

СПРАВЕДЛИВА ЦІНА ЄВРОПЕЙСЬКИХ ОПЦІОНІВ ДЛЯ ГАММА-ОБЕРНЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЦІНОУТВОРЕННЯ АКЦІЙ

Знайдено формулу обрахунку справедливої ціни опціонів європейського типу для деяких моделей ціноутворення акцій, що використовують «ринковий» «активний» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргіальною гамма-оберненою щільністю.

Ключові слова: опціон, лог-дохідності, геометричний броунівський рух, дифузійний процес, обернений гамма-розподіл, розподіл Стюдента.

Вступ

У 1973 р. Блек та Мертон отримали Нобелівську премію за побудову моделі ціноутворення акцій на фінансовому ринку та розрахунок справедливої ціни опціонів (модель Блека–Шоулза–Мертон). Роль цієї моделі у фінансовому світі важко переоцінити. Проте на «чорні дири» цієї моделі, яка дуже спрощує реальність, вказував ще сам Ф. Блек [3]. Досі чимало дослідників у фінансовій математиці працюють над пошуком більш витончених моделей, що вдосконалюють модель Блека–Шоулза.

У цій статті продовжимо розглядати модель, запропоновану у 1999 р. С. Хейді [6] й надалі модифіковану самим С. Хейді та М. Леоненком в 2005 році [7]:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \theta T_t + \sigma W(t)}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де μ , θ і $\sigma > 0$ — константи, $W(t)$, $t \geq 0$, є стандартний броунівський рух і ця модель Хейді–Леоненка відрізняється від відомої формули Блека–Шоулза лише тим, що броунівський рух залежить не від фізичного часу $t \geq 0$, а від деякого випадкового процесу T_t , $t \geq 0$, що означає «ринковий» («операційний», «активний») час і є додатним, неспадним стохастичним процесом зі стаціонарними, але не обов'язково незалежними приростами. Для моделі (1) розглядається послідовність приростів «нового» часу за одиничний проміжок: $\tau_t = T_t - T_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots$. Тоді лог-дохідності виражаються як

$$X_t = \log(S_t/S_{t-1}) \stackrel{d}{=} \mu + \theta \tau_t + \sigma \tau_t^{\frac{1}{2}} W(1), \quad (2)$$

де $\stackrel{d}{=}$ означає еквівалентність випадкових величин за розподілом. Для конструкції процесу «ринкового» «активного» часу у [7] було використано процес χ^2 , а саме: $\tau_t = (\frac{2}{\nu} \chi_\nu^2)^{-1}$. Тоді мар-

гінальним розподілом для $\{T_t\}$ виявився гамма-обернений розподіл $\mathcal{IG}(\nu/2, \nu/2)$, а розподілом для лог-дохідностей — розподіл Стюдента. Проте кореляційна структура цієї моделі могла бути визначена лише для цілих $\nu \geq 4$.

Цей недолік було подолано за допомогою нового підходу до конструкції стохастичного активного часу $\{T_t\}$, що був запропонований М. Леоненком. Новий підхід базувався на ідеї представлення $\{T_t\}$ через суперпозицію процесів дифузії та спирався на статтю Б. Біблі [2] про побудову процесів дифузії з наперед заданими властивостями.

У статті [8] (2012) М. М. Леоненком разом із співавторами було розглянуто два випадки, коли τ_t є стаціонарними процесами дифузії та мають обернену гаусівську щільність та коли τ_t мають гамма-щільність.

У Т. 126 «Наукових записок» [1] ми розглянули ще одну модифікацію для конструкції активного часу:

$$T_t^m = \sum_{i=1}^t \tau_i^m, \quad (3)$$

а саме випадок гамма-оберненої щільності приростів τ_t , та запропонували дві нові моделі, що утворюються при $m = 1$ та $m = 2$. Для обох моделей було розглянуто теорію розподілів лог-дохідностей та доведена асимптотична самоподібність процесу $\{T_t\}$.

У цьому томі для запропонованих моделей буде виведено формулу для обрахунку справедливої ціни опціонів та перевірено її узгодженість з реальними статистичними даними.

Запропоновані моделі ціноутворення акцій

Модель 1

Нехай $m = 1$ у конструкції нового ринкового

часу (3):

$$T_t = T_t^1 = \sum_{i=1}^t \tau_i,$$

де τ_i розподілені як $\mathfrak{R}\mathfrak{G}(\frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu}{2})$, де $\delta, \nu > 0$ зі щільністю

$$f_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}(x) = \frac{(\frac{\delta^2}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{-\frac{\nu}{2}-1} e^{-\delta^2/2x}, \quad x > 0. \quad (4)$$

Конструкцією для побудови приростів «ринково-го» часу є процес дифузії. Нехай $\tau_i = \tau_i^1 = Y_t, t = 0, 1, 2, \dots$, тоді

$$dY_t = -\theta(Y_t - \mu)dt + \sqrt{v(Y_t)}dW_t, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

де $\theta > 0, l < \mu < r, \beta > 1$ та $W = \{W_t, t \geq 0\}$ є стандартний броунівський рух (вінерівський процес). Коефіцієнти v і μ стохастичного диференціального рівняння (5) визначимо через f [2]. Для розподілу $Y \sim \mathfrak{R}\mathfrak{G}(\frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu}{2})$ коефіцієнти мають вигляд:

$$\mu(x) = \nu/(\frac{\delta^2}{2} - 2), \quad v(y) = \frac{4\theta}{\delta^2 - 2} y^2.$$

Тобто це модель, у якій новий «ринковий» час T_t є процесом зі стаціонарними, не обов'язково незалежними, приростами τ_i , які будуються як процес дифузії та мають обернений гамма-розподіл. Що це нам дає?

Відомо, що випадкова величина $X \stackrel{d}{=} \mu + b\varepsilon$, де ε має стандартний нормальний розподіл $N(0, 1)$, а b^2 — обернений гамма-розподіл $\mathfrak{R}\mathfrak{G}(\frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu}{2})$ [10; 9] є випадковою величиною Стюдент-типу $T(\mu, \delta, \nu)$ зі щільністю розподілу

$$f(x) = c(\nu, \delta) \frac{1}{[1 + (\frac{x-\mu}{\delta})^2]^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ є параметром зсуву (location parameter), $\delta > 0$ — параметром масштабування або стиску (scaling parameter), $\nu > 0$ — число ступенів свободи, та $c(\delta, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\delta\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}$. Отже, вираз $\mu + \sigma\tau_t^{\frac{1}{2}}W(1)$ у правій частині (2) має розподіл Стюдента. Це є бажаним результатом, бо загальновідомим є факт, що розподіл Стюдента точніше описує розподіл лог-ретунсів (враховує «важкі» хвости).

Модель 2

Нехай $m = 2$, тобто

$$\tau_i^2 = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де $Y_t^{(1)}$ та $Y_t^{(2)}$ — незалежні процеси, такі, що $Y_t^{(1)} \sim \mathfrak{R}\mathfrak{G}(\alpha_1, \beta_1), Y_t^{(2)} \sim \mathfrak{R}\mathfrak{G}(\alpha_2, \beta_2)$ як (3).

Ф. Джирон та К. Кастіліо [5] показали, що за деяких обмежень на параметр форми — а саме: за умови, що він є напівцілим, — згортка гамма-обернених розподілів розподілена як суміш скінченної кількості гамма-обернених розподілів, що всі мають однаковий параметр масштабу.

Згортка $Y_t^{(1)}$ та $Y_t^{(2)}$ розподілена як така суміш:

$$Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)} \sim \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}((\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2, n - \frac{1}{2} + i), \quad (7)$$

де вагові коефіцієнти $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1$ можуть бути обчислені як деяка рекурсія [5]. Оскільки логдохідності альтернативної моделі (1) можуть бути представлені як (2), то для визначення характеру їх розподілу ми знайшли [1] характеристичну функцію випадкової величини $X \stackrel{d}{=} \mu + b\varepsilon$, де ε має стандартний нормальний розподіл $N(0, 1)$, а b^2 розподілено як суміш (7):

$$\phi_X(\zeta) = e^{i\zeta\mu} \int_0^\infty e^{-(\zeta^2/2)x} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}((\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2, n - \frac{1}{2} + i) dx.$$

Тоді, якщо ввести $(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2 = \frac{\delta^2}{2}$ та $n - \frac{1}{2} + i = \frac{\nu_i}{2}, i = 1, 2, \dots, m+1$, то

$$\phi_X(\zeta) = e^{i\zeta\mu} \sum_{i=1}^{m+1} p_i \phi_T(\zeta, \delta, \nu_i), \quad (8)$$

де $\phi_T(\zeta, \delta, \nu_i), i = 1, 2, \dots, m+1$ є характеристичними функціями симетричного розподілу Стюдента. (8) визначає розподіл для моделі 2. Моменти X_t можуть бути обчислені.

Обчислення справедливої ціни опціонів

Визначимо справедливую ціну європейського опціону купівлі (European call option) із ціною K (strike price) на базовий актив та часом Y (time to mature) до виконання опціону. Позначимо через $C(Y, K)$ справедливую ціну європейського опціону купівлі, B_t — це ціна безризикових активів та r процентна ставка: $B_t = B_0 e^{rt}$. Спочатку необхідно показати, що $\{e^{-rt}S_t\}$ є мартингалом (справедливою грою), де S_t — ціна ризикованих активів, що визначена формулою (1), а e^{-rt} — дисконт-фактор. Для цього розглянемо фільтрацію σ -алгебр $\mathcal{F}_s$, тобто потік інформації, доступної до моменту часу s : $\mathcal{F}_s = \sigma\{B(u), u \leq T_s, \{T_u, u \leq s\}\}$. Тоді маємо, як показано у Finlay and Seneta (2008) [4]:

$$E(e^{-rt}S_t | \mathcal{F}_s) =$$

$$= e^{-rs} S_s e^{(\mu-r)(t-s)} E(e^{(\theta+\frac{1}{2}\sigma^2)(T_t-T_s)} | \mathcal{F}_s).$$

Якщо ввести параметр θ у формі $\theta = -\frac{1}{2}\sigma^2$, тоді $e^{-rt} S_t$ і є мартингалом. Це так званий “skew-correcting” мартингал, бо θ визначає коефіцієнт асиметрії.

Далі, згідно з ризик-нейтральним підходом, справедлива ціна європейського опціону купівлі визначається як дисконтване математичне сподівання платіжної функції:

$$\begin{aligned} C(Y, K) &= e^{-rY} E(S_Y - K)^+ = \\ &= E(e^{-rY} S_Y - K e^{-rY})^+ = \\ &= E(e^{-rY} S_0 e^{\mu Y + \theta T_Y + \sigma B(T_Y)} - K e^{-rY})^+ = \\ &= E(S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T_Y + \sigma B(T_Y)} - K e^{-rY})^+ = \\ &= E(S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rY} \Phi(d_2)). \end{aligned}$$

Оскільки T_Y є випадковою величиною зі щільністю розподілу $f_{T_Y}(t)$, формулу оцінювання можна записати у вигляді:

$$C = C(Y, K) = \int_0^\infty (S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rY} \Phi(d_2)) f_{T_Y}(t) dt, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S_0}{K} + rY + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}, \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S_0}{K} + rY - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}, \end{aligned}$$

$\Phi(\cdot)$ є інтегральною функцією стандартного нормального розподілу.

Отже, для відомих S_0, K, Y, r, σ та f_{T_Y} математичне сподівання (9) може бути обчислено наближеними методами. Відкритим залишилося питання: де взяти f_{T_Y} , адже при побудові моделей ми визначали розподіл тільки для приростів процесу ринкового часу. Один із підходів — скористатися асимптотичним розподілом T_Y . Із твердження про асимптотичну самоподібність розподілу T_Y наших моделей [1] випливає, що

$$T_Y \stackrel{d}{=} E(\tau_1)(Y - \sqrt{Y}) + \tau_1 \sqrt{Y}.$$

Тоді щільність f_{T_Y} може бути апроксимовано щільністю $YE(\tau_1) + \sqrt{Y}(T_1 - E(\tau_1))$ як щільність лінійного перетворення випадкової величини $T_1 = \tau_1$. Для нашої моделі 1 (Student model) розподіл $T_1 \stackrel{d}{=} \tau_1^{(1)} \in R\Gamma(x, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu}{2})$. Таким чином

$$f_{T_Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{Y}} f_{R\Gamma}\left(\frac{u - (Y - E(\tau_1))\sqrt{Y}}{\sqrt{Y}}, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu}{2}\right).$$

Щільність оберненого гамма-розподілу задається формулою (4). Математичне сподівання $E(\tau_1^{(1)})$ визначається таким чином:

$$E(\tau_1^{(1)}) = \frac{\delta^2}{\nu - 2}.$$

Для другої моделі щільність розподілу $T_1 \stackrel{d}{=} \tau_1^{(2)}$ задається як суміш (8), а отже,

$$f_{T_Y}(u) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{R\Gamma}\left(\frac{u - (Y - E(\tau_1^{(2)})\sqrt{Y})}{\sqrt{Y}}, \frac{\delta^2}{2}, \frac{\nu_i}{2}\right),$$

де математичне сподівання $\tau_1^{(2)}$ обчислюється як

$$E(\tau_1^{(2)}) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i \frac{\delta^2}{\nu_i - 2}.$$

Отже, було виведено справедливу ціну європейського опціону купівлі (9) як інтеграл за мірою, що є щільністю розподілу T_Y , та показано, як знаходиться ця щільність для розглянутих моделей.

Перевірка моделей на узгодженість з реальними фінансовими даними

Для перевірки моделей на узгодженість було розглянуто ціни акцій таких фірм, як Stock index S&P 500 (США), Stock index MICEX O&G (Росія), MICEX TLC (Росія), MICEX M&M (Росія), Kraft Fooda Inc., Coca-cola Inc., Google Inc. та деяких інших. Загалом було досліджено понад 20 масивів щоденних цін закриття впродовж року.

Проілюструємо алгоритм обчислення справедливої ціни опціонів за першою моделлю на прикладі фінансових даних компанії Google Inc. Ціни було взято із сайту www.nasdaq.com за період з 07.03.2012 по 07.03.2013. Першим кроком було визначення параметрів розподілу лог-повернень методом моментів. Вибіркові значення середнього, дисперсії та центрального четвертого моменту дорівнювали $\hat{\mu}_1 = -0,001047$, $\hat{\mu}_2 = 1,87 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\mu}_4 = 3,12 \cdot 10^{-7}$ відповідно. Оскільки для першої моделі теоретичні значення моментів для лог-повернень мають вигляд

$$\mu_2 = \frac{\sigma^2 \delta^2}{\nu - 2}, \mu_4 = \frac{3\sigma^2 \delta^2 \mu_2}{\nu - 4},$$

то оцінки для параметрів розподілу Стюдента дорівнювали $\hat{\mu} = -0,001047$, $\hat{\delta} = 0,08929$, $\hat{\nu} = 4,0329$. Математичне сподівання приростів нового «ринкового часу» дорівнювало $E(\tau_1^{(1)}) = 0,0039$. Тепер для відомого значення $S_0 = 832,596$, $Y = 0,089$ (1/12 року), $r = 0,0229$, $\sigma = 0,2187$, наближеними методами обчислюємо інтеграл у (9).

Залишилося порівняти розраховані ціни опціонів із значеннями, отриманими за формулою Блека–Шоулза, та із значеннями, за якими реально можна було купити (продати) опціон купівлі. Наступна таблиця містить порівняльні значення цін опціонів, обрахованих за моделлю 1 за формулою Блека–Шоулза, та реальні біржові ціни, що утворилися як баланс попиту та пропозиції для різних цін виконання (страйків):

Страйк	Біржова	Модель 1	Модель Б-Ш
750	89.4	88.5666	84.9492
760	79.3	78.0448	75.5753
770	67.5	67.5231	66.4938
780	56.60	57.0018	57.7941
790	48.0	46.4813	49.5686
800	39.80	35.9627	41.9082

Із таблиці видно, що для цін виконання (страйків) у 750, 760, 770, 780 умовних одиниць відносна похибка оцінювання для нашої моделі набагато менша, ніж похибка оцінювання моделі Блека–Шоулза, і лише для цін в 790 та 800 краще наближення дає модель Блека–Шоулза. Аналогічна картина спостерігається для моделі 2.

Висновки

Розглянуто нові різновиди моделі Хейда–Леоненка для ціноутворення ризикованих активів, що використовують «ринковий» час. Конструкція процесу «ринкового» часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю і веде до Стюдент-розподілу лог-дохідностей у моделі 1 або до суміші розподілів Стюдента — у моделі 2. Показано, що процес «ринкового часу» є асимптотично самоподібним, що дає змогу запропонувати формулу для обрахунку справедливої ціни опціонів та перевірити її узгодженість з реальними статистичними даними. Проте розподіл приростів нового часу у моделі 2 було розглянуто лише для часткового випадку, коли параметр форми є напівцілим. Доцільно було б розглянути більш широкий випадок, коли параметри оберненого гамма-розподілу є довільними. Також цікаво було б узагальнити модель 2, розглянувши суму будь-якої скінченної кількості доданків, розподілених за оберненим гамма-розподілом.

Насамкінець висловлюємо подяку проф. М. М. Леоненку за співпрацю над матеріалом цієї статті.

Список літератури

1. Щестюк Н. Ю. Гамма-обернені дифузійні моделі ціноутворення акцій / Н. Ю. Щестюк // Наукові записки НаУКМА. — 2012. — Т. 113. Фізико-математичні науки. — С. 23–26.
2. Bibly B. M. Diffusion-type models with given marginal distribution and autocorrelation function / B. M. Bibly, M. I. Skowgaard, M. Sorensen // Bernoulli. — 2005. — Vol. 11. — № 2. — P. 191–200.
3. Black F. The holes in Black-Scholes / F. Black // RISK-magazin. — 1988. — Vol. 26. — P. 47–51.
4. Finlay R. Option pricing with VD-like models. / R. Finlay, E. Seneta // Int. J. Theor. Appl. Finance, 2008. — Vol. 11. — № 8. — P. 943–955.
5. Giron F. J. A note on the convolution of inverted-gamma distributions with applications to the Behrens-Fisher distribution. / F. J. Giron, C. del Castillo // Statistic and Operations Research. — 2001. — Vol. 95. — № 1. — P. 39–44.
6. Heyde C. C. A risky asset model with strong dependence through fractal activity time / C. C. Heyde // Journal Applied Probability. — 1999. — Vol. 36. — P. 1234–1239.
7. Heyde C. C. Student Processes / C. C. Heyde, N. N. Leonenko // Journal Applied Probability. — 2005. — Vol. 37. — P. 342–365.
8. Leonenko N. N. Normal Inverse Gaussian model for risky asset with dependence / N. N. Leonenko, S. Petherick, A. Sikorskii // Statistics and Probability Letters. — 2012. — Vol. 82. — № 1 — P. 109–115.
9. Leonenko N. N. Statistical inference for reciprocal gamma diffusion process / N. N. Leonenko, N. Šuvak // J. of Statistical Planning and Inference. — 2010. — Vol. 140. — P. 30–51.
10. Witkovsky V. Exact distribution of positive linear combinations of inverted chi-square random variables with odd degrees of freedom / V. Witkovsky // Statist. Probability Letters. — 2005. — Vol. 11. — P. 45–50.

N. Shchestuyk, A. Farfur

A FAIR PRICING FORMULA FOR EUROPEAN OPTIONS IN RECIPROCAL GAMMA DIFFUSION PROCESSES FOR RISKY ASSET MODELS

A fair pricing formula for european options for risky asset models of the stock price with the dependence through activity time are described. The construction of activity time uses superpositions of diffusion processes with given marginal reciprocal gamma distribution.

Keywords: options, log-returns, GBM, diffusion processes, reciprocal gamma distribution, Student distribution.

Матеріал надійшов 02.02.2013