } n = 3 \text{ або } n = 6; \\ \lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor, \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Розглянемо трохи детальніше графи, що мають метричну розмірність 2.

Теорема 1.45. *Якщо C_n — цикл порядку n , тоді його метрична розмірність $md(C_n)$ дорівнює 2.*

Теорема 1.46. [4] Граф G , що має метричну розмірність $md(G) = 2$, не містить ані K_5 , ні $K_{3,3}$ в якості підграфу.

Зауваження. Твердження може бути розширено і показано, що граф G з метричною розмірністю $md(G) = k$ не може містити K_{2^k+1} своїм підграфом.

Ця теорема може вести до висновку, що графи з метричною розмірністю 2 мають бути планарними, але автори розширили твердження і на непланарні графи.

Теорема 1.47. Існує непланарний граф з метричною розмірністю 2.

Теорема 1.48. [4] Нехай $G = (V, E)$ — граф, що має метричну розмірність 2, а також нехай множина $\{u, w\} \subset V$ буде метричним базисом графу G . В такому разі виконуються наступні умови:

- існує єдиний найкоротший шлях P між u та w ;
- ступінь вершин u та w щонайбільше — 3;
- кожна інша вершина на шляху P має ступінь щонайбільше 5.

Теорема 1.49. [4] Нехай $G = (V, E)$ — граф, що має метричну розмірність 2 та має діаметр D . В такому випадку виконується наступна нерівність:

$$|V| \leq D^2 + 2.$$

Теорема 1.50. [2] Нехай маємо граф G , що є прямим добутком двох шляхів P_n та P_m , $G = G(P_n \times P_m)$. В такому випадку метрична розмірність такого добутку буде дорівнювати 2

$$md(P_n \times P_m) = 2.$$

Теорема 1.51. [2] Якщо граф $W_{1,n}$ колесо для $n \geq 3$, тоді $md(W_{1,4}) = md(W_{1,5}) = 2$

Як вже було згадано раніше, даний результат було уточнено в [7] і показано, що дана теорема виконується лише у випадку $n = 4$ та $n = 5$.

Прямим добутком графів G та H називається граф визначений з множиною вершин $V(G) \times V(H)$ і множиною ребер

$$\{(u_G, v_G)(u_H, v_H) | u_G = u_H \text{ і } v_G v_H \in E(H) \text{ або } v_G = v_H \text{ і } u_G u_H \in E(G)\}.$$

Далі в роботі [38] було показано, що для кожного з'єднаного графа H метрична розмірність прямого добутку графів $H \times K_2$ буде або $md(H)$, або $md(H) + 1$.

Теорема 1.52. [38] Для кожного зв'язного графа H ,

$$md(H) \leq md(H \times K_2) \leq md(H) + 1.$$

Для метричних просторів були отримані наступні результати.

Теорема 1.53. [15] Припустимо, що (X, d) зв'язний, компактний метричний простір для якого метрична розмірність дорівнює 1 $md(X) = 1$. В такому випадку X гомеоморфний до $[0, 1]$.

Теорема 1.54. [15] Припустимо, що (X, d) зв'язний, некомпактний метричний простір в якому кожна замкнута куля є компактною, для якого метрична розмірність дорівнює 1 $md(X) = 1$. Тоді X гомеоморфний до $[0, +\infty)$.

Відкритою кулею з радіусом r та центром в x в метричному просторі X називають множину всіх точок X , які мають довжину до точки x меншу за r . Позначатимемо таку кулю $B_X(x, r)$.

Також нам для подальшого розгляду нам знадобляться наступні простори [22]:

- Евклідовий простір. $\mathbb{E}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$, з визначеною метрикою $d(x, y) = \|x - y\|$.
- Гіперболічний простір. $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ з метрикою похідною від $|dx|/x_n$.
- Сферичний простір. $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}_{n+1} | \|x\| = 1\}$ з метрикою яка є розширеною Евклідовою метрикою на $\mathbb{R}^{n+1}$

Лема 1.55. [15] *Припустимо, що X це $\mathbb{S}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{R}^n$, чи будь-яка з відкритих підмножин $\mathbb{E}^n$, в такому випадку $md(X) = n + 1$.*

В метричному просторі (X, d) геодезичною аркою називають функцію $\alpha : [a, b] \rightarrow X$, де $a < b \in \mathbb{R}$, що зберігає відстань. Геодезичним сегментом, що з'єднує точку u та точку v , які належать множині X , називають образ геодезичної арки початкова точка якої u , а кінцева — v . Під геодезичною лінією мають на увазі функцію $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$, що локально зберігає відстані. Образ геодезичної лінії називають геодезичним.

Означення 1.56. [22] Метричний простір називатимемо n -вимірним геометричним простором (K, d) , якщо він задовільняє наступним вимогам:

- Множина K геодезично зв'язана, тобто кожна пара різних елементів K з'єднана геодезичним сегментом.
- K є геодезично повною, тобто кожна геодезична арка $\alpha : [a, b] \rightarrow K$ може бути розширена до унікальної геодезичної лінії.

- Існує неперервна функція $\epsilon : \mathbb{E}^n \rightarrow K$ і дійсне додатне число k такі, що функція ϵ гомеоморфно відображає $B_{\mathbb{E}^n}(0, k)$ в $B_K(\epsilon(0), k)$. А також, для кожної точки $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ відображення $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow K$ визначене як $\lambda(t) = \epsilon(tu)$, являє собою геодезичну лінію таку, що λ обмежує геодезичну арку на інтервалі $[-k; k]$.
- Метричний простір (K, d) є гомогенним, тобто для кожного з двох елементів v та u , що належать множині K існує ізометрія $\phi : K \rightarrow K$, для якої виконується рівність $\phi(u) = v$.

Лема 1.57. [22] *Припустимо, що (X, d) одновимірний геометричний простір. Тоді для кожної з відкритих підмножин A , включаючи саму множину X , метрична розмірність дорівнюватиме двом.*

$$md(A) = 2$$

Лема 1.58. [22] *Припустимо, що (X, d) 2-вимірний геометричний простір. Тоді його метрична розмірність дорівнює 3*

$$md(X) = 3$$

.

Теорема 1.59. [22] *Метрична розмірність n -вимірного геометричного простору дорівнює $n + 1$.*

Повернемося до простору $\mathbb{R}^n$ і розглянемо метричну розмірність з точки зору афінної геометрії на $\mathbb{R}^n$. Вектори $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ є афінно незалежними тоді й тільки тоді, коли $x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1$ лінійно незалежні. Додавання фіксованого вектора a до елементів лінійного підпростору $V \subset \mathbb{R}^n$ породжує афінний підпростір $U \subset \mathbb{R}^n$, тобто $U = a + V$. Афінний k -вимірний підпростір U ізометричний ліній-

ному підпростору $V \subset \mathbb{R}^n$ розмірності k , а, в свою чергу, V буде ізометричним підпростору

$$\{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_j \in \mathbb{R}\}.$$

Таким чином, якщо U — афінний підпростір $\mathbb{R}^n$, тоді [15]

$$md(U) = dim(U) + 1$$

Перетин афінних підпросторів є також афінним підпростором. Афінною оболонкою $\mathcal{A}(Z)$ множини Z називають найменший афінний підпростір, що містить множину Z . Тобто, афінна оболонка скінченного простору $\{x_1, \dots, x_m\}$ буде:

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_m) = \{t_1 x_1 + \dots + t_m x_m : t_1 + \dots + t_m = 1\}.$$

Теорема 1.60. [15] Якщо $X \subset \mathbb{R}^n$ і на цій множині визначено Евклідову метрику, тоді $md(X) \leq md(\mathcal{A}(X))$

Теорема 1.61. [15] Якщо X — підмножина $\mathbb{R}^n$ з внутрішніми точками, то її метрична розмірність n або $n + 1$.

Теорема 1.62. [15] Якщо X — опукла підмножина $\mathbb{R}^n$ з внутрішніми точками, то її метрична розмірність n тоді й тільки тоді, коли існує допоміжна гіперплощина H , така що афінна оболонка перетину $X \cap H$ буде — H .

1.7. Висновки до розділу

В першому розділі вводяться основні означення, що потім використовуються в дисертації. Зокрема розглянуто конструкції метричних просторів, введено поняття метричної розмірності метричних

просторів і графів. Розглянуто відомі результати метричної розмірності, що стосуються графів та метричних просторів та деяких їх конструкцій.

Розділ 2

МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Використовуватимемо добре відому відповідність між деревами та ультраметричними просторами (див. [25, 43, 44, 32]) й збудуємо простий алгоритм, який приймає на вхід довільний ультраметричний простір X заданий матрицею відстаней M і віддає на виході дерево T простір кінцевих вершин L_m якого ізометричний простору X . Алгоритм має складність $O(n^5)$, де $n = |X|$.

2.1. Метрична розмірність кореневих дерев

Нехай T_m — деяке скінченне кореневе дерево таке, що кінцеві вершини v дерева T_m знаходяться на m -му рівні, тобто $v \in L_m$.

Твердження 2.1. *Припустимо, що T_m кореневе дерево всі вершини $(m-1)$ -го рівня якого — внутрішні. Тоді метрична розмірність кореневого дерева T_m дорівнюватиме $|L_m| - |L_{m-1}|$.*

Доведення. Для початку варто зазначити, що будь-який листок l цього дерева розташовано на m -му рівні. Внутрішні вершини, близькі до вершин, знаходяться на $(m-1)$ -му рівні. Це означає, що для кожної внутрішньої вершини v_i їй відповідає кількість листків n_{v_i} , де $1 \leq i \leq k$ і k — кількість вершин $m-1$ -го рівня кореневого дерева T_m . Відповідно до Теорема 1.24 матимемо, що:

$$\begin{aligned}
md(T_m) &= \sum_{v \in V(G), n_v \geq 1} (n_v - 1) = (n_{v_1} + \dots + n_{v_k}) - (1 + \dots + 1) = \\
&= \sum_{i=1}^k (n_{v_i}) - \sum_{i=1}^k 1 = |L_m| - |L_{m-1}|
\end{aligned}$$

□

Нехай $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ — скінченна послідовність дійсних чисел, така що

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m-1} < \alpha_m.$$

Визначимо метрику ρ на підмножині L_m вершин дерева T_m наступним чином. Для будь-яких вершин u, v з L_m відстань $\rho(u, v)$ дорівнюватиме α_{m-k} тоді й тільки тоді, коли спільна частина шляхів, що з'єднують корінь дерева v_0 та вершини v і u матиме довжину k , $0 \leq k \leq m$.

Варто зазначити, що діаметр метричного простору (L_m, ρ) дорівнюватиме α_{m-r} , де r найбільше таке число, що r -ий рівень дерева T_m містить точно одну вершину.

Послідовність $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ називається *визначальним набором* кореневого дерева T_m [32].

Лема 2.2. Для довільних вершин u, v з множини L_m рівність $\rho(u, v) = \alpha_{m-k}$ виконуватиметься тоді й тільки тоді, коли

$$d_G(u, v) = 2(m - k),$$

$$0 \leq k \leq m.$$

Доведення. Нехай вершини $u, v \in L_m$ а також $\rho(u, v) = \alpha_{m-k}$, $0 \leq k \leq m$. Згідно з визначенням метрики ρ матимемо, що спільна частина шляхів, що з'єднує корінь дерева v_0 з вершинами v та u мати-

ме довжину k , $0 \leq k \leq m$. Останнє речення еквівалентне існуванню вершини $z \in L_{m-k}$ такої, що існує шлях від вершини u до вершини v через вершину z . Оскільки вершини u та v знаходяться на m -му рівні, $d_G(u, v) = 2(m - k)$. $\square$

Теорема 2.3. *Нехай кореневе дерево T_m з визначальним набором $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$. Якщо для кореневого дерева T_m виконуються такі умови:*

1. *ступінь кореня дорівнює двом;*
2. *одне з підкореневих дерев з коренем v_0 є ланцюгом;*
3. *одне з кореневих піддерев T_v , яке є піддеревом дерева T_m і з коренем у внутрішній вершині найближчій до кореня v_0 є ланцюгом,*

Метрична розмірність

$$md(T_m) - 1 = md(L_m).$$

В усіх інших випадках метрична розмірність L_m дорівнює метричній розмірності T_m .

Доведення. Нехай $W = \{w_1, \dots, w_l\}$ — метричний базис кореневого дерева T_m .

1. Нехай для дерева T_m виконуються умови 1-3. Позначимо через v_1 найближчу внутрішню до кореня v_0 вершину в дереві T_m , L_{v_0} — кореневе піддерево T_m з коренем у вершині v_0 (v_0 - корінь дерева T_m). Також позначимо L_{v_1} , T_{v_1} кореневі піддереву T_m з коренем у внутрішній вершині v_1 . L_{v_0} та L_{v_1} є ланцюгами. Оскільки за побудовою дерева T_m v_1 є внутрішньою вершиною якій відповідатимуть 2 листки, то в базис W входить

або листок L_{v_0} , або листок L_{v_1} . Не обмежуючи загалу можемо вважати, що це вершина w_1 , покажемо що $W' = \{w_2, \dots, w_l\}$ є розділяючою множиною простору (L_m, ρ) , W' є метричним базисом дерева T_{v_1} . Спочатку зауважимо, що відповідно до леми 2.2 W' є підмножиною L_m . Нехай u, v довільні вершини з множини L_m , якщо u або v є листком L_{v_0} , то пара u, v розділятиметься довільним листком іншого кореневого піддерева. Якщо u або v є листком L_{v_1} , то пара u, v розділятиметься довільним листком іншого кореневого піддерева T_m з коренем у вершині v_1 . Для всіх інших вершин u та v існуватиме вершина $w_j \in W'$, $2 \leq j \leq l$ така, що $d_G(u, w_j) \neq d_G(v, w_j)$ тоді відповідно до леми 2.2 $\rho(u, w_j) \neq \rho(v, w_j)$, отже W' є розділяючою множиною простору (L_m, ρ) .

Тепер нам необхідно показати, що множина W' буде мінімальною за відношенням включення розділяючою множиною. Дійсно, нехай $\hat{W} = W' \setminus \{w_i\}$, для деякого i , $2 \leq i \leq l$. Оскільки W' є метричним базисом дерева T_{v_1} , то існують листки u та v , які розділяються w_i і не розділятимуться жодною іншою вершиною w_j , $i \neq j$, $2 \leq j \leq l$. Інакше кажучи, $d_G(u, w_j) = d_G(v, w_j)$ для будь-яких $w_j \in \hat{W}$. Таким чином, відповідно до леми 2.2 $\rho(u, w_j) = \rho(v, w_j)$ для всіх $w_j \in \hat{W}$, $i \neq j$, $2 \leq j \leq l$. Тому матимемо, що $\hat{W}$ не буде розділяючою множиною для простору (L_m, ρ) . Таким чином, W' буде розділяючою множиною мінімальної потужності для

$$(L_m, \rho) \text{ і } md(L_m, \rho) = |W'| = md(T_m) - 1.$$

2. Нехай для дерева T_m умови 1–3 не виконуються. Зауважимо,

що як і в попередньому випадку $W \subset L_m$. Покажемо, що W є розділяючою множиною (L_m, ρ) мінімальної потужності.

Нехай деякі вершини u, v будуть вершинами з множини L_m . Оскільки W метричний базис графу T_m , то існує вершина $w_j \in W$, $1 \leq j \leq l$, така що $d_G(u, w_j) \neq d_G(v, w_j)$. Тоді відповідно до леми 2.2 $\rho(u, w_j) \neq \rho(v, w_j)$. Таким чином матимемо, що W розділяюча множина простору (L_m, ρ) .

Тепер нам необхідно показати, що множина W є мінімально за відношенням включення розділяючою множиною. Дійсно, нехай $W' = W \setminus \{w_i\}$, для деяких i , $1 \leq i \leq l$. Оскільки W є базисом дерева T_m , то за побудовою метричного базису дерева внутрішній вершині z , якій відповідає листок w_i відповідатиме що один листок u , який не входить в W . Умови 1–3 означають, що відстані $d_G(w_i, z)$ і $d_G(u, z)$ не перевищують висоту дерева, а тому листки u та w_i не розділятимуться жодною іншою вершиною з W' , а отже W є мінімально за відношенням включення розділяючою множиною для (L_m, ρ) і

$$md(L_m, \rho) = |W| = md(T_m).$$

І з цим твердженням ми закінчуємо доведення теореми 2.3. □

Зауваження. Варто зазначити, що якщо твердження наведене в 2.1 виконується для дерева T_m , тоді $md(L_m, \rho) = |L_m| - |L_{m-1}|$.

2.2. Метрична розмірність ультраметричного простору

Розглянемо декілька властивостей ультраметричних просторів, що впливають безпосередньо з визначення.

1. Кожна точка всередині кулі ультраметричного простору буде її центром.
2. Перетин двох куль ультраметричного простору буде відповідати одній з них, або буде порожнім.

Теорема 2.4. *Припустимо, що (X, d) — скінченний ультраметричний простір, кількість точок в якому $|X| = n > 3$. Тоді для нього існує поліноміальний від n алгоритм для побудови кореневого дерева T_m і визначального набору $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ таких, що метричні простори (X, d) та (L_m, ρ) — ізометричні.*

Input: Скінченний ультраметричний простір (X, d) ,
визначений матрицею відстаней M_X .

Output: Кореневе дерево T_m , визначене як промарковане дерево.

1 З матриці M_X виділимо множину D всіх різних відстаней простору (X, d) ;

2 Впорядкуємо елементи множини D :

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = \text{diam} X;$$

3 Визначимо порожнє кореневе дерево T_m ;

4 $L_0^1 := X$, $k_0 = 1$. Також визначимо L_0^1 як корінь дерева T ;

5 **for** $q = 0$ *to* $m - 1$ **do**

6 $k_{q+1} := 0$;

7 **for** $i := 1$ *to* k_q **do**

8 Покласти $R := L_q^i$;

9 **if** $|R| = 1$ **then**

10 $k_{q+1} := k_{q+1} + 1$;

11 $L_{q+1}^{k_{q+1}} := L_q^i$;

12 Визначити $L_{q+1}^{k_{q+1}}$ як вершину $q + 1$ -рівня дерева T .

 З'єднати ребром вершини L_q^i та $L_{q+1}^{k_{q+1}}$;

13 **else**

14 $u_q := 0$;

15 **while** R не порожня **do**

16 Зафіксувати $x_i^q \in R$;

17 Визначити $L_{q+1}^{i+u_q} = \{a \in L_q^i \mid d(x_i^q, a) < \alpha_{m-q}\}$;

18 $R := R \setminus L_{q+1}^{i+u_q}$;

19 $u_q := u_q + 1$;

20 $k_{q+1} := k_{q+1} + 1$;

21 Визначити $L_{q+1}^{i+u_q}$ як вершину $q + 1$ -го рівня

 дерева T . З'єднати ребром вершини L_q^i та $L_{q+1}^{i+u_q}$;

22 **end**

23 **end**

24 **end**

25 $q := q + 1$;

26 **end**

Алгоритм 1: Побудова кореневого дерева

Зауваження. Зауважимо, що в 2.4 метричний простір задається матрицею відстаней, а розмір вхідних даних становить k . Так як всі операції, що виконуються над вхідними даними є операціями порівняння, то складність їх буде лінійною $O(k)$ і на загальну складність алгоритму впливати не будуть.

Доведення теореми 2.4. Для доведення цієї теореми ми наводимо алгоритм 1 побудови кореневого дерева T_m і підрахунку його складності. В алгоритмі ми визначаємо ультраметричний простір (X, d) матрицею відстаней M_X . На кроці 2 ми визначаємо визначальний набір дерева T_m . На кроках 3–4 ми визначаємо порожнє кореневе дерево T_m і представляємо простір X як корінь дерева T_m . Після цього ми розбиваємо простір X в послідовність куль, що не перетинаються радіусу α_{m-1} . Ми позначаємо L_{m-1}^l l -у вершину 1-го рівня дерева T_m . Будь-яка вершина 1-го рівня визначена закритою кулею радіусу α_{m-l} простору X . Відповідно до властивості (2) маємо, що наше визначення коректне. Ми з'єднуємо корінь X дерева з вершинами множини L_{m-1}^l ребрами. Після цього ми розбиваємо будь-яку вершину 1-го рівня в скінченну множину куль радіусу α_{m-2} і з'єднуємо ребрами нові вершини й так далі.

Наша мета — побудувати дерево T_m з листками, що знаходяться на m -му рівні. Таким чином в кроках 9–13 ми перевіряємо кількість елементів в кулі L_q^i . Якщо L_q^i складається тільки з одного елементу, ми визначаємо вершину $i + 1$ -го рівня як кулю L_q^i .

В результаті виконання алгоритму отримаємо дерево T . Всі листки якого (вершини m -го рівня) дерева T представлені одноелементними підмножинами множини X .

Покажемо тепер, що (L_m, ρ) та (X, d) — ізометричні. Визначимо

функцію $f : \{x\} \rightarrow x$ з (L_m, ρ) в (X, d) . Функція f буде ізометрією. Справді, f є бієкцією і відстань між вершинами $\{x\}$ та $\{y\}$ дорівнює α_l тоді й тільки тоді, коли спільна частина шляхів, що з'єднують кореневу вершину v_0 з $\{x\}$ та $\{y\}$ має довжину $m - l$. Але це означатиме, що існує закрита куля $B(x, \alpha_l)$ в просторі X , така що $y \in B(x, \alpha_l)$, але $y \notin B(x, \alpha_{l-1})$. Відповідно, відстань між вершинами x та y в просторі X дорівнюватиме α_l , а f буде ізометрією між L_m та X .

Нехай маємо, що $|X| = n$. Спершу варто зазначити, що

$$m < \frac{n(n-1)}{2}.$$

Складність кроків 1–3 становить $O(n^2)$. Протягом кроків алгоритму 4–23 маємо 3 ітерації. Ці ітерації в найгіршому випадку матимуть кількість повторів, що становитиме m , n та n^2 . Відповідно, в результаті складність не перевищуватиме $O(n^3 \cdot m)$ або $O(n^5)$. Таким чином, алгоритм матиме поліноміальну складність. $\square$

Казатимемо, що кореневе дерево T_m зображує метричний простір (X, d) .

Саме ж дерево матиме вигляд схожий до зображеного на рисунку 2.1.

Наслідок 2.5. *Нехай (X, d) — скінченний ультраметричний простір, а T_m — його зображення у вигляді кореневого дерева. Припустимо, що для будь-якого $x \in X$ існує таке $y \in X$, що $d(x, y) = \alpha_1$. В такому випадку метричну розмірність простору X можна визначити за формулою:*

$$mdX = |L_m| - |L_{m-1}|.$$

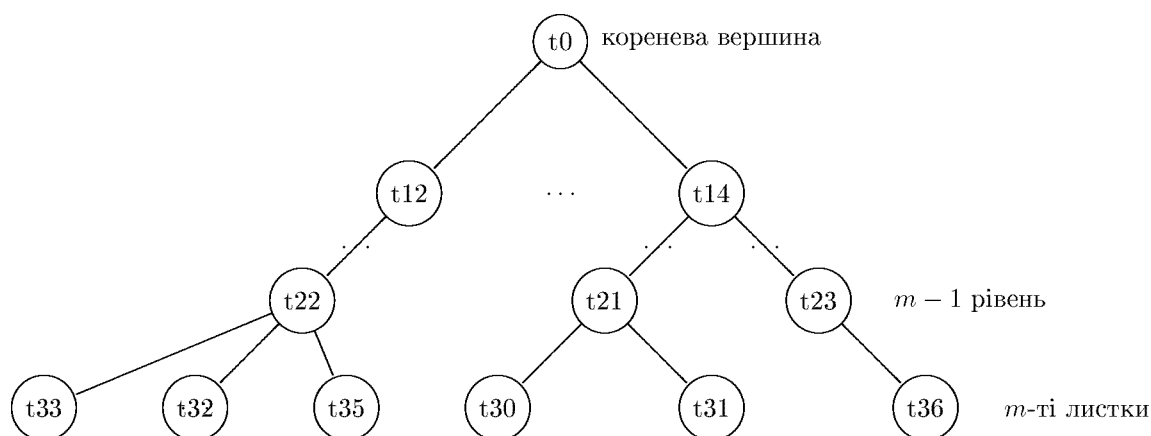


Рис. 2.1. Репрезентація метричного простору (X, d) деревом T_m

Доведення. З теореми 2.4 випливає, що існує таке дерево T_m , що скінченний ультраметричний простір (X, d) та простір (L_m, ρ) — ізометричні. Оскільки для будь-якого $x \in X$ існує точка $y \in X$, така що $d(x, y) = \alpha_1$ і всі вершини $(m-1)$ -го рівня дерева T_m є внутрішніми. Тоді, відповідно до зауваження 2.1.

$$d(L_m, \rho) = |L_m| - |L_{m-1}|.$$

Отже,

$$md(X) = |L_m| - |L_{m-1}|.$$

□

Безпосередньо з алгоритму побудови відображення ультраметричного простору кореневим деревом, а також наслідку 2.5 матимемо наступні наслідки:

Наслідок 2.6. *Ультраметричний простір X , $|X| = n$ має метричну розмірність один тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *кількість різних відстаней дорівнює n , тобто визначальний набір має вигляд $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;*

2. існує впорядкування точок простору $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ таке, що точка x_{m-i} знаходиться на відстані α_{m-i} від всіх точок $x_1, \dots, x_{m-i-1}$.

Доведення. Якщо X ультраметричний простір для якого виконуються умови 1 та 2, то для відповідного дерева на кожному рівні буде не більше одного розгалуження. Це означає, що як базис ми можемо взяти одну з двох вершин m -го рівня відстань між якими дорівнює α_1 (за умовою 2 таких вершин буде рівно дві), яку позначимо u . З умови 2 випливає, що $u = x_1$ або $u = x_2$, не зменшуючи загалу можемо припустити, що $u = x_1$. Покажемо, що довільні точки x_j та x_k , $j \neq k$ розділяються точкою x_1 . За умовою 2 відстань між x_1 до x_j буде дорівнювати α_{m-j-1} , а відстань між x_1 та x_k буде α_{m-k-1} . Оскільки $j \neq k$, то маємо $\alpha_{m-j-1} \neq \alpha_{m-k-1}$, тобто відповідно відстані різні і x_1 буде розділяючою для x_j та x_k .

Нехай метричний простір X має метричну розмірність 1. Якщо потужність X дорівнює одиниці, то виконання умов очевидне. Припустимо, що потужність простору X більше одиниці. За теоремою 2.3 для метричної розмірності простору L_m і відповідного йому дерева T_m метрична розмірність може дорівнювати одиниці або двом. Метрична розмірність дерева T_m дорівнює одиниці лише в тому випадку, якщо дерево — ланцюг. Отже, метрична розмірність дерева дорівнює двом. Відповідно для того щоб метрична розмірність простору (L_m, ρ) дорівнювала одиниці, то для дерева T_m і будь-якого його піддерева з вершиною у внутрішній точці мають виконуватись умови 1–3. Останнє означає, що точки простору X можна впорядковувати таким чином що точка x_{m-i} буде знаходитись на відстані α_{m-i} від всіх точок $x_1, \dots, x_{m-i-1}$. З чого випливає, що відстаней

має бути n , тобто виконуються умови 1 та 2 цього наслідку. $\square$

Приклад 12. Припустимо, що маємо ультраметричний простір (X, d) , який можна представити матрицею відстаней

$$M_X = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ a & 0 & 3 & 3 & 3 \\ b & 3 & 0 & 2 & 2 \\ c & 3 & 2 & 0 & 1 \\ d & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудуємо його зображення графом T застосовуючи описаний алгоритм, а також знайдемо його метричну розмірність.

З самого початку матимемо лише кореневу вершину $L_0^1 = \{a, b, c, d\}$, і значення змінних в алгоритмі буде $q = 0$, $i = 1$, $k_1 = 0$, $u_0 = 0$, $R = L_0^1 = \{a, b, c, d\}$, $\alpha_{m-q} = 3$. В R знаходиться більше одного елемента, тому:

$$x_1^0 = a, L_1^1 = \{v \in L_0^1 \mid d(a, v) < 3\} = \{a\}$$

$$R = \{a, b, c, d\} \setminus \{a\} = \{b, c, d\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 1, k_1 = k_1 + 1 = 1$$

Визначаємо L_1^1 як вершину 1-го рівня, з'єднуємо її ребром з L_0^1 .

$$\begin{array}{c} \{a, b, c, d\} \\ | \\ \{a\} \end{array}$$

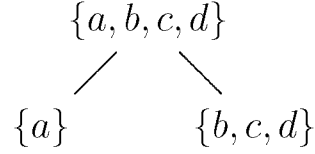
R — непуста, продовжуємо розбивати першопочаткову множину елементів. Покладемо $x_1^0 = b$, тоді матимемо:

$$L_1^2 = \{v \in L_0^1 \mid d(b, v) < 3\} = \{b, c, d\}$$

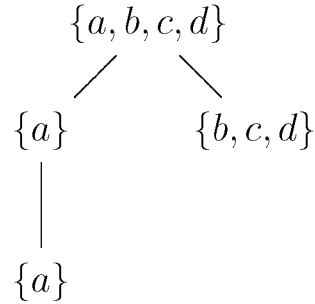
$$R = \{b, c, d\} \setminus \{b, c, d\} = \{\emptyset\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 2, k_1 = k_1 + 1 = 2$$

L_1^2 буде ще одною вершиною першого рівня тому також з'єднуємо її з коренем.



Після виконання попередніх кроків множина R стала пустою, а лічильник i досяг свого максимального значення в циклі, тому переходимо до зовнішнього циклу збільшуючи q на одиницю, відповідно $i = 1$, $k_2 = 0$, $u_1 = 0$, $R = L_1^1 = \{a\}$, $\alpha_{m-q} = 2$. Так як R містить один елемент, то нова вершина графа T $L_2^1 = \{a\}$, й ми маємо з'єднати її з вершиною $L_1^1 = \{a\}$. При цьому $k_2 = k_2 + 1 = 1$, $i = 2$.



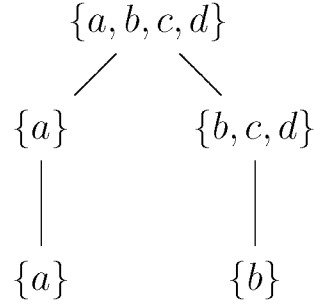
Покладемо $R = L_1^2 = \{b, c, d\}$. В силу того, що $|R| \neq 1$, то зафіксуємо $x_1^1 = b$.

$$L_2^2 = \{v \in L_1^2 \mid d(b, v) < 2\} = \{b\}$$

$$R = \{b, c, d\} \setminus \{b\} = \{c, d\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 1, k_2 = k_2 + 1 = 2$$

L_2^2 буде вершиною 2-го рівня, з'єднаємо її ребром з вершиною L_1^2 .



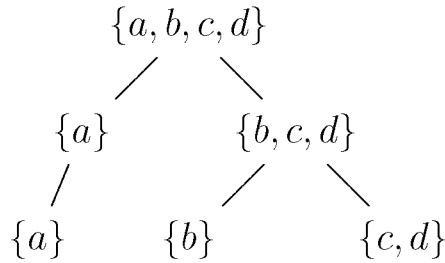
$|R|$ більше одиниці, тож зафіксуємо $x_1^1 = c$.

$$L_2^3 = \{v \in L_1^2 \mid d(c, v) < 2\} = \{c, d\}$$

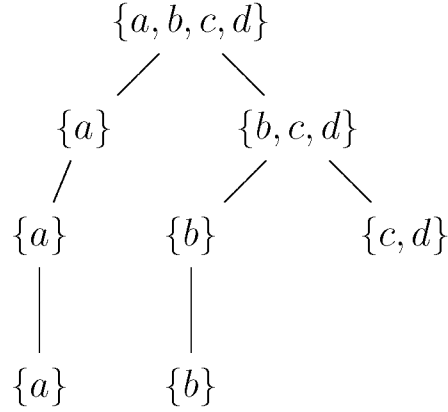
$$R = \{c, d\} \setminus \{c, d\} = \{\emptyset\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 2, k_2 = k_2 + 1 = 3$$

Оскільки на даному етапі R — порожня і i досяг свого максимуму, то L_2^3 буде останньою вершиною 2-го рівня і має бути з'єднана з L_1^2 .



Спускаючись до наступного рівня побудови дерева T збільшуємо лічильник $q = 2$. Оскільки вершини другого рівня $\{a\}$, $\{b\}$ містять по одному елементу, то згідно з кроками 8–12 алгоритму 1 матимемо вершини $L_3^1 = \{a\}$, $L_3^2 = \{b\}$ дерева T , які будуть з'єднані ребрами з $L_2^1 = \{a\}$, $L_2^2 = \{b\}$ відповідно.



Збільшуємо лічильник $i = 3$ при цьому покладемо $R = L_2^3 = \{c, d\}$. Оскільки $|R|$ більше одиниці, то зафіксуємо $x_1^1 = c$.

$$L_3^3 = \{v \in L_2^3 \mid d(c, v) < 1\} = \{c\}$$

$$R = \{c, d\} \setminus \{c\} = \{d\}$$

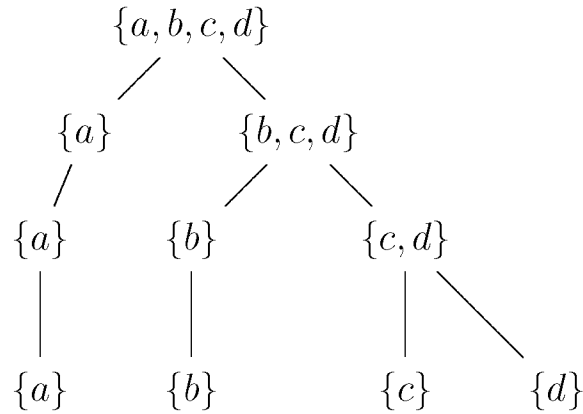
$$u_2 = u_2 + 1 = 1, k_3 = k_3 + 1 = 3$$

Маємо чергову вершину третього рівня L_3^3 , яка має бути з'єднана з L_2^3 . $|R|$ ще не нуль, тому продовжуємо і покладемо $x_1^1 = d$, в такому випадку матимемо:

$$L_3^4 = \{v \in L_2^3 \mid d(d, v) < 1\} = \{d\}$$

$$R = \{d\} \setminus \{d\} = \{\emptyset\}$$

L_3^4 буде останньою вершиною дерева T , оскільки дійшли до максимального значення лічильника q . Тому остаточно дерево T матиме наступний вигляд:



Так як виконуються всі 3 умови теореми 2.3 та відповідно до теореми 2.4 метрична розмірність метричного простору (X, d) буде на одиницю менша від метричної розмірності кореневого дерева T , що його зображує, $md(X, d) = 1$.

Приклад 13. Нехай (X, d) — ультраметричний простір, з матрицею відстаней

$$M_X = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ a & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ b & 8 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ c & 8 & 4 & 0 & 8 & 8 \\ d & 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \\ e & 8 & 8 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудуємо дерево T , що його зображає і знайдемо метричну розмірність ультраметричного простору (X, d) .

З матриці відстаней візьмемо множину відстаней і впорядкуємо її, в результаті отримаємо $\{0, 2, 4, 8\}$. В якості кореня дерева виступатиме вершина $L_0^1 = \{a, b, c, d, e\}$. Проініціалізуємо змінні $q = 0$, $i = 1$, $k_1 = 0$, $u_0 = 0$, $R = L_0^1 = \{a, b, c, d, e\}$, $\alpha_{m-q} = 8$. Так як в

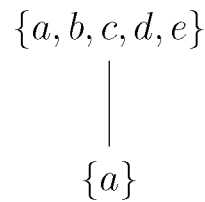
множині R знаходиться більше одного елементу, то:

$$x_1^0 = a, L_1^1 = \{v \in L_0^1 \mid d(a, v) < 8\} = \{a\}$$

$$R = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{a\} = \{b, c, d, e\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 1, k_1 = k_1 + 1 = 1$$

Визначимо вершину L_1^1 як вершину 1-го рівня і з'єднаємо її ребром з коренем.



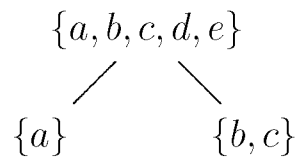
Так як R непуста продовжуємо розбивати першопочаткову множину елементів. Покладемо $x_1^0 = b$, тоді матимемо:

$$L_1^2 = \{v \in L_0^1 \mid d(b, v) < 8\} = \{b, c\}$$

$$R = \{b, c, d, e\} \setminus \{b, c\} = \{d, e\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 2, k_1 = k_1 + 1 = 2$$

L_1^2 є другою вершиною першого рівня, з'єднаємо її з коренем.



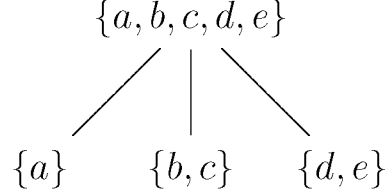
$|R| \neq 0$, тому залишаємось в циклі 15–22 й покладемо $x_1^0 = d$, відповідно:

$$L_1^3 = \{v \in L_0^1 \mid d(d, v) < 8\} = \{d, e\}$$

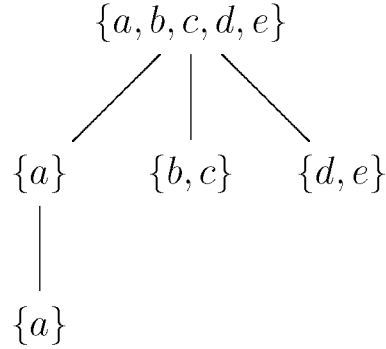
$$R = \{d, e\} \setminus \{d, e\} = \{\emptyset\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 3, k_1 = k_1 + 1 = 3$$

L_1^2 є останньою вершиною третього рівня, і дерево матиме наступний вигляд:



Спускаємось на рівень нижче й відповідні змінні матимуть значення $q = 1$, $i = 1$, $k_2 = 0$, $u_1 = 0$, $\alpha_{m-q} = 4$. Так як $R = L_1^1 = \{a\}$, і відповідно має один елемент, то визначаємо вершину L_2^1 та з'єднуємо її ребром з L_1^1 , $k_2 = k_2 + 1 = 1$.



Далі переходимо на розбиття наступної вершини першого рівня $i = 2$, а відповідно $R = L_1^2 = \{b, c\}$, $u_1 = 0$. Зафіксуємо $x_2^1 = b$, тоді:

$$L_2^2 = \{v \in L_1^2 \mid d(b, v) < 4\} = \{b\}$$

$$R = \{b, c\} \setminus \{b\} = \{c\}$$

$$u_1 = u_0 + 1 = 1, k_2 = k_2 + 1 = 2$$

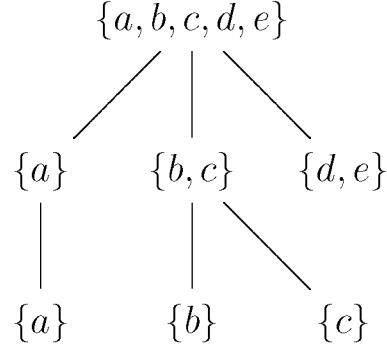
Маємо нову вершину L_2^2 , яку з'єднуємо з L_1^2 . Оскільки R непорожня — продовжуємо:

$$x_2^1 = c, L_2^3 = \{v \in L_1^2 \mid d(c, v) < 4\} = \{c\}$$

$$R = \{c\} \setminus \{c\} = \{\emptyset\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 2, k_2 = k_2 + 1 = 3$$

L_2^2 — вершина третього рівня, яку з'єднуємо ребром з L_1^2 . На даному етапі нашу дерево матиме наступний вигляд:



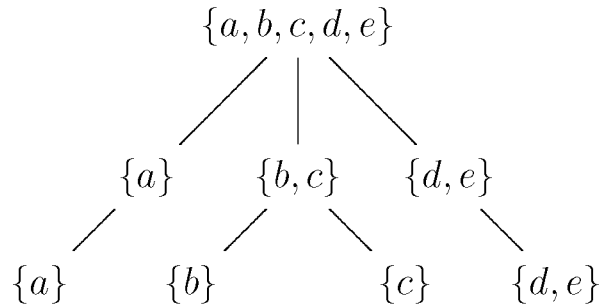
Так як $|R| = 0$, то $i = 3$, а відповідно $R = L_1^3 = \{d, e\}$, $|R| > 1$ і таким чином:

$$x_2^1 = d, L_2^4 = \{v \in L_1^3 \mid d(d, v) < 4\} = \{d, e\}$$

$$R = \{d, e\} \setminus \{d, e\} = \{\emptyset\}$$

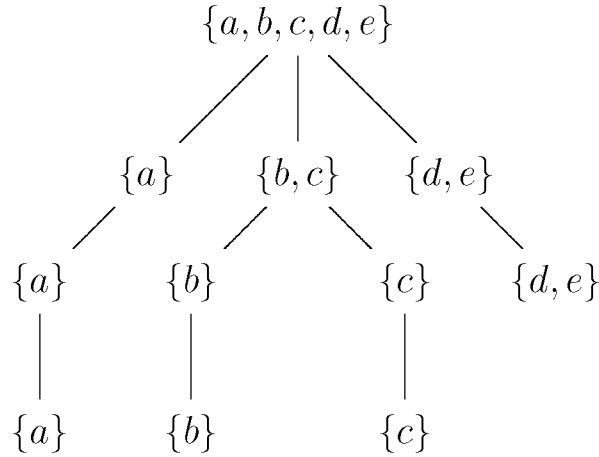
$$u_1 = u_1 + 1 = 1, k_2 = k_2 + 1 = 4$$

Маємо останню вершину другого рівня L_2^4 яку ми з'єднуємо з L_1^3 .

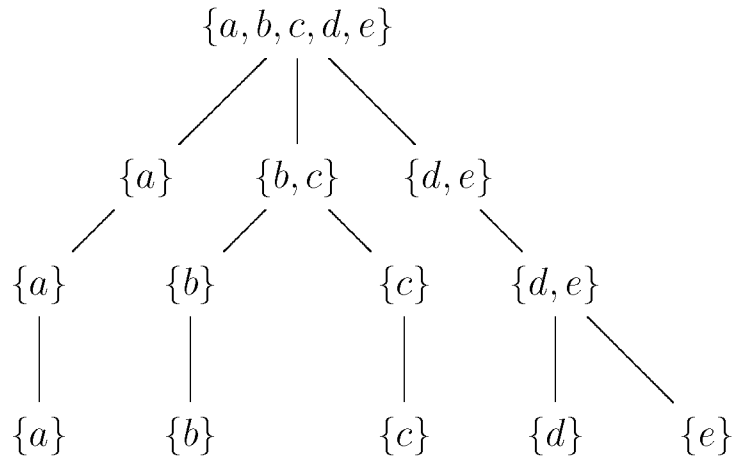


Лічильник i підійшов до свого максимуму в даному циклі а q — ні, тому ми спускаємось на рівень нижче. Так як вершини $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ на другому рівні містять по одному елементу, то відповідно до

кроків 8–12 алгоритму 1 утворяться нові вершини $L_3^1 = \{a\}$, $L_3^2 = \{b\}$, $L_3^3 = \{c\}$ дерева T відповідно.



На даному етапі матимемо змінні $q = 2$, $i = 4$, $k_3 = 3$, $u_2 = 0$, $\alpha_{m-q} = 2$. Після виконання циклу на кроках 15–22 двічі отримаємо останні дві вершини $L_3^4 = \{d\}$ та $L_3^5 = \{e\}$, чим і закінчимо побудову дерева T , що зображує ультриметричний простір X , яке в результаті матиме вигляд:



Згідно з теоремами 2.3 та 2.4 метрична розмірність ультриметричного простору X дорівнюватиме двом.

Теорема 2.7. Для довільного скінченного ультриметричного простору (X, d) , $|X| = n$ існує поліноміальний алгоритм від n для

визначення його метричної розмірності.

Доведення. З теореми 2.4 випливає, що скінченний ультраметричний простір (X, d) ізометричний метричному простору (L_m, ρ) , визначеному на дереві T_m . Більш того, дерево T_m для метричного простору (L_m, ρ) може бути побудоване за поліноміальний час. Згідно з теоремою 2.3 метрична розмірність дерева T_m з комбінаторною метрикою, або дорівнює метричній розмірності метричного простору (L_m, ρ) , або на одиницю менша. Оскільки пошук шляху в дереві, кількість вершин якого n , має складність $O(n \log(n))$, то перевірка виконання умов 1–3 з теореми 2.3 буде також виконуватись за поліноміальний час. Оскільки з роботи [5] випливає, що для будь-якого дерева з комбінаторною метрикою метричну розмірність можна знайти за поліноміальний час, то з теореми 2.3 отримаємо, що для довільного ультраметричного простору можна знайти метричну розмірність за поліноміальний час. Таким чином, для довільного ультраметричного простору можна знайти метричну розмірність за поліноміальний час. $\square$

Наведемо алгоритм знаходження метричної розмірності для скінченного ультраметричного простору:

Input: Скінченний ультраметричний простір X .

Output: Метрична розмірність $md(X)$

```

1 Побудуємо кореневе дерево  $T$ , що зображує скінченний
  ультраметричний простір  $X$  (Алгоритм 1);
2 Метричну розмірність дерева  $T$  обчислюємо за допомогою
  Формули 1.2 Теорема 1.24;
3 if Для дерева  $T$  виконуються умови 1–3 Теорема 2.3 then
4   |  $md(X) = md(T) - 1$ 
5 end
6 else
7   | інакше  $md(X) = md(T)$ .
8 end

```

Алгоритм 2: Знаходження метричної розмірності ультраметричного простору X

Твердження 2.8. Нехай маємо, що (X_1, d_{X_1}) та (X_2, d_{X_2}) — деякі скінченні ультраметричні простори, то пряма сума $X_1 \oplus X_2$ цих ультраметричних просторів також буде ультраметричним простором.

Доведення. Нехай маємо деякі точки $x, y, z \in X_1 \oplus X_2$. Нам необхідно показати, що для простору $X_1 \oplus X_2$ виконуватиметься нерівність

$$\tau(x, y) \leq \max\{\tau(x, z), \tau(y, z)\}. \quad (2.1)$$

Відповідно до визначення прямої суми метричних просторів маємо, що

$$\tau_c(u, v) = \begin{cases} d_{X_i}(u, v), & \text{якщо } u, v \in X_i \\ c, & \text{в іншому випадку} \end{cases},$$

При цьому $c > \max\{diam(X_1), diam(X_2)\}$.

1. У випадку коли $x, y, z \in X_1$ або $x, y, z \in X_2$ нерівність 2.1 виконуватиметься оскільки метричні простори X_1 та X_2 є ультраметричними.
2. Припустимо, що $x, y \in X_1$ та $z \in X_2$. В такому випадку нерівність 2.1 буде мати місце, так як:

$$\tau(x, y) \leq \max\{\tau(x, z), \tau(y, z)\},$$

але $\tau(x, z) = c$ та $\tau(y, z) = c$ за визначенням метрики.

$d_{X_1}(x, y) \leq c$, оскільки

$$c \geq \max\left\{\sup_{u,v \in X_1} d(u, v), \sup_{u,v \in X_2} d(u, v)\right\}.$$

Тепер покажемо, що $\tau(x, z) \leq \max\{\tau(x, y), \tau(y, z)\}$. Справді, $\tau(x, z) = c$ та $\max\{\tau(x, y), \tau(y, z)\} = c$, а отже нерівність виконується.

Нерівність $\tau(y, z) \leq \max\{\tau(x, y), \tau(x, z)\}$ доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що $x \in X_1$ та $y, z \in X_2$. Доводиться аналогічно до попереднього випадку.

□

Твердження 2.9. *Нехай (X_1, d_{X_1}) та (X_2, d_{X_2}) — деякі скінченні ультраметричні простори, а T_{m_1} та T_{m_2} відповідні їм кореневі дерева. Тоді дерево T , яке відповідає прямій сумі $X_1 \oplus X_2$ ультраметричних просторів X_1 та X_2 гомеоморфно дереву T двома кореневими піддеревами якого є T_{m_1} та T_{m_2} .*

Доведення. Збудуємо дерево T використовуючи алгоритм 1.

Нехай $X_1 = \{x_1^1, \dots, x_p^1\}$ і $X_2 = \{x_1^2, \dots, x_q^2\}$. Так як

$$c > \max\{\text{diam}(X_1), \text{diam}(X_2)\},$$

то визначальний набір для ультраметричного простору $(X_1 \oplus X_2, \tau_c)$ матиме вигляд $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, c$. В корені дерева T будуть всі елементи $\{x_1^1, \dots, x_p^1, x_1^2, \dots, x_q^2\}$ множини $X_1 \oplus X_2$. Не порушуючи загальності почнемо з деякої точки $x_i \in X_1$, відповідно відстань від цієї точки до будь якої точки $x_j \in X_2$ буде дорівнювати c , $\tau(x_i, x_j) = c$. Згідно з алгоритмом в такому випадку на першій ітерації побудови дерева у нас утворяться дві вершини другого рівня. Перша з яких L_1^1 буде складатись з точок відстань до яких з вершини x_i буде меншою від c , тобто згідно визначення до неї увійдуть всі точки множини X_1 . Друга утворена вершина L_1^2 складатиметься з усіх інших точок, які не увійшли до L_1^1 . Таким чином матимемо, що $L_1^1 = \{x_1^1, \dots, x_p^1\} = X_1$, а $L_1^2 = \{x_1^2, \dots, x_q^2\} = X_2$. У випадку коли α_i є значенням метрики в просторі X_1 та на є значенням метрики в просторі X_2 , на відповідному рівні піддерева X_2 дублюватимуться вершини попереднього рівня α_{i-1} . Утворені вершини матимуть степінь 2. Продовжуючи розбивати L_1^1 та L_1^2 ми й отримаємо дерева гомеоморфні T_{m_1} та T_{m_2} відповідно, оскільки фактично будуватимемо зображення деревами для ультраметричних просторів X_1 та X_2 . Що й доводить твердження. $\square$

Приклад 14. Нехай маємо ультраметричний простір (X, d) , який

можна представити матрицею відстаней

$$M_X = \begin{pmatrix} & a & b & c \\ a & 0 & 4 & 4 \\ b & 4 & 0 & 2 \\ c & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для початку побудуємо дерево, що зображатиме простір (X, d) .

Виділимо множину відстаней з матриці відстаней і впорядкуємо її, матимемо $\{0, 2, 4\}$, кореневою вершиною буде — $L_0^1 = \{a, b, c\}$.

На першій ітерації значення змінних будуть наступними $q = 0$, $i = 1$, $k_1 = 0$, $u_0 = 0$. Покладемо $R = L_0^1 = \{a, b, c\}$. Так як $|R| \neq 1$, то зафіксуємо $x_1^0 = a$.

$$L_1^1 = \{v \in L_0^1 \mid d(a, v) < 4\} = \{a\}$$

$$R = \{a, b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}$$

Проінкрементуємо відповідні змінні $u_0 = 1$, $k_1 = 1$. Згідно з алгоритмом L_1^1 є вершиною 1-го рівня й ми маємо з'єднати її ребром з коренем.

На даному етапі наше дерево виглядатиме наступним чином:

$$\begin{array}{c} \{a, b, c\} \\ | \\ \{a\} \end{array}$$

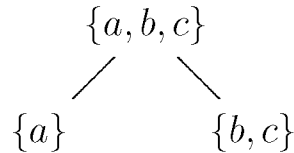
Так як R непорожня ми все ще знаходитимемось в циклі на кроках 15–22. Змінні в початку наступної ітерації матимуть такі значення: $q = 0$, $i = 1$, $k_1 = 1$, $u_0 = 1$. Зафіксуємо $x_1^0 = b$. В такому випадку

$$L_1^2 = \{v \in L_0^1 \mid d(b, v) < 4\} = \{b, c\}$$

$$R = \{b, c\} \setminus \{b, c\} = \{\emptyset\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 2, k_1 = k_1 + 1 = 2$$

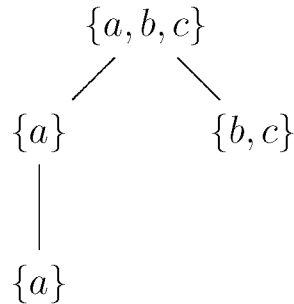
Маємо другу вершину першого рівня L_1^2 яку теж маємо з'єднати з коренем.



Так як R вже порожня та лічильник i досяг максимуму на цьому рівні, спускаємось на рівень нижче.

$$q = 1, k_2 = 0, i = 1, R = L_1^1 = \{a\}.$$

$|R| = 1$, тому $k_2 = 1$ $L_2^1 = L_1^1 = \{a\}$. L_2^1 перша вершина другого рівня і ми маємо з'єднати її ребром з L_1^1 .



$$i = 2, R = L_1^2 = \{b, c\}, u_1 = 0.$$

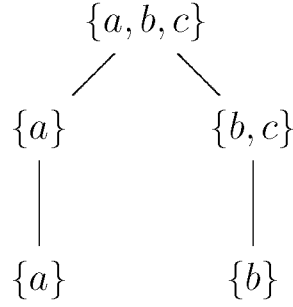
Зафіксуємо $x_2^1 = b$. В такому випадку

$$L_2^2 = \{v \in L_1^2 \mid d(b, v) < 2\} = \{b\}$$

$$R = \{b, c\} \setminus \{b\} = \{c\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 1, k_2 = k_2 + 1 = 2$$

L_2^2 наступна вершина другого рівня і ми маємо з'єднати ребром з L_1^2 відповідно.



Так як R непорожня ми продовжуємо розбивати L_1^2 , тоді $x_2^1 = c$

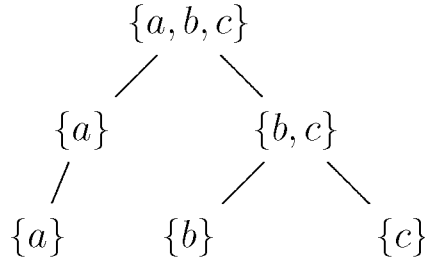
$$L_2^3 = \{v \in L_1^2 \mid d(c, v) < 2\} = \{c\}$$

$$R = \{c\} \setminus \{c\} = \{\emptyset\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 2, k_2 = k_2 + 1 = 3$$

Остання вершина другого рівня L_2^3 , з'єднуємо її ребром з L_1^2 .

Так як R — порожня і q після інкременту на 1 дорівнюватиме 2, що є умовою закінчення роботи алгоритму, отримуємо фінальне дерево, що зображує простір (X, d) .



Метрична розмірність ультраметричного простору (X, d) відповідно до теореми 2.4 дорівнюватиме одиниці.

Розглянемо пряму суму ультраметричного простору (X, d) самого на себе $(X \oplus X)$, а також побудуємо його зображення деревом T використовуючи алгоритм 1. Для зручності позначатимемо елементи одного з просторів суми $\{a, b, c\}$, іншого ж $\{d, e, f\}$. Константу c

покладемо рівною 8. В такому випадку матриця відстаней матиме наступний вигляд:

$$M_X = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e & f \\ a & 0 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ b & 4 & 0 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ c & 4 & 2 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ d & 8 & 8 & 8 & 0 & 4 & 2 \\ e & 8 & 8 & 8 & 4 & 0 & 2 \\ f & 8 & 8 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Виділимо множину відстаней з матриці відстаней, впорядкувавши її, матимемо $\{0, 2, 4, 8\}$, кореневою вершиною буде $L_0^1 = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Проініціалізуємо змінні початковими значеннями $q = 0$, $i = 1$, $k_1 = 0$, $u_0 = 0$. Покладемо $R = L_0^1 = \{a, b, c, d, e, f\}$. $|R| \neq 1$, візьмемо $x_1^0 = a$.

$$L_1^1 = \{v \in L_0^1 \mid d(a, v) < 8\} = \{a, b, c\}$$

$$R = \{a, b, c, d, e, f\} \setminus \{a, b, c\} = \{d, e, f\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 1, k_1 = k_1 + 1 = 1$$

Вершина L_1^1 буде першою вершиною 1-го рівня, з'єднаємо її ребром з коренем.

$$\begin{array}{c} \{a, b, c, d, e, f\} \\ | \\ \{a, b, c\} \end{array}$$

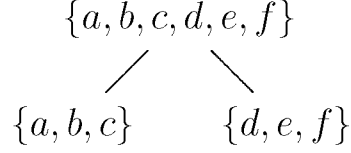
$|R| \neq 0$, тому залишаємось в циклі 15–22. В якості x_1^0 з множини R візьмемо вершину d .

$$L_1^2 = \{v \in L_0^1 \mid d(d, v) < 8\} = \{d, e, f\}$$

$$R = \{d, e, f\} \setminus \{d, e, f\} = \{\emptyset\}$$

$$u_0 = u_0 + 1 = 2, k_1 = k_1 + 1 = 2$$

L_1^2 — друга вершина першого рівня, з'єднуємо її ребром з коренем.



R вже порожня, лічильник i досяг максимуму на цьому рівні, спускаємось на рівень нижче.

$$q = 1, k_2 = 0, i = 1, R = L_1^1 = \{a, b, c\}.$$

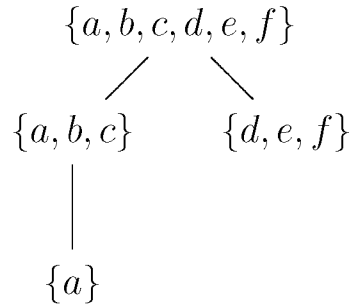
Покладемо $R = L_1^2 = \{a, b, c\}$. В силу того, що $|R| \neq 1$, то зафіксуємо $x_1^1 = a$.

$$L_2^1 = \{v \in L_1^1 \mid d(a, v) < 4\} = \{a\}$$

$$R = \{a, b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 1, k_2 = k_2 + 1 = 1$$

L_2^1 буде вершиною 2-го рівня, з'єднаємо її ребром з вершиною L_1^1 .



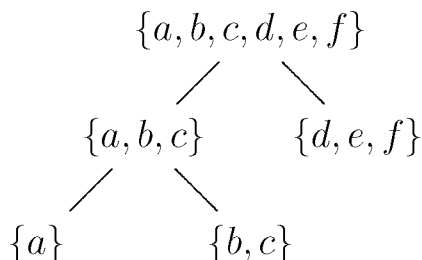
Множина R ще не порожня, тому $x_1^1 = b$.

$$L_2^2 = \{v \in L_1^2 \mid d(b, v) < 4\} = \{b, c\}$$

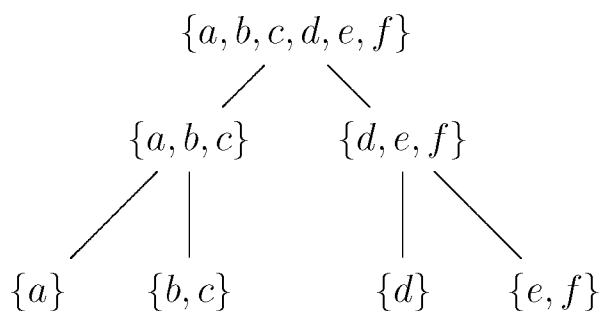
$$R = \{b, c\} \setminus \{b, c\} = \{\emptyset\}$$

$$u_1 = u_1 + 1 = 2, k_2 = k_2 + 1 = 2$$

L_2^2 наступна вершина, з'єднуємо її ребром з L_1^1 .

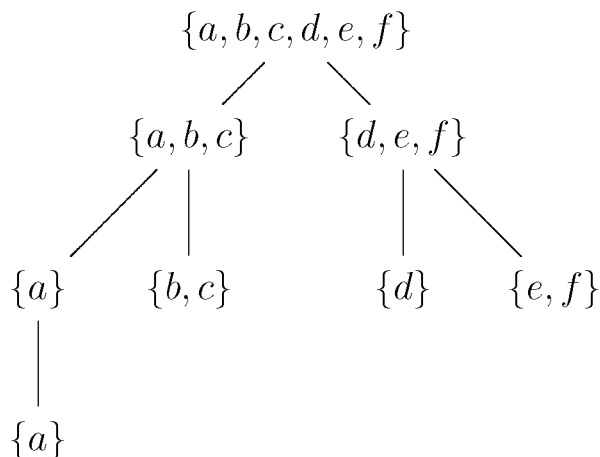


За аналогією до попередніх двох вершин можемо отримати наступні 2 вершини цього рівня $L_2^3 = \{d\}$ та $L_2^3 = \{e, f\}$ після чого граф виглядатиме наступним чином:



Спускаємось до розбиття наступного рівня. $q = 2$, $k_3 = 0$, $i = 1$, $R = L_2^1 = \{a\}$.

$|R| = 1$, відповідно $k_3 = 1$ $L_3^1 = L_2^1 = \{a\}$. L_3^1 буде вершиною третього рівня з'єднаємо ребром з L_2^1 .



$i = 2$, $R = L_2^2 = \{b, c\}$, $u_2 = 0$.

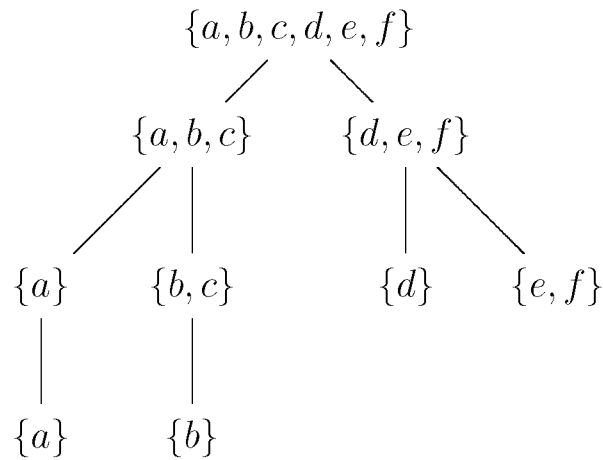
Зафіксуємо $x_2^2 = b$. В такому випадку

$$L_3^2 = \{v \in L_2^2 \mid d(b, v) < 2\} = \{b\}$$

$$R = \{b, c\} \setminus \{b\} = \{c\}$$

$$u_2 = u_2 + 1 = 1, k_3 = k_3 + 1 = 2$$

L_3^2 чергова вершина третього рівня, з'єднаємо ребром з L_2^2 .



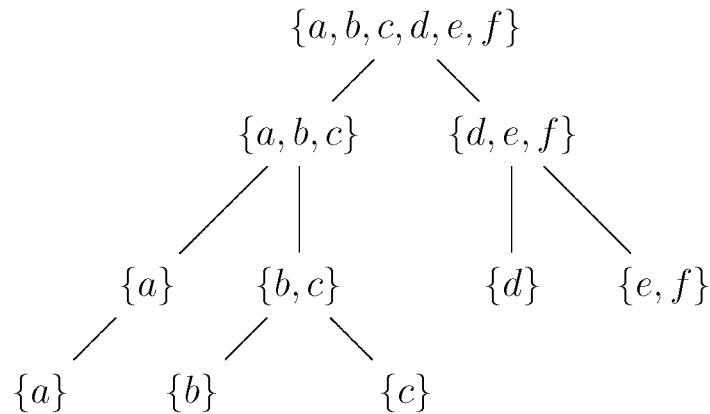
R ще непорожня тому продовжимо розбивати L_2^2 , тоді $x_2^2 = c$

$$L_3^3 = \{v \in L_2^2 \mid d(c, v) < 2\} = \{c\}$$

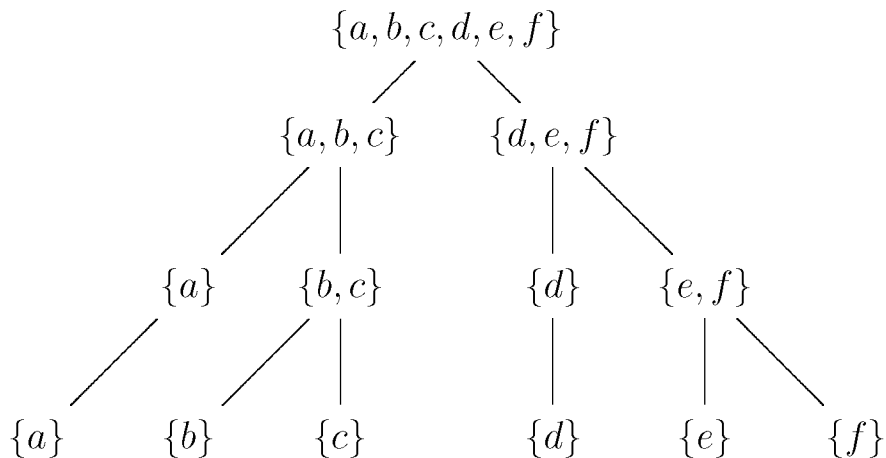
$$R = \{c\} \setminus \{c\} = \{\emptyset\}$$

$$u_2 = u_2 + 1 = 2, k_3 = k_3 + 1 = 3$$

L_2^3 – вершина, з'єднуємо її ребром з L_2^2 .



За аналогією побудови попередніх трьох вершин, ми можемо добудувати дерево T , що зображуватиме прямий добуток $X \oplus X$ простору (X, d) самого на себе. В результаті дерево T матиме вигляд:



Варто зазначити, що згідно з теоремами 2.3 та 2.4 метрична розмірність прямої суми $md(X \oplus X) = 2$. Метричний базис складатиметься з точок $\{b, e\}$.

2.3. Висновки до розділу

В розділі 2 розглядається задача пошуку метричної розмірності скінченних ультраметричних просторів. Наведено алгоритм побудови дерева, що визначає простір кінцевих вершин ізометричний

скінченному ультраметричному простору, часова складність якого $O(n^5)$. За допомогою цього алгоритму, а також результатів наведених в [5], доведено, що метрична розмірність довільного скінченного ультраметричного простору може бути обчислена за поліноміальний час. Цей алгоритм знаходження метричної розмірності для скінченного ультраметричного простору описаний. Наведено приклади, охарактеризовано ультраметричні простори метрична розмірність яких дорівнює одиниці.

Результати цього розділу було опубліковано у працях [49], [50].

Розділ 3

МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

3.1. Метрична трансформація

Твердження 3.1. *Нехай маємо деякий метричний простір (X, d) , також припустимо, що $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ метрична трансформація. Тоді метричний базис X є також метричним базисом метричної трансформації $(X, s(d))$.*

Доведення. Нехай $V = \{v_i, i \in I\}$ — метричний базис для простору (X, d) . Відповідно до визначення метричного базису, для будь-яких двох елементів $u, w \in X$ існує $v_j \in V$ такий, що

$$d(u, v_j) \neq d(w, v_j),$$

тобто v_j розділяє елементи u та w . Оскільки функція s монотонно зростаюча матимемо, що

$$s(d(u, v_j)) \neq s(d(w, v_j)).$$

Таким чином v_j розділяє u та w з простору $(X, s(d))$. Отже, V — розділяюча множина метричного простору $(X, s(d))$.

Далі нам необхідно показати, що V має мінімальну потужність за відношенням включення. Припустимо, що існує елемент v_l , що множина $V \setminus \{v_l\}$ є розділяючою множиною для $(X, s(d))$. Але V є мінімальною розділяючою множиною (X, d) . Це означає, що існують

елементи $u, w \in X$ такі, що для будь-яких $v_j \in V \setminus \{v_l\}$ виконується така рівність:

$$d(u, v_j) = d(w, v_j).$$

Тоді це означає, що

$$s(d(u, v_j)) = s(d(w, v_j)),$$

тобто u і w не розділяються довільною точкою множини $V \setminus \{v_l\}$ в просторі $(X, s(d))$. Таким чином, $V \setminus \{v_l\}$ не може бути метричним базисом для метричної трансформації $(X, s(d))$. $\square$

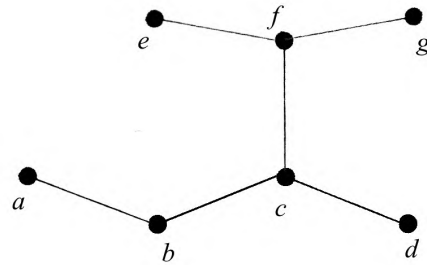
Оскільки потужність метричного базису метричного простору є метричною розмірністю цього простору, то з твердження 3.1 матимемо наступний наслідок:

Наслідок 3.2. *Для будь-якої шкали s метрична розмірність метричного простору (X, d) дорівнює метричній розмірності метричної трансформації $(X, s(d))$.*

Наслідок 3.3. *Нехай простори (X, d_X) та (Y, d_Y) — ізоморфні, тоді $md(X) = md(Y)$.*

Доведення. Якщо простори (X, d_X) та (Y, d_Y) — ізоморфні, то існує метрична трансформація s така, що $(X, s(d_X))$ та (Y, d_Y) — ізометричні, тоді $md(Y) = md(s(X))$ за твердженням 3.1 маємо, що $md(X) = md(s(X)) = md(Y)$. $\square$

Приклад 15. Розглянемо метричний простір X зображений на рисунку 3.1.. Матриця відстаней в такому випадку виглядатиме на-

Рис. 3.1. Метричний простір X

ступним чином:

$$M == \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Як метричний базис можна взяти множину $\{a, e\}$, і, відповідно, метрична розмірність $md(X, d) = 2$. Розглянемо метричну трансформацію на прикладі масштабованої метрики з $t = 2$. Матриця відста-

ней зміниться й викладатиме наступним чином:

$$M == \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Але метрична розмірність при цьому збережеться $md(X, s(d)) = 2$.

3.2. Вінцевий добуток метричних просторів

Теорема 3.4. *Нехай X – скінченний метричний простір, а Y – рівномірно дискретний метричний простір обмеженого діаметра, $md(Y) < \infty$. Тоді розмірність вінцевого добутку метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) дорівнює*

$$md(Xwr_s Y) = |X| * md(Y).$$

У випадку коли $md(Y) = \infty$, то $md(Xwr_s Y) = \infty$.

Доведення. Нехай $v_1, \dots, v_l$ – метричний базис метричного простору (Y, d_Y) . Припустимо, що $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Покажемо, що множина визначена наступним чином:

$$B = \{(x_j, v_i) | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$$

буде метричним базисом $Xwr_s Y$.

Нехай (x_1, y_1) та (x_2, y_2) – два різних елементи множини $Xwr_s Y$. Згідно з визначенням вінцевого добутку метричних просторів ви-

пливає, що якщо $x_1 \neq x_2$, то елементи (x_1, y_1) та (x_2, y_2) розділяються (x_2, v_2) . Справді,

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2),$$

$$\rho((x_2, y_2), (x_2, v_2)) = s(d_Y(y_2, v_2)).$$

З нерівності 1.3 випливає, що

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \rho((x_2, y_2), (x_2, v_2)).$$

Таким чином точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) розділяються (x_2, v_2) .

Нехай $x_1 = x_2$. В такому випадку, оскільки $v_1, \dots, v_n$ – метричний базис для Y , то існує v_j , що розділяє y_1 та y_2 . Матимемо:

$$\rho((x_1, y_1), (x_1, v_j)) = s(d_Y(y_1, v_j)),$$

$$\rho((x_2, y_2), (x_1, v_j)) = s(d_Y(y_2, v_j)).$$

Оскільки v_j розділяє y_1 та y_2 , то

$$s(d_Y(y_1, v_j)) \neq s(d_Y(y_2, v_j)).$$

В такому випадку всі елементи множини X мають бути включені в метричний базис вінцевого добутку.

Тепер покажемо, що B це базис. Припустимо, що множина $B' = B/\{x_1, v_1\}$ є базисом. Оскільки $v_1, \dots, v_n$ – базис множини Y , то існують елементи $y_1, y_2 \in Y$, що не розділяються $v_2, v_3, \dots, v_n$, а тільки точкою v_1 . В такому випадку елементи (x, y_1) та (x, y_2) не розділятимуться елементами з множини B' . Це означає, що B є мінімальною множиною, і таким чином B є метричним базисом простору $Xwr_s Y$.

В результаті матимемо, що

$$md(Xwr_s Y) = |X|md(Y).$$



З теореми 3.4 випливає твердження.

Наслідок 3.5. *Якщо простір X нескінченний, тоді $md(Xwr_s Y) = \infty$.*

Приклад 16. Розглянемо два метричні простори визначені на $\mathbb{Z}$: $[-3; 3]$ та $\{1, 2, 3\}$ з визначеною на них Евклідовою метрикою. Нехай $X = [-3; 3]$, а $Y = \{1, 2\}$. Вінцевий добуток метричних просторів складатиметься з набору сегментів, що попарно не перетинаються. Шкалу виберемо таким чином, щоб довжина кожного з відрізків була меншою ніж 1. Відстань між точками цього простору визначатиметься наступним чином:

1. якщо точки належать до того ж сегменту то відстань між ними буде рахуватись як евклідова
2. якщо точки належать до сегментів з номерами p та q , $p \neq q$, то відстань між ними буде $|p - q|$.

Враховуючи той факт, що метрична розмірність простору Y буде дорівнювати одиниці, а також те, що відповідно до теореми 3.4 $md(Xwr_s Y) = |X|md(Y)$ матимемо, що метрична розмірність вінцевого добутку $md(Xwr Y) = 6 \times 1 = 6$

3.3. Метрична розмірність прямої суми метричних просторів

Для початку розглянемо допоміжні твердження та їх доведення.

Твердження 3.6. *Нехай (X, d) — метричний простір, у якого всі значення метрики d різні. В такому випадку $md(X) = 1$.*

Доведення. Справді, оскільки всі значення метрики в метричному просторі X різні, то для довільних точок u, v, w простору X відстані $d(u, v)$, $d(u, w)$, $d(w, v)$ попарно різні, а тому метричним базисом є довільна точка простору і $md(X) = 1$. $\square$

Лема 3.7. *Метричний базис n -точкового еквідистантного простору складається з $n - 1$ точок, тобто $md(Y) = |Y| - 1$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що для довільного n -точкового метричного простору X довільна множина A , що складається з $n - 1$ точки простору, є розділяючою. Справді, для довільної пари точок простору принаймні одна з точок належить множині A , а отже вона і буде розділяючою для пари.

Оскільки всі значення метрики в метричному просторі Y однакові, то для довільних точок u, v, w простору Y відстані $d(u, v)$, $d(u, w)$ будуть попарно різні тоді й тільки тоді, коли дві точки з цих трьох точок будуть співпадати. Тобто, для довільної пари точок одна з них має належати базису. А це, у свою чергу, означає, що метричний базис простору Y містить $n - 1$ точку. $\square$

Твердження 3.8. *Нехай I — деяка множина індексів, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ — підмножина множини дійсних чисел, для якої існує найбільший або найменший елемент x_0 . Тоді точка x_0 є метричним базисом простору X з Евклідовою метрикою, і, відповідно, $md(X) = 1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що x_0 — найбільший елемент множини X . Тоді відстань від x_0 до довільної точки x_i , $i \in I$, обчислюється за формулою $|x_0 - x_i|$. А оскільки всі числа з множини $X = \{x_i\}_{i \in I}$ попарно різні, то і всі відстані також будуть попарно різні. А отже точка x_0 є розділяючою, тобто

є метричним базисом і $md(X) = 1$. □

Для довільних різних значень констант c_1 та c_2 , які задовольняють умові 1.4 метричний простір прямої суми визначений за допомогою константи c_1 та метричний простір визначений за допомогою константи c_2 ізоморфні [45]. Оскільки за наслідком 3.3 метрична розмірність прямої суми метричних просторів $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ не залежить від вибору константи c то надалі ми не будемо її уточнювати.

Теорема 3.9. *Нехай метричні простори $X_1, \dots, X_n$ мають скінченну метричну розмірність і є просторами скінченного діаметру. Тоді метрична розмірність прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів*

$$md(X_1 \oplus \dots \oplus X_n) = \sum_{i=1}^n (md(X_i)).$$

Доведення. Нехай $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{k_i}^i\}$ — метричний базис простору X_i , $1 \leq i \leq n$. Спочатку покажемо, що об'єднання множин

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_i$$

є розділяючою множиною. Справді, нехай x, y довільні точки простору $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Якщо x і y належать одній множині X_j , $1 \leq j \leq n$, то існує точка v_i^j , $1 \leq i \leq k_j$, метричного базису V_j , а отже і множини V , що їх розділяє. Якщо x і y належать різним множинам X_j і X_q , $1 \leq j, q \leq n$, то вони розділятимуться довільною точкою множин V_j або V_q , які є підмножинами множини V .

Покажемо тепер, що множина V є метричним базисом прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, тобто найменшою за відношенням включення розділяючою множиною.

Нехай $v_j^q \in V$ — деяка точка метричного базису простору (X_q, d_{X_q}) , $1 \leq q \leq n$, $1 \leq i \leq k_q$. Покажемо, що множина $V \setminus \{v_j^q\}$ не є метричним базисом $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Оскільки точка, $v_j^q \in V$ входить до метричного базису простору (X_q, d_{X_q}) , то існують деякі точки $u, w \in X_q$, що розділяються точкою v_j^q і не розділяються іншими точками з V_q . Тоді точки $u, w \in X_q$ не розділятимуться довільною точкою множини $V \setminus \{v_j^q\}$. Справді, точками множини $V_q \setminus \{v_j^q\}$ вони не розділятимуться за вибором пари u, w . Крім того, згідно з визначенням метрики τ для довільної точки $v_i^l \in V$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq q$, $1 \leq i \leq k_l$, яка не є точкою підмножини X_q виконується рівність:

$$\tau(u, v_l) = \tau(w, v_l) = c.$$

Оскільки точку v_j^q ми вибирали довільну, то V є найменшою за відношенням включення розділяючою множиною $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, тобто метричним базисом. Оскільки множини X_i не перетинаються, то $|V| = |\bigcup_{i=1}^n V_i|$, а відповідно

$$md(X_1 \oplus \dots \oplus X_n) = \sum_{i=1}^n (md(X_i)).$$

□

Наслідок 3.10. Для довільних скінченних метричних просторів скінченного діаметра $X_1 \dots X_n$

$$md(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n) \geq n.$$

Доведення. Оскільки для довільного $1 \leq i \leq n$ простір X_i не порожній, то метрична розмірність $md(X_i) \geq 1$, звідки випливає твердження наслідку. □

Наслідок 3.11. Для довільних метричних просторів X_1, X_2 скінченного діаметра метрична розмірність $md(X_1 \oplus X_2) = 2$ тоді й

тільки тоді, коли метрична розмірність X_1 дорівнює метричній розмірності X_2 і дорівнює одиниці.

Доведення. За теоремою 3.9 якщо $md(X_1) = md(X_2) = 1$, то метрична розмірність їх суми дорівнює 2. З іншого боку, оскільки метричні простори X_1 та X_2 непорожні, то метрична розмірність їх суми не менше 2, що і показує справедливості твердження наслідку. $\square$

3.4. Метрична розмірність прямого добутку метричних просторів

Метричні простори $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$, $(X \times Y, d_\infty)$ отримані в результаті прямого добутку метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) з точки зору метричної розмірності всі три конструкції різні, хоча й топологічно еквівалентні. І для відповідних метричних просторів метрична розмірність обчислюватиметься по-різному.

Теорема 3.12. *Нехай X — деякий метричний простір, всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, $|Y| = m \geq 4$. Тоді для метричного простору $(X \times Y, d_1)$ виконується рівність*

$$md(X \times Y, d_1) = md(Y) = m - 1.$$

Доведення. Побудуємо розділяючу множину B метричного простору $(X \times Y, d_1)$ визначеного як прямий добуток просторів $X = \{x_i\}_{i \in I}$ та $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, де I — деяка множина індексів.

Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y, d_1)$. Припустимо, що ці точки розділяються деякою точкою $(x_i, y_j) \in B$, $i \in I$, $1 \leq j \leq m$. Тоді, згідно з визначенням матимемо:

$$d_1((x_1, y_1), (x_i, y_j)) \neq d_1((x_2, y_2), (x_i, y_j)).$$

Цю нерівність можна переписати в такому вигляді:

$$d_X(x_1, x_i) + d_Y(y_1, y_j) \neq d_X(x_2, x_i) + d_Y(y_2, y_j) \quad (3.1)$$

Розглянемо наступні випадки:

1. $x_1 = x_2$. В такому випадку в умові (3.1) доданки $d_X(x_1, x_i)$ та $d_X(x_2, x_i)$ будуть рівними й наша умова зведеться до

$$d_Y(y_1, y_j) \neq d_Y(y_2, y_j),$$

тобто y_j повинна розділяти точки y_1 і y_2 . А оскільки простір Y еквідистантний, і точки y_1 і y_2 ми вибирали довільним чином, то в множину B мають входити всі точки вигляду (x_i, y_j) , $1 \leq j \leq m-1$, для деякого фіксованого i , $i \in I$.

2. $x_1 \neq x_2$. Покажемо, що довільна точка (x_i, y_j) , $1 \leq j \leq m-1$, $y_j \neq y_1$, $y_j \neq y_2$, розділятиме точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$. Спочатку зауважимо, що в множині B така точка існує, оскільки $|Y| \geq 4$. Оскільки простір (Y, d_Y) – еквідистантний, то

$$d_Y(y_1, y_j) = d_Y(y_2, y_j),$$

а отже умова 3.1 зведеться до вигляду

$$d_X(x_1, x_i) \neq d_X(x_2, x_i).$$

Але в просторі (X, d_X) всі значення метрики попарно різні, тому нерівність виконуватиметься.

Зауважимо, що за побудовою, множина

$$B = \{(x_i, y_1), \dots, (x_i, y_{m-1})\},$$

де i деякий фіксований індекс з множини I , є також мінімальною розділяючою множиною, тобто базисом. Таким чином матимемо, що розмірність прямого добутку метричних просторів дорівнює розмірності еквідистантного простору

$$md(X \times Y, d_1) = m - 1 = md(Y).$$

□

Теорема 3.13. *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — скінченні еквідистантні метричні простори, то метрична розмірність прямого добутку цих просторів з визначеною метрикою d_1 дорівнює*

$$md(X \times Y, d_1) = md(X) + md(Y).$$

Доведення. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, для яких $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Покажемо, що множина

$$B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$$

є базисом простору $(X \times Y, d_1)$. Справді, для будь-яких двох точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$ простору $X \times Y$, ми завжди можемо знайти розділяючу точку (x_u, y_v) таку, щоб одна з її координат співпадала з відповідною координатою точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$. Тобто, щоб виконувалась одна з рівностей $x_u = x_{u_1}$ чи $x_u = x_{u_2}$, $y_v = y_{v_1}$ чи $y_v = y_{v_2}$. Тоді один з доданків в сумах:

$$d_1((x_{u_1}, y_{v_1}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_1}, x_u) + d_Y(y_{v_1}, y_v)$$

$$d_1((x_{u_2}, y_{v_2}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_2}, x_u) + d_Y(y_{v_2}, y_v)$$

буде перетворюватися в 0. Відповідно, відстані будуть різними. Таким чином $B_{X \times Y}$ є розділяючою множиною.

Покажемо тепер, що $B_{X \times Y}$ є мінімальною за відношенням включення.

Припустимо, що метричним базисом буде множина

$$B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\} \setminus \{(x_i, y_j)\},$$

де $1 \leq i < n, j = m$ або $i = n - 1, 1 \leq j < m$. Розглянемо дві точки з координатами (x_i, y_j) та (x_i, y_m) . В множині B для них має існувати розділяюча точка з координатами (u, v) . Згідно з визначенням розділяючої точки матимемо:

$$d_1((u, v), (x_i, y_j)) \neq d_1((u, v), (x_i, y_m))$$

$$d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_i) \neq d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_m)$$

$$d_Y(v, y_i) \neq d_Y(v, y_m)$$

А оскільки наші простори еквідистантні то відстані $d_Y(v, y_i)$ та $d_Y(v, y_m)$ будуть рівними, тобто наше припущення неправильне і точка з координатами (x_i, y_j) має входити до метричного базису.

Розмір, таким чином, визначеного базису буде дорівнювати:

$$n - 1 + m - 1 = (n - 1) + (m - 1) = md(X) + md(Y)$$

□

Вводячи додаткові обмеження на метричні простори, кількість точок у базисі прямого добутку можна зменшити. Найтривіальнішим прикладом в даному разі буде випадок, коли простори (X, d_X) і (Y, d_Y) такі, що всі відстані в $(X \times Y, d_1)$ є попарно різними. Тоді, відповідно, метрична розмірність простору $(X \times Y, d_1)$ дорівнюватиме одиниці $md(X \times Y) = 1$.

Теорема 3.14. *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — скінченні еквідистантні метричні простори, то метричний простір визначений на їх добуткові з Евклідовою метрикою*

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$$

матиме метричну розмірність, що дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів

$$(X \times Y, d_2) = md(X) + md(Y). \quad (3.2)$$

Доведення. Для просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) , де $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ визначимо підмножину

$$B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$$

прямого добутку $X \times Y$ й покажемо, що ця множина є розділяючою. Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$ та розділяючу їх (x_i, y_j) . Згідно з визначенням метричного базису матимемо:

$$\begin{aligned} d_2((x_1, y_1), (x_i, y_j)) &\neq d_2((x_2, y_2), (x_i, y_j)) \\ \sqrt{d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2} &\neq \sqrt{d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2} \\ d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2 &\neq d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2 \end{aligned}$$

Далі застосовуючи міркування аналогічні наведеним в доведенні теореми (3.13) матимемо, що базис метричного простору $(X \times Y, d_2)$ такий самий як і для метричного простору $(X \times Y, d_1)$, а відповідно їх метричні розмірності збігаються. $\square$

Зауваження. В теоремі 3.14 рівність (3.2) виконується така ж як і для метрики d_1 . Але, метрична розмірність просторів $(X \times Y, d_1)$ та $(X \times Y, d_2)$ збігається не завжди. Для прикладу нехай простір

X складається з вершини прямокутного трикутника з відстанями між ними, що дорівнюють 3, 4 та 5. А простір Y визначити як дві точки з відстанню 3 між ними. В такому випадку до метричного базису $(X \times Y, d_1)$ входить лише одна точка, а в метричний базис простору $(X \times Y, d_2)$ входять дві точки. Тому матимемо, що

$$md(X \times Y, d_1) \neq md(X \times Y, d_2).$$

Теорема 3.15. *Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) — скінченні еквідистантні метричні простори, на яких визначено прямий добуток $X \times Y$ з метрикою*

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Метрична розмірність метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$ в такому випадку дорівнюватиме

$$md(X \times Y, d_\infty) = \begin{cases} |X| \times (|Y| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X > c_Y, \\ |Y| \times (|X| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X < c_Y, \\ |X| \times |Y| - 1, & \text{у випадку, якщо } c_X = c_Y, \end{cases}$$

де c_X і c_Y ненульові значення метрик просторів X і Y відповідно.

Доведення. Нехай, як і раніше, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ і $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Розглянемо можливі випадки.

1. $c_X > c_Y$. Визначимо множину

$$B = \{(x_i, y_j) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m - 1\}$$

й покажемо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$.

В такому випадку, для двох довільних точок (x_u, y_m) та (x_v, y_m) , що належать множині $X \times Y$ та не входять до метричного базису

B ми зможемо взяти розділяючою деяку точку (x_u, y_j) й таким чином матимемо що

$$\begin{aligned} d_\infty((x_u, y_m), (x_u, y_j)) &= \max\{d_X(x_u, x_u); d_Y(y_m, y_j)\} = d_Y(y_m, y_j) \\ d_\infty((x_v, y_m), (x_u, y_j)) &= \max\{d_X(x_u, x_v); d_Y(y_m, y_j)\} = d_X(x_u, x_v) \\ d_Y(y_m, y_1) &\neq d_X(x_u, x_v). \end{aligned}$$

В результаті наші відстані будуть різними й B буде розділяючою множиною. Тепер покажемо, що B є мінімальною.

Нехай існує деяка множина

$$B' = \{(x_i, y_j) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m-1\} \setminus \{(x_{u'}, y_{v'})\},$$

де $1 \leq u' \leq n, 1 \leq v' < m$, і припустимо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$. Нехай також задано пару точок $(x_{u'}, y_{v'})$ та $(x_{u'}, y_m)$ простору $X \times Y$. Якщо ця пара точок розділятиметься точкою з метричного базису $(x_u, y_v) \in B'$ матимемо:

(а) $x_u \neq x_{u'}$. Розглянемо відстані між точками

$$\begin{aligned} d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) &= \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} = \\ &= d_X(x_{u'}, x_u) = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_m, y_v)\} = \\ &= d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тобто $d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v))$. А це неможливо за визначенням метричного базису.

(б) $x_u = x_{u'}$. В цьому разі наші відстані матимуть наступний

ВИГЛЯД

$$\begin{aligned} d_{\infty}((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) &= \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} = \\ d_Y(y_{v'}, y_v) &= d_Y(y_m, y_v) = \max\{d_X(x_{u'}x_u); d_Y(y_m, y_v)\} = \\ &= d_{\infty}((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)) \quad (3.4) \end{aligned}$$

Що також неможливо за визначенням.

Таким чином точка $(x_{u'}, y_{v'})$ має входити до метричного базису B метричного простору $(X \times Y, d_{\infty})$, а сама визначена нами множина B є мінімальною.

В результаті матимемо, що

$$md(X \times Y, d_{\infty}) = |X| \times (|Y| - 1).$$

2. $c_X < c_Y$. Використовуючи аналогічні попереднім міркування, в цьому випадку отримаємо, що метрична розмірність прямого добутку становить

$$md(X \times Y, d_{\infty}) = |Y| \times (|X| - 1).$$

3. $c_X = c_Y$. Спробуємо побудувати розділяючу множину B для простору $(X \times Y, d_{\infty})$. Нехай маємо дві різні точки $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2}) \in X \times Y$ та розділяючу їх $(x_i, y_j) \in B$. В такому випадку, згідно з визначенням, в нас має виконуватись наступна нерівність:

$$\max\{d_X(x_{u_1}, x_i); d_Y(y_{v_1}, y_j)\} \neq \max\{d_X(x_{u_2}, x_i); d_Y(y_{v_2}, y_j)\}$$

Оскільки наші відстані еквідистантних просторів X та Y однакові, то дана нерівність може виконуватись лише у випадку, коли один із максимумів перетворюється в 0. Це можливо лише тоді, коли одна з точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$ співпадатиме з

базисною. І так має бути для кожної з пар точок простору $(X \times Y, d_\infty)$. Таким чином в базис B входять всі точки окрім однієї, а метрична розмірність цього простору становитиме

$$md(X \times Y, d_\infty) = |X| \times |Y| - 1.$$

При чому за побудовою така множина B є мінімальною.

□

3.5. Висновки до розділу

В розділі 3 розглядається метрична розмірність деяких конструкцій метричних просторів. Показано, що метрична розмірність для метричної трансформації дорівнює метричній розмірності метричного простору до якої її було застосовано. Повністю охарактеризовано метричну розмірність вінцевого добутку метричних просторів. А також наведено формули для обчислення прямої суми метричних просторів та прямого добутку для деяких типів метричних просторів.

Результати розділу опубліковано в [46, 51]

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджується метрична розмірність скінченних ультраметричних просторів, а також метрична розмірність деяких конструкцій метричних просторів з у мовами скінченності.

Наведено алгоритм зображення скінченного ультраметричного простору за допомогою кореневого дерева, що має складність за часом $O(n^5)$, тобто показано поліноміальну оцінку за часом для цього алгоритму. Доведено, що для будь-якого скінченного ультраметричного простору X існує поліноміальний за часом алгоритм для обчислення його метричної розмірності.

Наведено алгоритм знаходження метричної розмірності для скінченного ультраметричного простору.

Повністю охарактеризовані ультраметричні простори метрична розмірність яких дорівнює одному.

Показано, що для довільної шкали s метрична розмірність метричного простору дорівнює метричній розмірності його трансформації за допомогою цієї шкали.

Наведено формулу для підрахунку метричної розмірності вінцевого добутку скінченного і рівномірно дискретного метричних просторів. Доведено, що метрична розмірність вінцевого добутку метричних просторів X та Y дорівнює добутку кількості елементів простору X на метричну розмірність простору Y . У випадку коли метрична розмірність простору Y метрична розмірність конструкції також дорівнює нескінченності.

Показано, що метрична розмірність прямої суми метричних про-

сторів скінченного діаметра $X_1 \dots X_n$ дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів. Досліджено деякі властивості метричної розмірності прямої суми метричних просторів. Зокрема, якщо X — довільний метричний простір всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, то метрична розмірність прямого добутку таких просторів дорівнює метричній розмірності простору Y , тобто $|Y| - 1$.

Отримано формули для підрахунку метричної розмірності прямого добутку скінченних еквідистантних метричних просторів для різних метрик d_1 , d_2 та d_∞ .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Blumenthal L. M. Theory and applications of distance geometry. – Oxford: Clarendon Press, 1953.
- [2] Harary F., Melter R. A. On the metric dimension of a graph // Ars Combinatoria. – 1976. – **2**. – P. 191–195.
- [3] Slater P. J. Leaves of trees // Congr. Number. – 1975. – **14**. – P. 549–559.
- [4] Khuller S., Raghavachari B., Rosenfeld A. Landmarks in graphs // Disc. Appl. Math. – 1996. – **70**(3) – P. 217–229.
- [5] Sebo A., Tannier E. On Metric Generators of Graphs // Mathematics of Operations Research. – 2004. – **29**(2). – P. 383–393.
- [6] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. – Freeman, New York. – 1979.
- [7] Chartrand // Far East J. Appl. Math. – 2002. – **8**, 3. – P. 217–229.
- [8] Fernau H., Heggernes P., van't Hof P., Meister D., Saei. R.: Computing the metric dimension for chain graphs. Inform. Process. Lett. – 2015. – **115**(9). – P. 671–676.
- [9] Melter R. A., Tomescu I. Metric bases in digital geometry // Comput.Vision, Graphics, Image Process. – 1984. – **25**. – P.113–121.

- [10] Feng M., Xu M., Wang K. On the metric dimension of line graphs // Discrete Appl. Math. – 2013. – **161**. – P. 802–805.
- [11] Dudenko M., Oliynyk. B. On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4 // Algebra Discrete Math. – 2018. – **26**(2). – P. 256–269.
- [12] Diaz J., Potttonen O., Serna M., van Leeuwen E.J. On the complexity of metric dimension. In: Algorithms—ESA 2012. // Lecture Notes in Comput. Sci. – 2012. – **7501**. – P. 419–430 .
- [13] Rodriguez-Velazquez J.A., Yero I.G. A note on the partition dimension of Cartesian product graphs. // Appl. Math. Comput. – 2010. – **217**. – P. 3571–3574. doi: 10.1016/j.amc.2010.08.038
- [14] Eroh L., Feit P., Kang C., Yi E. The effect of vertex or edge deletion on the metric dimension of graphs. // J. Comb. – 2015. – **6**. – P. 433–444. doi: 10.4310/JOC.2015.v6.n4.a2
- [15] *Bau S., Beardon A.* The Metric Dimension of Metric Spaces // The Metric Dimension of Metric Spaces – 2013 – **13** – P. 295–305.
- [16] Caceres J., Hernando C., Mora M., Pelayo I. M., Puertas M. L, Seara C., Wood D. R. On the metric dimension of Cartesian product of graphs // SIAM J. Disc. Math. – 2007. – **21**(2). – P. 423–441.
- [17] Chau K., Gosselin S. The metric dimension of circulant graphs and their cartesian products. // Opuscula Math. – 2017. – **37**(4). – P. 509–534. doi:10.7494/OpMath.2017.37.4.509
- [18] Saputro S.W., Baskoro E. T., Salman A. N. M., Suprijanto D. The metric dimension of a complete n-partite graph and its Cartesian

- product with a path // J. Comb. Math. Comb. Comput. – 2009. – **71**. – P. 283–293.
- [19] Assiyatun H., Bača M., Baskoro E.T., Salmana A.N.M., Saputro S.W., Simanjuntak R., Uttunggadewaa S. The metric dimension of the lexicographic product of graphs. // Discr. Math. – 2013. – **313**. – P. 1045–1051. doi:10.1016/j.disc.2013.01.021
- [20] Yero I. G., Kuziak D., Rodriguez-Valazquez J. A. On the metric dimension of corona product graphs // Comput. Math. Appl. – 2011. – **61**(9). – P. 2793–2798.
- [21] Jannesari M., Omoomi B. The metric dimension of lexicographic product of graphs // Discrete Math. – 2012. – **312**, 22. – P. 3349–3356.
- [22] Heydarpour M., Maghsoudi S. The metric dimension of geometric spaces // Topology and its applications – 2014 – **178** – P. 230–235.
- [23] F. Hausdorff. Uber innere Abbildungen // Fund. Math. – 1934. – **23** – P. 279–291.
- [24] J. de Groot. Non-Archimedean Metrics in Topology // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – **7**(5). – 948–953.
- [25] Grigorchuk R. I., Nekrashevich V. V., Sushchanskii V. I.: Automata, dynamical systems, and groups. // Proc. Steklov Inst. Math. – 2000. – **231**(4). – P. 128–203.
- [26] Lemin A.J., Lemin. V.A.: On a universal ultrametric space // Topology Appl. – 2000. – **103** – P. 339–345.
- [27] Blumenthal L. M. Remarks concerning the euclidean four-point property. // Ergebnisse Math. Kolloq. – 1936. – **7**. – P. 7–10.

- [28] Schoenberg I. J. Metric spaces and completely monotone functions. // Ann. of Math. – 1938. – **39**. – P. 811–841. doi:10.2307/1968466
- [29] Von Neumann J., Schoenberg I. J. Fourier integrals and metric geometry. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **50** – P. 226–251. doi:10.2307/1989957
- [30] Oliynyk B. Wreath product of metric spaces. // Algebra Discrete Math. – 2007. – **4**. – P. 123–130.
- [31] Oliynyk B. Infinitely iterated wreath products of metric spaces. // Algebra Discrete Math. – 2013. – **15**(1). – P. 48–62.
- [32] *Олійник Б.В.* Деякі властивості скінченних ультраметричних просторів // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2006. – Т. 51 – С. 17–19.
- [33] Deza M., Deza E. Encyclopedia of distances – Berlin: Springer, 2009. – 590 p.
- [34] Searcoid M. Metric Spaces. – Springer, London, 2007.
- [35] Diestel R. Graph theory (3rd ed.) – New York: Springer-Verlag, Berlin – 2005.
- [36] Hertel E. Convexity in finite metric spaces // Geom. Dedicata. – 1994. – **52**. – P. 215– 220.
- [37] Deza M. M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. – Berlin: Springer, 1997. – 588 p.
- [38] Chartrand G., Eroh L., Johnson M. A. and Oellermann O. R. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph // Discrete Appl. Math. – 2000. – **105**. – P. 99–113.

- [39] Олійник А.С., Суцанський В.І., Математична логіка: навчальний посібник. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2013. – 171 с.
- [40] Cook S. A. The Complexity of Theorem-Proving Procedures. // Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '71) – 1971. – P. 151-158.
- [41] Вербіцький О.В. Вступ до криптології. – Львів: ВНТЛ, 1998. – 248 с.
- [42] Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. & Stein C. Introduction to Algorithms. – The MIT Press – 2001.
- [43] Hughes B.: Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence. // Adv. Math. – 2004. – **189**. P. 148–191.
- [44] Gurvich V., Vyalyi M. Characterizing (quasi-)ultrametric finite spaces in terms of (directed) graphs. // Discrete Appl. Math. – 2012. – **160**(12) P. 1742-1756.
- [45] Олійник Б.В. k -однорідність n -кратної суми метричного простору на себе. – Київ, 2008.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

- [46] Ponomarchuk B. Metric dimension of metric transform and wreath product // Carpathian Math. Publ. – 2019. – **11**(2), P. 10–13 .
- [47] Ponomarchuk B. Metric dimension of metric transform and wreath product. // XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. – Vinnytsia, 2019 — **142**, P. 83-85.
- [48] Пономарчук Б. С. Метрична розмірність прямого добутку метричних просторів // IX всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Тези доповідей. – Київ, 2020 – С. 30.
- [49] Oliynyk B., Ponomarchuk B. Metric dimension of ultrametric spaces // International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Book of abstracts. – 2020, Kyiv – **93** – P. 59.
- [50] Oliynyk B., Ponomarchuk B. Metric dimension of ultrametric spaces // Serdica Math. J. – 2020 – **46** (2020), P. 195–206.
- [51] Пономарчук Б. Метрична розмірність прямої суми та прямого добутків метричних просторів // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка – 2020. – **1-2**. – С. 41–46.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. Семінар під кінець року при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, Київ, 26 грудня 2018 р.);
2. XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (Вінниця, 2 – 6 липня 2019 р.)
3. Семінар під кінець року при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, Київ, 26 грудня 2019 р.);
4. IX всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики (Київ, 10-11 квітня 2020 р.);
5. International mathematical conference devoted to the 60-th anniversary of Department of Algebra and Mathematical Logic (Київ, 14-17 липня 2020 р.)